Poznámky k předmětu
Moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic
(verze 1.23)

Matěj Tušek

28.2. 2025, Praha

Abstrakt

Tyto poznámky jsou v podstatě záznamem stejnojmenné přednášky na FJFI, jejíž rozsah je 13 stominutových lekcí. Hlavní předlohou mi byla klasická kniha L. C. Evanse [2], částečně jsem se inspiroval i poznámkami pro MFF [6]. Usiloval jsem o dobrou návaznost na předměty *Funkcionální analýza* a *Rovnice matematické fyziky* přednášené na FJFI ve třetím ročníku. Tomu jsem přizpůsobil i některé z důkazů.

Za pečlivou výpomoc s převodem části přednášky do digitální podoby děkuji studentům Kateřině Zahradové a Pavlu Eichlerovi.

Obsah

1 Notace

Kolik třešní, tolik višní.

$\cdot$	standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$
$\lvert x\rvert$	eukleidovská norma, je-li $x \in \mathbb{R}^n$; n–rozměrný objem, je-li x varieta dimenze n; stupeň, je-li x multiindex
$\\|f\\|_p$	norma f na $L^p(U,\mu;\mathscr{B})$, $\\|f\\|_p^p = \int_U \\|f(x)\\|_{\mathscr{B}}^p \,\mathrm{d}\mu(x)$ pro $p \geq 1$ a $\\|f\\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in U}\lvert f(x)\rvert$; bude-li vhodné specifikovat množinu U, použijeme značení $\\|f\\|_p \equiv \\|f\\|_{L^p(U)}$
$[f]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$	seminorma na hölderovsky spojitých funkcí s exponentem $\gamma \in (0,1\rangle$; $[f]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = \sup_{x,y\in U, x\neq y} \frac{\lvert u(x)-u(y)\rvert}{\lvert x-y\rvert^\gamma}$
f^ε	vyhlazená funkce f (ε je horní index!)
$f^\pm$	kladná, respektive záporná, část funkce f, $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$, $f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$
$f_i^{;h}$	posunutí funkce f o h násobek e_i, kde e_i je i–tý prvek standardní báze v $\mathbb{R}^n$; $f_i^{;h}(x) := f(x + he_i)$
$\fint_U f$	průměr funkce f přes množinu U, $\fint_U f = \int_U f / \int_U 1$.
$B(x,r)$	otevřená koule se středem x a poloměrem r
$\mathscr{B}(X,Y)$	vektorový prostor všech omezených lineárních zobrazení z normovaného prostoru X do normovaného prostoru Y, pro $B \in \mathscr{B}(X,Y)$ zavádíme tzv. operátorovou normu jako $\\|B\\| \equiv \\|B\\|_{X\to Y} = \sup_{x\in X, \\|x\\|_X = 1} \\|Bx\\|_Y$
C	univerzální konstanta v odhadech; odhad od odhadu se může lišit, ale je vždy uniformní na celém podprostoru, na němž odhad provádíme
$C^k(\bar{U})$	prostor k–krát spojitě diferencovatelných funkcí na $\bar{U}$
$C^k_C(U)$	prostor k–krát spojitě diferencovatelných funkcí na U s kompaktním nosičem v U
$C^{k,\gamma}(\bar{U})$	Hölderův prostor (s exponentem $\gamma \in (0,1\rangle$); zavádíme na něm normu (71)
$D^2 f(x)$	Hessova matice funkce f v bodě x
D^α	(slabá) parciální derivace podle x^α, kde α je multiindex
$D_i^h f$	i–tý diferenční kvocient funkce f velikosti h; $(D_i^h f)(x) := \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}$, kde e_i je i–tý prvek standardní báze v $\mathbb{R}^n$
$\mathscr{D}(U)$	prostor testovacích funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, $\mathscr{D}(U) = C^\infty_C(U)$
$\mathscr{D}'(U)$	duální prostor k $\mathscr{D}(U)$, prostor zobecněných funkcí
Δ	Laplaceův operátor, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
dist	vzdálenost množin, tj. pro $A, B \subset \mathbb{R}^n$: $\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\lvert x-y\rvert : x \in A, y \in B\}$
div	divergence, $\operatorname{div} \equiv \nabla\cdot$

e_i	i–tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$; $(e_i)_j = \delta_{ij}$
η_ε	standardní vyhlazovací funkce daná vztahy (7) a (5)
$H^k(U)$	Sobolevův prostor $W^{k,2}(U)$; je navíc Hilbertův
$H^k_0(U)$	uzávěr $\mathscr{D}(U)$ v $H^k(U)$
$L^p(U,\mu;\mathscr{B})$	vektorový prostor (tříd ekvivalence skoro všude shodných) funkcí μ–integrovatelných v p–té mocnině na $U \subset \mathbb{R}^n$ s hodnotami v Banachově prostoru $\mathscr{B}$; není-li uvedeno jinak, $\mathscr{B} = \mathbb{R}$ a μ je Lebesgueova míra
$\hat{n}$	$:= \{1, 2, \dots, n\}$
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\bar{\mathbb{N}}$	rozšířená množina přirozených čísel, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
∇	gradient
S^n	n–rozměrná sféra poloměru 1, $\lvert S^n\rvert = 2\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$
supp	nosič funkce či distribuce
TrA	stopa matice A
U_ε	"ε-vnitřek" otevřené množiny U, $U_\varepsilon := \{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$
$W^{k,p}(U)$	Sobolevův prostor, tj. prostor (tříd ekvivalence skoro všude shodných) funkcí, které jsou spolu se všemi svými slabými derivacemi do k-tého řádu včetně integrovatelné přes U v p-té mocnině; zavádíme na něm normu (34)
$W^{k,p}_0(U)$	uzávěr $\mathscr{D}(U)$ v $W^{k,p}(U)$

2 Harmonické funkce

"Mistře, co jsou to ty harómnické funkce," zeptal se žák Kegona. "Óóóóóóóómmm..."

Definice 2.1. *Buď U otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Funkce $u \in C^2(U)$ se nazývá* harmonická *na U právě tehdy, pokud $\Delta u = 0$ na U.*

Věta 2.2 (o střední hodnotě)**.** *Buďte u harmonická na U, $x \in U$ a $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset U$. Potom*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u \, \mathrm{d}S(y) = \fint_{B(x,r)} u \, \mathrm{d}y \tag{1}$$

Důkaz. Definujeme-li

$$\phi(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y) \, \mathrm{d}S(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x + rz) \, \mathrm{d}S(z),$$

potom

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z \, \mathrm{d}S(z) = \fint_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{r} \, \mathrm{d}S(y) = \fint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S(y),$$

kde ν je jednotková vnější normála ke sféře $\partial B(x,r)$. Pomocí Greenovy věty dostáváme

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) \, \mathrm{d}y = 0,$$

neboť u je harmonická na $B(x,r)$. ϕ je tedy konstantní na nějakém pravém okolí nuly.

Její hodnotu spočteme jako

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0+} \phi(t) = \lim_{t\to 0+} \fint_{\partial B(0,1)} u(x+tz)\,\mathrm{d}S(z) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x)\,\mathrm{d}S(z) = u(x).$$

Ve třetí rovnosti jsme použili Lebesgueovu větu, integrabilní majorantu nalezneme snadno díky spojitosti funkce u na kompaktní kouli $\overline{B(x,\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$. Tím jsme dokázali první identitu v (1), druhou dostáváme z rovností

$$\int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^r \int_{\partial B(x,t)} u\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = u(x)\int_0^r \int_{\partial B(x,t)} \mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = u(x)|B(x,r)|.$$

□

Definice 2.3. *Buď U otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Funkce $u \in C^2(U)$ se nazývá* subharmonická, *respektive* superharmonická, *na U právě tehdy, pokud $\Delta u \geq 0$, respektive $\Delta u \leq 0$, na U.*

Poznámka 2.4. *Pokud bychom v důkazu výše volili u pouze subharmonickou, odvodili bychom $\phi'(r) \geq 0$, a tedy $\phi(r) \geq \lim_{t\to 0+}\phi(t) = u(x)$, což znamená*

$$u(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u\,\mathrm{d}S(y), \quad u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Pro funkci superharmonickou potom platí opačné nerovnosti.

Věta 2.5 (princip maxima)**.** *Buď U otevřená a omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Je-li $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ navíc subharmonická na U, potom*

1. $\max\limits_{\bar{U}} u = \max\limits_{\partial U} u$
2. *Je-li U navíc souvislá a existuje-li $x_0 \in U$ tak, že $u(x_0) = \max\limits_{\bar{U}} u$, potom u je konstantní na U (tzv.* silný princip maxima*).*

Důkaz. Zřejmě z druhého bodu plyne i první, neboť tvrzení druhého bodu můžeme použít na každé komponentě souvislosti množiny U. Uvažujme tedy U souvislou a $x_0 \in U:\ u(x_0) = \max_{\bar{U}} u =: M$. Pro libovolné $r > 0$ s vlastností $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$ díky (2) platí

$$M = u(x_0) \leq \fint_{B(x_0,r)} u\,\mathrm{d}y,$$

což s ohledem na spojitost funkce u znamená, že $\forall y \in B(x_0,r):\ u(y) = M$. Zbývá ukázat, že množina $A := \{x \in U |\ u(x) = M\}$ je souvislá. Z výše uvedeného je patrně otevřená. Díky spojitosti u je i uzavřená v U. Pro libovolnou posloupnost $(x_n) \subset A$ takovou, že $x_n \to y \in U$, totiž platí $M = \lim_{n\to+\infty} u(x_n) = u(y)$, a tedy $y \in A$. □

Poznámka 2.6. *Jelikož u je superharmonická právě tehdy, pokud $-u$ je subharmonická, platí pro superharmonické funkce analogický princip minima. Harmonické funkce potom vyhovují oběma principům současně.*

Definice 2.7. *Buďte $f \in C(U)$ a $g \in C(\partial U)$ pro nějakou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^n$. Potom* Poissonovou úlohou *míníme následující problém*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{na } U \\ u &= g \quad \text{na } \partial U \end{aligned} \tag{3}$$

pro neznámou funkci $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$.

Důsledek 2.8 (jednoznačnost řešení Poissonovy úlohy)**.** *Je-li U omezená, potom Poissonova úloha má jednoznačné řešení.*

Důkaz. Uvažujme dvojici $u, \tilde{u}$ řešení Poissonovy úlohy (3). Pro $v := u - \tilde{u}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{na } U \\ v &= 0 \quad \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Z principu maxima potom plyne $\max_{\bar{U}} \pm v = \max_{\partial U} \pm v = 0$, a tedy $v \equiv 0$. □

Důsledek 2.9. *Buď u harmonická a v subharmonická na omezené množině U a navíc $u = v$ na ∂U. Potom graf funkce v na U leží "pod grafem" funkce u. Analogicky graf superharmonické funkce leží "nad grafem" funkce harmonické.*

Důkaz. Rozdíl $v - u$ je opět subharmonická funkce, která je navíc na ∂U nulová. Z principu maxima pro libovolné $x \in U$ dostáváme $v(x) - u(x) \leq \max_{\partial U}(v - u) = 0$. □

Tvrzení 2.10. *Je-li u harmonická na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, potom $u \in C^\infty(U)$, dokonce u je* reálně *analytická na U. Pro derivace platí odhad*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}, \tag{4}$$

kde $x_0 \in U$, $r > 0 :\ B(x_0, r) \subset U$ a $k = |\alpha|$.

Dokážeme pouze hladkost u, důkaz odhadu (4) je ponechán čtenáři jako Úloha 2, důkaz analytičnosti vychází z tohoto odhadu a lze jej nalézti například v [2]. Nejdříve si však připomeneme několik poznatků o vyhlazovacích funkcích.

Intermezzo–vyhlazovací funkce

Standardní vyhlazovací funkcí rozumíme

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1, \end{cases} \tag{5}$$

kde $C > 0$ je voleno tak, aby

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{B(0,1)} \eta(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{6}$$

Povšimněme si, že hodnoty η závisí jen na $|x|$. Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Totéž platí pro škálované funkce

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{7}$$

Ty jsou rovněž normované na jedničku a $\operatorname{supp}\eta_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}$.

Buď nyní $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$, kde U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Potom

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f \in C^\infty(U_\varepsilon),$$

kde

$$U_\varepsilon := \{x \in U|\ \mathrm{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Důkaz se provede nalezením explicitního předpisu pro derivace,

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

(viz Úloha 1).

Důkaz. (Harmonická funkce je hladká.) Ukážeme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$, $u = u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ na U_ε. Buď tedy ε pevné a $x \in U_\varepsilon$. Potom díky rotační symetrii zvolených vyhlazovacích funkcí

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y &= \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(|x-y|)u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\varepsilon \eta_\varepsilon(r) \int_{\partial B(x,r)} u\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}r = u(x)\int_0^\varepsilon \eta_\varepsilon(r)\int_{\partial B(x,r)} \mathrm{d}S\,\mathrm{d}r \\ &= u(x)\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = u(x). \end{aligned}$$

Ve čtvrté rovnosti jsme využili věty o střední hodnotě. Vzhledem k libovolnosti ε je u hladká na celé U. $\square$

Důsledek 2.11 (Liouvilleův teorém)**.** *Buď u harmonická a omezená na celém $\mathbb{R}^n$, potom u je konstantní.*

Důkaz. Vezměme $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$. Potom ze (4) snadno odhadneme

$$|\nabla u(x_0)| \le \frac{C}{r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \le \frac{C}{r^{n+1}}|B(x_0,1)|r^n\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

V limitě $r \to +\infty$ dostáváme $|\nabla u(x_0)| = 0$, a tedy vzhledem k libovolnosti x_0 je u konstantní. $\square$

Poznámka 2.12 (Souvislost s holomorfními funkcemi)**.** *Má-li $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, kde $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, komplexní derivaci, tj. je na Ω holomorfní, musí nutně platit Cauchy-Riemannovy rovnice,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Z nich ze záměnnosti druhých derivací funkcí u a v odvodíme

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

Je-li tedy f holomorfní na Ω, potom její reálná i imaginární část jsou harmonické na Ω (identifikované s příslušnou podmnožinou $\mathbb{R}^2$). Speciálně z Liouvillova teorému pro harmonické funkce dostáváme Liouvillův teorém pro všude holomorfní funkce.

Na druhou stranu si ukážeme, že každá harmonická funkce dvou proměnných je lokálně *rovna reálné části nějaké holomorfní funkce. Buď u harmonická na $U \subset \mathbb{R}^2$. Pro $(x, y) \in U$ položme $z = x + iy$ a zaveďme funkci*

$$g(z) := \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Reálná a imaginární část funkce g jsou hladké a navíc splňují Cauchy-Riemannovy rovnice-jedna je splněna díky harmoničnosti u, druhá díky záměnnosti druhých derivací. Odtud je g holomorfní na U (identifikované s podmnožinou $\mathbb{C}$). Její primitivní funkce $G = \int g$ je potom holomorfní na jednoduše souvislých podmnožinách U a platí

$$G'(z) = \frac{\partial \Re G}{\partial x} + i\frac{\partial \Im G}{\partial x} = \frac{\partial \Re G}{\partial x} - i\frac{\partial \Re G}{\partial y} = g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

z čehož plyne $u = \Re G + konst$.

3 Řešení Poissonovy rovnice

"Mistře, existuje pravda?" zeptal se jednoho dne mladý mnich mistra Zatoichiho. Zatoichi se zahleděl do dáli a potom pravil: "Nejedna." Když mu později tutéž otázku položil pokročilý student, Zatoichi jen odsekl: "Hlupáku, nic jsi nepochopil."

3.1 Poissonova rovnice na $\mathbb{R}^n$

Uvažujme na okamžik rovnici

$$-\Delta\mathcal{E} = \delta \tag{8}$$

na $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, tj.ve smyslu distribucí. Na pravé straně stojí Diracova delta funkce. Řešením (8) je regulární distribuce (prvek $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$) [7]

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x| & n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3. \end{cases}$$

Poznamenejme, že pro $x \neq 0: \ \Delta\mathcal{E}(x) = 0$, a $\nabla\mathcal{E} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, tj. zobecněná první derivace splývá s běžnou derivací (která existuje všude mimo $x = 0$) a působí opět jako regulární distribuce.

Buď nyní f regulární distribuce taková, že existuje $\mathcal{E} * f$ (např. f má omezený nosič [7]). Potom řešením rovnice

$$-\Delta u = f \tag{9}$$

na $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ je právě $u = \mathcal{E} * f$, tzn. že pro všechny $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Funkce u obecně neřeší rovnici (9) v *klasickém smyslu*, tj. bodově, dokonce nemusí být ani dvakrát diferencovatelná, jedná se “jen” o tzv. *slabé řešení*, které budeme v obecnější podobě studovat později. Platí ale například následující tvrzení [2].

Tvrzení 3.1. *Je-li $f \in C^2_C(\mathbb{R}^n)$, potom $x \mapsto u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y$ leží v $C^2(\mathbb{R}^n)$ a rovnice (9) je splněna bodově.*

Ve skutečnosti zůstává toto tvrzení v platnosti i za slabších požadavků na regularitu f [4].

3.2 Poissonova úloha na omezené oblasti

Vraťme se nyní k problému (3) pro omezenou oblast s C^1-hladkou hranicí.

Věta 3.2 (o třech potenciálech)**.** *Buď $u \in C^2(\bar{U})$, $x \in U$ a ν vnější normála k ∂U. Potom*

$$u(x) = \int_{\partial U} \mathcal{E}(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu}(y-x) u(y)\, \mathrm{d}S(y) - \int_U \mathcal{E}(y-x)\Delta u(y)\, \mathrm{d}y. \tag{10}$$

Důkaz. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0 :\ B(x,\varepsilon) \subset U$ a pro pevné $x \in U$ definujme $V_\varepsilon := U \backslash B(x,\varepsilon)$. Z harmoničnosti $y \mapsto \mathcal{E}(y-x)$ na V_ε a Greenovy formule odvodíme identitu

$$\begin{aligned}\int_{V_\varepsilon} \mathcal{E}(y-x)\Delta u(y)\, \mathrm{d}y &= \int_{V_\varepsilon} \mathcal{E}(y-x)\Delta u(y) - \Delta\mathcal{E}(y-x)u(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial V_\varepsilon} \mathcal{E}(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu}(y-x)u(y)\, \mathrm{d}S(y). \end{aligned} \tag{11}$$

Na pravé straně integrujeme přes ∂U a $\partial B(x,\varepsilon)$. Prozkoumáme limitní chování integrálu přes druhou jmenovanou část hranice. $\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|$ odhadneme maximem na $\bar{U}$ a dostáváme

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \mathcal{E}(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, \mathrm{d}S(y) \right| \leq C\varepsilon^{n-1} \max_{\partial B(x,\varepsilon)} |\mathcal{E}| = \begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon) & n = 2 \\ \mathcal{O}(\varepsilon) & n \geq 3 \end{cases}$$

pro $\varepsilon \to 0$. Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla \mathcal{E} = \frac{1}{|S^{n-1}|\varepsilon^{n-1}},$$

a tedy

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu}(y-x)u(y)\, \mathrm{d}S(y) = \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\, \mathrm{d}S(y) \to u(x),$$

když $\varepsilon \to 0$. Limitu jsme spočítali stejným způsobem jako v důkazu Věty 2.2. Vztah (10) nyní dostaneme prostým limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ v (11). $\square$

Poznámka 3.3. *Je-li $u(x)$ harmonická, potom poslední člen v (10) vymizí. Navíc funkce $x \mapsto \mathcal{E}(y-x)$ je pro $y \in \partial U$ na U hladká. Z toho lze odvodit, že $u \in C^\infty(U)$, tedy první část Tvrzení 2.10, kterou jsme již dokázali jiným způsobem–pomocí vyhlazovacích funkcí.*

Řeší-li u Poissonův problém (3), má již předepsány hodnoty na ∂U a hodnoty Δu na U. Ve formuli (10) se navíc vyskytuje člen $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. Ten eliminujeme pomocí vhodné korekce fundamentálního řešení $\mathcal{E}$. Ta bude pro každé pevné $x \in U$ řešit následující Poissonův problém

$$\begin{aligned} \Delta \mathscr{E}^x &= 0 \quad \text{na } U \\ \mathscr{E}^x(y) &= \mathcal{E}(y-x) \quad \text{na } \partial U. \end{aligned} \tag{12}$$

Opět s využitím Greenovy formule dostáváme

$$\begin{aligned} \int_U \mathscr{E}^x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y &= \int_U \mathscr{E}^x(y)\Delta u(y) - \Delta\mathscr{E}^x(y)u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial U} \mathscr{E}^x(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \mathscr{E}^x}{\partial \nu}(y)u(y)\,\mathrm{d}S(y) \\ &= \int_{\partial U} \mathcal{E}(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \mathscr{E}^x}{\partial \nu}(y)u(y)\,\mathrm{d}S(y). \end{aligned}$$

Dosadíme-li tento vztah do (10), obdržíme

$$u(x) = -\int_{\partial U} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}S(y) - \int_U \mathcal{G}(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y, \tag{13}$$

kde

$$\mathcal{G}(x,y) := \mathcal{E}(y-x) - \mathscr{E}^x(y) \quad (x \neq y)$$

je tzv. *Greenova funkce* pro U. Identita (13) nás vede k závěru

Tvrzení 3.4. *Pokud výše uvedená funkce $\mathcal{G}$ existuje a $u \in C^2(\bar{U})$ řeší Poissonův problém* (3)*, potom u je nutně tvaru*

$$u(x) = -\int_{\partial U} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu_y}(x,y)g(y)\,\mathrm{d}S(y) + \int_U \mathcal{G}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{14}$$

Poznámka 3.5. *Zdůrazněme, že tvrzení výše neříká nic o* existenci řešení *Poissonova problému* (3)*. Nicméně lze ukázat, že jsou-li f, g a ∂U dostatečně regulární, potom* (14) *je řešením* (3) *v klasickém smyslu [4, Theorem 4.3]. My namísto toho později dokážeme, že za prakticky minimálních požadavků na regularitu slabé řešení existuje a je právě jedno. Explicitní formule pro Greenovu funkci $\mathcal{G}$ v případě, kdy U je poloprostor či koule, lze nalézti např. v [2].*

Tvrzení 3.6 (symetričnost Greenovy funkce)**.** *Pro všechna $x, y \in U : x \neq y$, $\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{G}(y,x)$.*

Důkaz. Viz návod k Úloze 3. □

3.3 Variační přístup-energetická metoda

Jednoznačnost řešení Poissonova problému (3) na omezené množině jsme již dokázali pomocí principu maxima, existuje však i přímočařejší postup. Jsou-li u, $\tilde{u} \in C^2(\bar{U})$ dvě řešení (3), potom $v := u - \tilde{u}$ vyhovuje úloze

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{na } U \\ v &= 0 \quad \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Po přenásobení první rovnice funkcí v dostaneme pomocí integrace per partes

$$0 = \int_U v\Delta v \, \mathrm{d}x = \int_{\partial U} v\frac{\partial v}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S - \int_U |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x = -\int_U |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Odtud $\nabla v = 0$ na U, a v je tudíž konstantní. Současně $v = 0$ na ∂U. Proto $v = 0$ na U.

Pokusme se nyní problém (3) převést na variační úlohu. Řešení hledejme na množině

$$\mathcal{A} := \{w \in C^2(\bar{U}) |\, w = g \text{ na } \partial U\}.$$

Buďte tedy $u, w \in \mathcal{A}$ a nechť u navíc řeší (3). Platí tedy

$$\begin{aligned} 0 = \int_U (-\Delta u - f)(u - w) \, \mathrm{d}x &= -\int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu}(u - w) \, \mathrm{d}S + \int_U \nabla u \nabla (u - w) \, \mathrm{d}x - \int_U f(u - w) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_U \nabla u \nabla (u - w) \, \mathrm{d}x - \int_U f(u - w) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Odtud s pomocí Cauchy–Schwarzovy a Youngovy nerovnosti odhadneme

$$\int_U |\nabla u|^2 - fu \, \mathrm{d}x = \int_U \nabla u \nabla w - fw \, \mathrm{d}x \leq \int_U \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw \, \mathrm{d}x, \tag{15}$$

což nás motivuje k zavedení nové veličiny, tzv. *energetického funkcionálu*, $I : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$I(w) := \int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw \, \mathrm{d}x.$$

Nerovnost (15) můžeme nyní přepsat jako

$$\forall w \in \mathcal{A} : \quad I(u) \leq I(w),$$

jinými slovy, řešení u problému (3) minimalizuje I na $\mathcal{A}$. Platí dokonce i obrácené tvrzení:

Věta 3.7 (Dirichletův princip)**.** *Buď $u \in \mathcal{A}$. Potom u řeší Poissonovu rovnici právě tehdy, pokud*

$$I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w).$$

Důkaz. Stačí již dokázat jen druhou implikaci. Nechť tedy u minimalizuje I. Uvažujme libovolné pevné $v \in \mathscr{D}(U)$ a zaveďme funkci $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto I(u + tv)$. Zřejmě $u + tv \in \mathcal{A}$, a tedy ι má minimum v $t = 0$. Existuje-li tedy $\iota'(0)$, potom je nutně nulová. Derivace $\iota'(0)$ je dána lineárním členem v rozvoji

$$\iota(t) = \int_U \frac{1}{2}|\nabla u + t\nabla v|^2 - f(u + tv) \, \mathrm{d}x = \int_U \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}t^2|\nabla v|^2 + t\nabla u \nabla v - fu - tfv \, \mathrm{d}x.$$

Máme tedy

$$0 = \iota'(0) = \int_U \nabla u \nabla v - fv \, \mathrm{d}x = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, \mathrm{d}S - \int_U \Delta u v - fv \, \mathrm{d}x = \int_U (-\Delta u - f)v \, \mathrm{d}x,$$

neboť $v = 0$ na ∂U. Prostor $\mathscr{D}(U)$ je ale hustý v $L^2(U, \mathrm{d}x)$, musí tudíž platit $-\Delta u - f = 0$ s.v. na U. Vzhledem ke spojitosti $-\Delta u - f$ platí tato rovnost na celém U. $\square$

4 Princip maxima pro eliptické operátory

Mladý mnich ze zeptal Unmona: "Mistře, kde najdu maximu[1] *života?" Unmon se dlouze zamyslel a potom pronesl: "Na hraně."*

Buďte a^{ij}, b^i, c, f, kde i, $j \in \hat{n}$, zatím blíže nespecifikované reálné funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$. Uvažujme rovnici

$$(Lu)(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{,x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{,x_i}(x) + c(x)u(x) = f(x) \tag{16}$$

pro neznámou funkci $u \in C^2(U)$. Zde jsme zavedli zkrácenou *postfixovou notaci* pro parciální derivaci, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{,x_i}$. Vzhledem k tomu, že $u_{,x_i x_j} = u_{,x_j x_i}$, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$. Tyto koeficienty je výhodné zapsat do symetrické čtvercové matice $A = (a^{ij})_{i,j=1}^n$. Podobně zavedeme vektorovou funkci $b = (b^i)_{i=1}^n$.

Zdůrazněme, že v celé této sekci budeme vždy uvažovat (funkční) koeficienty a^{ij} takové, že L je uniformně eliptický dle následující definice.

Definice 4.1. *Diferenciální rovnice* (16) *se nazývá* (uniformně) eliptická*, pokud existuje konstanta $\theta > 0$ tak, že pro s.v. $x \in U$:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad \textit{pro } \forall\xi \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Lineární diferenciální operátor L z (16) *v takovém případě nazýváme* (uniformně) eliptickým*.*

Poznámka 4.2. *Typické minimální požadavky na regularitu koeficientů jsou a^{ij}, b^i, $c \in C(U)$. Potom $L : C^2(U) \to C(U)$.*

Poznámka 4.3. *Podmínka elipticity* (17) *implikuje, že s.v. na U (a pro spojité koeficienty a^{ij} všude na U) je matice $A(x)$ pozitivně definitní s nejmenší vlastní hodnotou větší či rovnou θ. Volíme-li za ξ vektor, jehož jediná nenulová komponenta je právě k-tá, dostáváme*

$$a^{kk}(x) \geq \theta. \tag{18}$$

Je-li $a^{ij} \in C^1(U)$, potom lze operátor L přepsat jako

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b^i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x),$$

kde $\tilde{b^i} := b^i + \sum_{j=1}^n a^{ij}_{,x_j}$, což lze úsporně zapsat jako

$$L = -\operatorname{div}(A\nabla) + \tilde{b} \cdot \nabla + c.$$

Tento tvar operátoru L budeme nazývat *divergenčním*–je výhodný, kdykoliv přijde ke slovu integrace per-partes, tj. ve slabé formulaci a energetických metodách. V důkazu principu maxima je naopak výhodné pracovat s původním *nedivergenčním* tvarem.

[1] poznámka překladatele z japonštiny: maxima=mravní zásada

Věta 4.4 (slabý princip maxima). *Buďte U otevřená omezená množina v $\mathbb{R}^n$, $c \equiv 0$, $a^{ij} \in C(U)$, $b^i \in C(\bar{U})$ a $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ takové, že*

$$Lu \leq 0 \quad \text{na } U. \tag{19}$$

Potom $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$.

Platí-li obráceně

$$Lu \geq 0 \quad \text{na } U, \tag{20}$$

potom $\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u$.

Definice 4.5. *Funkci u vyhovující* (19)*, respektive* (20)*, budeme nazývat* subřešením*, respektive* superřešením*.*

Slabý princip maxima tedy říká, že každé subřešení nabývá na hranici svého maxima a každé superřešení nabývá na hranici svého minima.

Důkaz. (slabý princip maxima) Jelikož u je superřešením právě tehdy, pokud je $-u$ subřešením, stačí dokázat první tvrzení. Uvažujme nejprve případ

$$Lu < 0 \quad \text{na } U. \tag{21}$$

Existuje-li $x^0 \in U : u(x^0) = \max_{\bar{U}} u$, potom nutně

$$\nabla u(x^0) = 0, \quad D^2 u(x^0) \leq 0. \tag{22}$$

Druhý vztah říká, že Hessova matice v x^0 je negativně definitní či semidefinitní.

Dále matice $A(x^0)$ je symetrická a pozitivně definitní. Existuje tudíž orthogonální matice $O \equiv (o^{ij})_{i,j=1}^n$ tak, že

$$OA(x^0)O^T = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n), \quad \forall i \in \hat{n} : d_i > 0.$$

V nových souřadnicích $y := x^0 + O(x - x^0)$ nabývá eliptický člen L v bodě x^0 rovněž diagonálního tvaru,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x^0) u_{,x_i x_j}(x^0) &= \sum_{i,j,k,l=1}^n a^{ij}(x^0) o^{ki} o^{lj} u_{,y_k y_l}(x^0) \\ &= \sum_{k,l=1}^n (OA(x^0)O^T)_{kl} u_{,y_k y_l}(x^0) = \sum_{k=1}^n d_k u_{,y_k y_k}(x^0).\end{aligned}$$

Jelikož podmínka (22) nezávisí na volbě souřadnic, musí platit $\forall k \in \hat{n} : u_{,y_k y_k}(x^0) \leq 0$. Odtud již plyne

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x^0) u_{,x_i x_j}(x^0) \leq 0.$$

Současně díky první podmínce v (22) člen prvního řádu operátoru L v bodě x^0 vymizí, $b \cdot \nabla u(x^0) = 0$. To ale znamená, že

$$(Lu)(x^0) \geq 0,$$

což je spor s (21).

Nechť nyní platí (19). Pro zatím libovolné ε, $\lambda > 0$ definujme

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon \mathrm{e}^{\lambda x_1}.$$

S využitím nerovností (19) a (18) dospějeme k následujícím odhadům,

$$L(u_\varepsilon) = Lu + \varepsilon L\mathrm{e}^{\lambda x_1} \leq \varepsilon L\mathrm{e}^{\lambda x_1} = \varepsilon(-\lambda^2 a^{11} + \lambda b^1)\mathrm{e}^{\lambda x_1} \leq \varepsilon(-\lambda^2\theta + \lambda\|b^1\|_\infty)\mathrm{e}^{\lambda x_1} < 0,$$

kde poslední nerovnost platí pro λ dosti velké. Jako v prvním případě dostáváme rovnost

$$\max_{\bar{U}} u_\varepsilon = \max_{\partial U} u_\varepsilon,$$

ve které stačí provést limitní přechod $\varepsilon \to 0$. $\square$

Poznámka 4.6. *Stejně jako v Důsledku 2.9 se ukáže, že platí-li*

$$\begin{aligned} Lv &= f, \quad Lw \leq f \quad \text{na } U \\ v &= g, \quad\ \ w \leq g \quad \text{na } \partial U, \end{aligned}$$

potom $w \leq v$ na celém U. Odtud o w mluvíme jako o subřešení.

V případě ostré nerovnosti (21) jsme dokázali dokonce více. Nejenže subřešení nabývá svého maxima na hranici, ale nikde mimo hranici jej ani nabývat nemůže. Princip maxima v obdobném duchu záhy zesílíme i pro případ neostré nerovnosti. Ta ale na rozdíl od ostré připouští i konstantní řešení. Nejdříve se ale podívejme, do jaké míry lze oslabit podmínku $c \equiv 0$.

Věta 4.7 (slabý princip maxima pro $c \geq 0$)**.** *Buďte U otevřená omezená množina v $\mathbb{R}^n$, $c \geq 0$, $a^{ij} \in C(U)$, $b^i \in C(\bar{U})$ a $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ takové, že*

$$Lu \leq 0 \quad \text{na } U.$$

Potom $\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+$. Platí-li naopak

$$Lu \geq 0 \quad \text{na } U,$$

potom $\min_{\bar{U}} u \geq -\max_{\partial U} u^-$.

Důkaz. Pro první tvrzení viz Úlohu 4, druhá část se ukáže aplikací té první na funkci $-u$. Stačí si uvědomit, že $(-u)^+ = u^-$. $\square$

Poznámka 4.8. *Požadavek nezápornosti c nelze vypustit, jak ukazuje následující protipříklad. Vezměme $U = (0,\pi) \times (0,\pi)$ a $u(x,y) = \sin x \sin y$. Ihned ověříme, že $-\Delta u - 2u = 0$, $u = 0$ na ∂U a současně $\max_{\bar{U}} u = u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$.*

Podobně se nelze zříci omezenosti U. Uvažujeme-li $U = \mathbb{R} \times (0,\pi)$ a $u(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$, potom $-\Delta u = 0$, $u = 0$ na ∂U a přitom $\sup_U u = +\infty$.

Definice 4.9. *Buď U otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, která v $x^0 \in \partial U$ připouští vnější normálu ν. Řekneme, že $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ v x^0* směřuje ven *z U právě tehdy, pokud $\eta \cdot \nu > 0$.*

Lemma 4.10 (Hopf). *Buďte U otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, a^{ij}, b^i, $c \in C(\bar{U})$ a $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ splňující*

$$Lu \leq 0 \quad \text{na } U. \tag{23}$$

Nechť dále existuje $x^0 \in \partial U$ takové, že $\forall x \in U : u(x) < u(x^0)$, přičemž hranice ∂U je taková, že připouští existenci otevřené koule $B \subset U : x^0 \in \partial B$.

Je-li navíc $c = 0$ na U a derivace v (24) existuje, potom

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x^0) > 0 \tag{24}$$

pro libovolné η, které směřuje ven z B.

Pokud $c \geq 0$ na U, potom (24) platí za dodatečné podmínky $u(x^0) \geq 0$.

Důkaz. Uvažujme obecně situaci, kdy $c \geq 0$. Nechť x^0 vyhovuje předpokladům lemmatu. Volme souřadný systém tak, aby jeho počátek ležel ve středu koule B–platí tedy $B \equiv B(0,r) : r = |x^0|$. Pro zatím blíže nespecifikované $\lambda > 0$ zavedeme na B pomocnou funkci

$$v(x) := \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2} - \mathrm{e}^{-\lambda r^2},$$

která splňuje

$$\begin{aligned}(Lv)(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda|x|^2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)(-2\lambda\delta_{ij} + 4\lambda^2 x_i x_j) - \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2} \sum_{i=1}^{n} 2\lambda b^i(x) x_i + c(x)v(x) \\ \leq \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\left(2\lambda \mathrm{Tr} A(x) - 4\theta\lambda^2|x|^2 + 2\lambda|b(x)||x| + c(x)\right).\end{aligned}$$

Výše jsme využili uniformní eliptičnosti L-viz vztah (17). Na mezikruží $M := B \setminus \overline{B(0,r/2)}$ potom platí

$$(Lv)(x) \leq \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\left(-\theta r^2\lambda^2 + 2\left(\|\mathrm{Tr} A\|_{L^\infty(M)} + r\|b\|_{L^\infty(M)}\right)\lambda + \|c\|_{L^\infty(M)}\right) \leq 0 \tag{25}$$

pro všechna λ dostatečně velká.

Jelikož $\forall x \in U : u(x) < u(x^0)$, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $u(x^0) \geq u + \varepsilon v$ na $\partial B(0,r/2)$; ta samá nerovnost platí i na ∂B, protože v na ∂B vymizí. Celkem tedy máme

$$\begin{aligned} &u + \varepsilon v - u(x^0) \leq 0 \quad \text{na } \partial M \\ &u(x^0) + \varepsilon v(x^0) - u(x^0) = 0 \\ &L\left(u + \varepsilon v - u(x^0)\right) \leq -cu(x^0) \leq 0 \quad \text{na } M, \end{aligned} \tag{26}$$

kde poslední vztah plyne z (25), (23) a předpokladu $u(x^0) \geq 0$ pro nenulové nezáporné c. Ze slabého principu maxima pro oblast M tak dostáváme

$$u + \varepsilon v - u(x^0) \leq 0 \quad \text{na } M.$$

Vezmeme-li v potaz (26), musí platit

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(u + \varepsilon v - u(x^0))(x^0) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(x^0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \eta}(x^0) \geq 0,$$

a tudíž

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x^0) \geq -\varepsilon\eta \cdot \nabla v(x^0) = -\varepsilon\eta \cdot \left(-2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda r^2}\frac{x^0}{r} r\right) = 2\varepsilon\eta \cdot \nu\lambda r \mathrm{e}^{-\lambda r^2} > 0.$$

Zde $\nu = \frac{x^0}{r}$ značí jednotkovou vnější normálu k ∂B v x^0. □

Poznámka 4.11. *Pro existenci koule B z Hopfova lemmatu postačuje, aby $\partial U \in C^2$ na nějakém okolí x^0. To lze nahlédnouti z Taylorova rozvoje v x^0, případně z omezenosti Gaussovy křivosti. Podmínka $\partial U \in C^1$ ale již postačující není, jak ukazuje následující protipříklad. Buďte $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\}$, kde $f(x) := x^2 \ln|x|$, a $x^0 = (0,0) \in \partial U$. Ze sudosti f můžeme usoudit, že kandidát na vepsanou kouli B musí být tvaru $B = B((0,-a),a)$, kde $a > 0$. Lze se ale přesvědčit, že pro libovolné $a > 0$ existuje redukované okolí nuly, na němž $f(x) < \sqrt{a^2 - x^2} - a$.*

Poznámka 4.12. *(Ve vnitřním vrcholu nemůže subřešení nabývat ostrého lokálního maxima.) Buď u subřešení z Hopfova lemmatu. Pokud lze v bodě x^0 zkonstruovat dvě koule B, $\tilde{B}$ s různými tečnými nadrovinami takové, že $B, \tilde{B} \subset U$ a $x^0 \in \partial B \cap \partial \tilde{B}$, potom aplikace Hopfova lemmatu na každou z těchto koulí vede ke sporu. Není tedy možné, aby x^0 byl bodem ostrého maxima, dokonce ani lokálního, protože za U můžeme vzít dostatečně malé okolí bodu x^0 v průniku s původním U.*

Pro příklad lze za U vzíti kruhovou výseč se středovým úhlem v $(\pi, 2\pi)$ a za x_0 její střed.

Poznámka 4.13. *(Vlastní funkce L s Dirichletovou hraniční podmínkou protínají nodální množinu ostrým způsobem.) Buď L z Hopfova lemmatu a U omezená. Uvažujme řešení u úlohy*

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u \quad \text{na } U \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial U \end{aligned}$$

pro nějaké $\lambda > 0$. Existenci takového řešení nyní ponechme stranou. Nodální množina $\mathscr{N}(u) := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 0\}$ *dělí U na navzájem disjunktní podoblasti $\{U_i\}$, na kterých má funce u konstatní znaménko. Nějakou takovou oblast U_i si zafixujme a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $u(x) > 0$ na U_i. Ukážeme, že na sousedních podoblastech, tj. na těch, které s U_i sdílí $(n-1)$-dimenzionální část hranice nutně platí $u(x) < 0$. Stačí podél jmenovaných částí hranice aplikovat Hopfovo lemma na U_i, kde platí $Lu > 0$. Podél hranice se sousedními oblastmi tak dostáváme $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$.*

V důkaze následující věty poprvé využijeme následující pozorování:

Lemma 4.14. *Buď U omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, potom ∂U je kompaktní v $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Buď $\{U_i\}$ libovolné otevřené pokrytí ∂U. Potom $\{U_i\} \cup U$ je otevřené pokrytí $\bar{U}$. Jelikož $\bar{U}$ je kompaktní, existuje konečné podpokrytí $\{U_j\} \cup U$ této množiny. Odejmutím množiny U dostaneme konečné podpokrytí ∂U. $\square$

Věta 4.15 (silný princip maxima)**.** *Buďte U souvislá omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, a^{ij}, $b^i \in C(\bar{U})$, $c = 0$ na U a $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$. Platí-li*

$$Lu \leq 0 \quad \text{na } U$$

a současně u nabývá svého maxima přes $\bar{U}$ uvnitř U, potom u je konstantní na U.

Platí-li obráceně

$$Lu \geq 0 \quad \text{na } U$$

a současně u nabývá svého minima přes $\bar{U}$ uvnitř U, potom u je konstantní na U.

Důkaz. Dokážeme opět jen první případ. Položme $M := \max_{\bar{U}} u$ a $\mathcal{M} := \{x \in U : u(x) = M\}$. Dle předpokladu $\mathcal{M} \neq \emptyset$ a díky spojitosti u je $\mathcal{M}$ uzavřená (v relativní topologii na U). Je-li $\mathcal{M} = U$, důkaz je hotov. Uvažujme proto dále pouze situaci, kdy $\mathcal{M} \neq U$, a položme $V := \{x \in U : u(x) < M\}$. V je opět díky spojitosti u otevřená.

Nejprve ukážeme, že existuje $y \in V$ s vlastností $0 < \mathrm{dist}(y, \mathcal{M}) < \mathrm{dist}(y, \partial U)$. V první řadě si uvědomíme, že existuje $m \in \partial\mathcal{M} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^O$. Kdyby tomu tak nebylo, potom $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0$, což by vzhledem k výše uvedenému znamenalo, že $\mathcal{M}$ je neprázdná obojetná podmnožina U. Následně $\mathcal{M} = U$, tj. dostáváme spor. Dále podle Lemmatu 4.14 je ∂U kompaktní. Ze spojitosti funkce $x \mapsto \mathrm{dist}(m, x)$ tak dostáváme $d := \mathrm{dist}(m, \partial U) > 0$. K tomuto d najdeme $y \in B(m, d/3) \cap V$, tj. máme $\mathrm{dist}(y, \mathcal{M}) \leq \mathrm{dist}(m, y) < d/3$. Nyní sporem ukážeme, že $\mathrm{dist}(y, \partial U) > d/3$. V opačném případě bychom totiž z trojúhelníkové nerovnosti dostali

$$d = \mathrm{dist}(m, \partial U) \leq \mathrm{dist}(m, y) + \mathrm{dist}(y, \partial U) < 2d/3.$$

Našli jsme tedy $y \in V$ s vlastností $\mathrm{dist}(y, \mathcal{M}) < \mathrm{dist}(y, \partial U)$. Navíc platí $\mathrm{dist}(y, \mathcal{M}) > 0$, protože jinak by existovala posloupnost $(z_n) \subset \mathcal{M} : \lim_{n\to+\infty} z_n = y$. Ze spojitosti funkce u na U by potom plynulo $M = \lim_{n\to+\infty} u(z_n) = u(y) < M$.

K výše zkonstruovanému y nalezneme největší otevřenou kouli B, která stále celá leží ve V. (Její poloměr bude $\mathrm{dist}(y, \mathcal{M})$). Existuje tedy $x^0 \in \mathcal{M} : x^0 \in \partial B$. Použijeme-li nyní na B (potažmo na V) Hopfovo lemma, dostáváme $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) > 0$. To je ale nemožné, protože v x^0 nabývá u maxima, a tudíž $\nabla u(x^0) = 0$. Shrnujeme, že alternativa $\mathcal{M} \neq U$ nemůže vůbec nastat, a tedy $u \equiv M$ na celém U. □

Poznámka 4.16. *Kdybychom nepředpokládali souvislost U, dokázali bychom konstantnost u pouze na té komponentě souvislosti, na které je extrém nabýván.*

Poznámka 4.17. *(silný princip maxima pro $c \geq 0$) S pomocí druhého tvrzení Hopfova lemmatu stejným způsobem ukážeme následující. Nabývá-li subřešení, respektive superřešení, nezáporného maxima, respektive nekladného minima, přes $\bar{U}$ uvnitř U, potom je u konstantní.*

Poznámka 4.18. *(princip maxima pro lokální extrém) Nechť subřešení u nabývá lokálního maxima v bodě $x^0 \in U$, potom existuje okolí V bodu x^0, na němž je $u(x_0)$ globálním maximem. Je-li $c = 0$, potom u je konstantní na V. Pro $c \geq 0$ platí totéž za dodatečné podmínky, že $u(x^0) \geq 0$.*

Důsledek 4.19 (zesílené Hopfovo lemma)**.** *Buďte U omezená souvislá otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, a^{ij}, b^i, $c \in C(\bar{U})$ a $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ splňující*

$$Lu \leq 0 \quad \text{na } U.$$

Nechť dále existuje $x^0 \in \partial U$ takové, že $\forall x \in U : u(x) \leq u(x_0)$, přičemž hranice ∂U je taková, že připouští existenci otevřené koule $B \subset U : x^0 \in \partial B$.

Je-li navíc $c = 0$ na U a u je nekonstantní na U, potom

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x^0) > 0 \tag{27}$$

pro libovolné η, které směřuje ven z B.

Pokud $c \geq 0$ na U a u je nekonstantní na U, potom (27) *platí za dodatečné podmínky $u(x_0) \geq 0$.*

Důkaz. Může nastat právě jedna z následujících alternativ.

1) Existuje $x^1 \in U : u(x^1) = u(x^0)$. V takovém případě je u konstantní na U podle silného principu maxima.

2) Maxima $u(x^0)$ může být nabýváno jen na ∂U, tj. $u < u(x^0)$ na celém U. Dle Hopfova lemmatu potom $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x^0) > 0$. □

4.1 Jednoznačnost řešení eliptické rovnice

Buďte U otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$; Γ_1 a Γ_2 disjunktní podmnožiny ∂U takové, že $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial U$; α a g_1, g_2, f zatím blíže nespecifikované funkce definované postupně na Γ_1, Γ_2, U. Potom úlohu

$$Lv = f \quad \text{na } U \tag{28}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha v = g_1 \quad \text{na } \Gamma_1 \tag{29}$$

$$v = g_2 \quad \text{na } \Gamma_2 \tag{30}$$

pro neznámou funkci $v \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ budeme nazývat *eliptickou rovnicí se smíšenou hraniční podmínkou.*

Věta 4.20. *Buďte U omezená souvislá otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ taková, že podél Γ_1 lze do U vepsat kouli; a^{ij}, b^i, $c \in C(\bar{U})$; $c \geq 0$ a v_1, $v_2 \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ dvě řešení eliptického problému* (28)–(30). *Pokud $\alpha \geq 0$ na Γ_1, potom $v_1 = v_2$ na U vyjma případu, kdy současně $c = 0$, $\alpha = 0$ a $\Gamma_2 = \emptyset$, ve kterém je $v_1 - v_2$ konstantní.*

Důkaz. Funkce $u := v_1 - v_2$ splňuje

$$Lu = 0 \quad \text{na } U \tag{31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0 \quad \text{na } \Gamma_1 \tag{32}$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_2. \tag{33}$$

Předpokládejme nejprve, že u někde na U nabývá kladných hodnot. Potom u má kladné maximum, které musí být dle slabého principu maxima nabýváno na ∂U–konkrétněji vzhledem k (33) na Γ_1. Buď tedy $x^0 \in \Gamma_1 : \max_{\bar{U}} u = u(x^0) > 0$. Podle zesíleného Hopfova lemmatu buď $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) > 0$, anebo u je konstantní. První případ by značil, že levá strana (32) je v x^0 kladná. Nezbývá než, aby u bylo konstantní či dokonce v rozporu s prvotním předpokladem všude nekladné. V druhém případě použijeme stejné argumentace jako výše, tentokrát však pro $-u$. Nezbývá než, aby u bylo konstantní, $u = u_0 \in \mathbb{R}$ na U. Je-li $\Gamma_2 \neq \emptyset$, $u_0 = 0$. Je-li $\Gamma_2 = \emptyset$, potom na $\partial U = \Gamma_1$ platí $\alpha u_0 = 0$. Není-li α identicky nulové, $u_0 = 0$. V opačném případě dosadíme u do (31). Dostáváme tak $cu_0 = 0$. Jakmile c není nulové na celém U, $u_0 = 0$. □

Poznámka 4.21. *Podívejme se nyní na výjimečný případ, kdy $c = 0$, $\alpha = 0$ a $\Gamma_2 = \emptyset$. Problém* (31)–(33) *se redukuje na* Neumannův eliptický problém

$$Lu = 0 \quad \text{na } U$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial U.$$

Ten zjevně připouští libovolné konstantní řešení. V termínech spektrální analýzy je nenulová konstanta vlastní funkcí L s vlastním číslem 0, tj. L není prosté.

5 Sobolevovy prostory-setkání první

"Mistře, doslechne sob lvího řevu," zeptal se žák Musashiho. "Kam jsem jen založil své meče," pomyslel si Musashi.

(a) Sobolev Sergej

(b) sobolev obecný

Nebude-li upřesněno jinak, tak v rámci této sekce je U otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, α je n–rozměrný multiindex, $k \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \langle 1, +\infty)$.

Definice 5.1 (slabá derivace). *Buď $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Říkáme, že f má* slabou parciální derivaci *podle x^α právě tehdy, existuje-li $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ tak, že pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}(U)$*

$$\int_U f D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_U g\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Klademe $D^\alpha f = g$.

Poznámka 5.2. *Slabá derivace není nic jiného než speciální případ derivace na $\mathscr{D}'(U)$, tj. derivace ve smyslu distribucí, kdy jak f tak $D^\alpha f$ jsou regulární distribuce. Snadno nahlédneme, že jakožto prvek $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$, tj. až na množinu nulové míry, je $D^\alpha f$ určena jednoznačně.*

Poznámka 5.3. *Jelikož z Hölderovy nerovnosti přímo plyne, že $L^p_{\mathrm{loc}}(U) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(U)$, je slabá derivace dobře definována i na $L^p_{\mathrm{loc}}(U)$.*

Definice 5.4 (Sobolevův prostor). *Sobolevův prostor $W^{k,p}(U)$ je tvořen všemi třídami ekvivalence s.v. shodných funkcí z $L^p(U)$, jejichž všechny slabé derivace do řádu k včetně existují a rovněž leží v $L^p(U)$.*

Poznámka 5.5. *Povšimněme si, že slabá derivace nezávisí na volbě reprezentanta, ze kterého ji budeme počítat!*

Faktorizace je podobně jako na L^p–prostorech nutná kvůli tomu, aby zobrazení $u \in W^{k,p}(U) \mapsto \|u\|_{W^{k,p}(U)} \in \langle 0, +\infty)$ definované jako

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} & p \in \langle 1, +\infty) \\ \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_\infty & p = \infty \end{cases} \tag{34}$$

bylo normou, konkrétně aby $\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Ověřme dále, že $\|.\|_{W^{k,p}(U)}$ splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Pro $p \in \mathbb{N}$ použijeme postupně trojúhelníkovou (Minkowského) nerovnost na L^p a na l^p,

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} \le \left(\sum_{|\alpha|\le k} (\|D^\alpha u\|_p + \|D^\alpha v\|_p)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha v\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}.\end{aligned}$$

Pro $p = \infty$ je odhad ještě přímočařejší.

Následující tvrzení a příklad ukazují, že existence slabých derivací nemusí zdaleka implikovat spojitost.

Tvrzení 5.6. *Buď $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ a $f \in C^1(U \setminus \{a\})$ taková, že f, $\{\nabla f\} \in L^p(U)$, kde složené závorky označují regulární část dané funkce*[2]*. Pokud navíc*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{n-1} \sup_{x\in S^{n-1}} |f(a+\varepsilon x)| = 0, \tag{35}$$

potom slabá derivace funkce f splývá s $\{\nabla f\}$. Zejména platí $f \in W^{1,p}(U)$.

Důkaz. Buď $i \in \hat{n}$. Pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ máme

$$\int_U f\partial_i\varphi \,\mathrm{d}x = \int_M f\partial_i\varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_M \chi_{M\setminus B(a,\varepsilon)} f\partial_i\varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{M\setminus B(a,\varepsilon)} f\partial_i\varphi \,\mathrm{d}x,$$

kde jsme položili $M := \operatorname{supp}\varphi$. V druhé rovnosti jsme použili Lebesgueovu větu s integrabilní majorantou $\sup_M |\partial_i\varphi||f| \in L^1(M)$. Pro $a \in M^O$ a všechna ε dost malá integrací per-partes dále dostáváme

$$\int_{M\setminus B(a,\varepsilon)} f\partial_i\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial M} f\varphi\nu_i \,\mathrm{d}S + \int_{\partial B(a,\varepsilon)} f\varphi\nu_i \,\mathrm{d}S - \int_{M\setminus B(a,\varepsilon)} \partial_i f\varphi \,\mathrm{d}x, \tag{36}$$

kde ν_i značí i-tou komponentu vnější normály k $\partial(M \setminus B(a,\varepsilon))$. Pokud $a \notin M$, potom se pro všechna ε dost malá na pravé straně (36) neobjeví druhý integrál. Pokud $a \in \partial M$, tak místo množiny M budeme uvažovat množinu $M \cup B(a,\delta)$, kde $\delta > 0$ volíme tak, aby $\overline{B(a,\delta)} \subset U$. S drobným zneuctěním notace ji budeme opět značit jako M.

Jelikož $\varphi \equiv 0$ na ∂M, $\int_{\partial M} f\varphi\nu_i \,\mathrm{d}S = 0$. Dále pomocí Lebesgueovy věty s integrabilní majorantou $\sup_M |\varphi||\{\partial_i f\}| \in L^1(M)$ nahlédneme, že

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{M\setminus B(a,\varepsilon)} \partial_i f\varphi \,\mathrm{d}x = \int_M \{\partial_i f\}\varphi \,\mathrm{d}x.$$

[2] tj., $\forall x \neq a : \{\nabla f\}(x) = \nabla f(x)$ a v $x = a$ funkci dodefinujeme libovolně

Konečně díky (35) máme

$$\Big|\int_{\partial B(a,\varepsilon)} f\varphi\nu_i \,\mathrm{d}S\Big| \leq \sup_M |\varphi| \sup_{x\in S^{n-1}} |f(a+\varepsilon x)||S^{n-1}|\varepsilon^{n-1} \to 0$$

pro $\varepsilon \to 0$. Limitním přechodem v (36) tak dostáváme

$$\int_U f\partial_i\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_M \{\partial_i f\}\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_U \{\partial_i f\}\varphi \,\mathrm{d}x,$$

což znamená, že $\partial_i f = \{\partial_i f\}$. $\square$

Poznámka 5.7. *Podmínky v tvrzení výše a zejména* (35) *jsou navrženy tak, aby vedly ke snadnému důkazu. Pro porovnání-optimální podmínky proto, aby funkce ležela v* $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *popisuje [3, Theorem 4.21].*

Příklad 5.1. *Položme* $U = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ *a* $u(x) = |x|^{-\alpha}$ $(x \neq 0)$, *kde* $\alpha > 0$. *Pro* $x \neq 0$,

$$u_{,x_i} = -\frac{\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}}, \quad |\nabla u| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Je-li $\alpha < n-1$, *potom platí růstová podmínka* (35) *v Tvrzení 5.6. Dále ve sférických souřadnicích spočteme*

$$\|u\|_p^p = |S^{n-1}| \int_0^1 r^{n-1-p\alpha} \,\mathrm{d}r, \quad \|\{\nabla u\}\|_p^p = |\alpha|^p |S^{n-1}| \int_0^1 r^{n-1-p(\alpha+1)} \,\mathrm{d}r.$$

Odtud vidíme, že $u \in W^{1,p}(U) \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p} - 1$. *Pokud současně* $n > p$, *zkonstruovali jsme prvek* $W^{1,p}(U)$, *který má v* $x = 0$ *singularitu! Podotkněme, že pro* $n = 1$, *nemůže být tato podmínka splněna. Později si ukážeme, že všechny prvky* $W^{1,p}(J)$, *kde* J *je jednorozměrný interval, jsou (dokonce absolutně) spojité.*

Pokud nyní vezmeme za $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ *hustou podmnožinu v* U, *potom pro* n, p *a* α *takové, že* $0 < \alpha < \frac{n}{p} - 1$, *leží následující funkce, která je dána řadou konvergentní v* $L^p(U)$,

$$v(x) := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} |x - x^k|^{-\alpha} \quad (x \neq x^k)$$

ve $W^{1,p}(U)$, *protože řada na pravé straně konverguje v úplném prostoru* $W^{1,p}(U)$ *(viz Věta 5.11), a současně má v libovolném okolí svého libovolného bodu singularitu!*

Tvrzení 5.8 (vlastnosti slabé derivace)**.** *Buď* $u \in W^{k,p}(U)$ *a* $\alpha : |\alpha| \leq k$. *Potom*

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ *a pro libovolné* $\beta : |\alpha| + |\beta| \leq k$ *platí* $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ *(slabé derivace jsou tedy záměnné),*

2. *pro libovolnou otevřenou* $V : V \subset U$ *platí* $u \in W^{k,p}(V)$,

3. *(Leibnizovo pravidlo) pro libovolné* $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ *platí* $\varphi u \in W^{k,p}(U)$ *a*

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} u,$$

kde $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

Důkaz. Viz Úloha 6. □

Definice 5.9 (Sobolevův prostor $W_0^{k,p}(U)$)**.** *Prostorem $W_0^{k,p}(U)$ rozumíme uzávěr $\mathscr{D}(U)$ na $W^{k,p}(U)$.*

O prvcích $W_0^{k,p}(U)$ lze smýšlet jako těch prvcích $W^{k,p}(U)$, které na ∂U vymizí včetně všech svých derivací až do řádu $(k-1)$ včetně. Zúžení prvků $W^{k,p}(U)$ na hranici ale nemáme zatím smysluplně definováno! Dobrý význam mu dáme později v sekci 5.2.

Definice 5.10 (Sobolevův prostor $H^k(U)$)**.** *Klademe $H^k(U) := W^{k,2}(U)$ a pro libovolné $u, v \in H^k(U)$ definujeme skalární součin*

$$\langle u, v\rangle_{H^k(U)} := \sum_{|\alpha|\le k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(U)}.$$

Skalární součin na $H^k(U)$ generuje právě normu $\|.\|_{W^{k,2}(U)}$. Na základě následující věty je $H^k(U)$ Hilbertův.

Věta 5.11 (úplnost Sobolevových prostorů)**.** *Sobolevovy prostory $W^{k,p}(U)$ i $W_0^{k,p}(U)$ jsou úplné.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $W_0^{k,p}(U)$ je uzavřený podprostor $W^{k,p}(U)$, stačí dokázat úplnost druhého jmenovaného. Buď tedy (u_m) cauchyovská posloupnost v $W^{k,p}(U)$. Potom $(D^\alpha u_m)$ je cauchyovská v $L^p(U)$ pro všechna $\alpha : |\alpha| \le k$. Existuje tedy $\lim_{m\to\infty} D^\alpha u_m =: u_\alpha \in L^p(U)$. Zejména $\lim_{m\to\infty} u_m = u_{(0,\dots,0)} =: u$. Stačí ukázat, že $u \in W^{k,p}(U)$ a $D^\alpha u = u_\alpha$. Pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ ale platí

$$\int_U u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_U u_m D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_m \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Odtud skutečně $D^\alpha u = u_\alpha$.

V limitních přechodech jsme vyšli z následující úvahy-nechť $\lim_{m\to\infty} v_m = 0$ na $L^p(U)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(U)$, potom dle Hölderovy nerovnosti

$$\left|\int_U v_m \varphi \,\mathrm{d}x\right| \le \left(\int_U |v_m|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_U |\varphi|^{\frac{p}{p-1}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(pro $p = \infty$ odhadujeme supremovými normami). □

Věta 5.12 (separabilita a reflexivita Sobolevových prostorů)**.** *Pro $p \in \langle 1, +\infty)$ jsou $W^{k,p}(U)$ i $W_0^{k,p}(U)$ separabilní. Pro $p \in (1, +\infty)$ jsou $W^{k,p}(U)$ i $W_0^{k,p}(U)$ reflexivní.*

Důkaz. Buď N počet navzájem různých multiindexů $\alpha : |\alpha| \le k$. Na prostoru $\mathscr{X} := \bigoplus_{i=1}^N L^p(U)$ budeme uvažovat normu

$$\|(f_1, \dots, f_N)\|_{p'} = \left(\sum_{i=1}^N \|f_i\|_p^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

kde $p' \in \langle 1, +\infty)$ je zatím libovolné. Konečný (dokonce spočetně nekonečný) direktní součet separabilních prostorů s libovolnou výše uvedenou normou je separabilní. Jelikož pro $p \in \langle 1, +\infty)$ je $L^p(U)$ separabilní, je i $\mathscr{X}$ separabilní. Podrobnější analýza odhaluje, že $\mathscr{X}$ je navíc reflexivní pro $p, p' \in (1, +\infty)$-viz Úloha 7.

Dále zafixujme $p' = p$ a definujme zobrazení $\iota : W^{k,p}(U) \to \mathscr{X}$, $u \mapsto (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}$. Jedná se zjevně o isometrii $W^{k,p}(U)$ na $\iota(W^{k,p}(U)) \subset \mathscr{X}$. Libovolný podprostor separabilního metrického prostoru je separabilní. Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní [1, Věta 3.3.9]. Nyní si stačí uvědomit, že isometrie zachovává uzavřenost, separabilitu i reflexivitu. Separabilita a reflexivita prostoru $W_0^{k,p}(U)$ plyne z toho, že $W_0^{k,p}(U)$ je uzavřeným podprostorem $W^{k,p}(U)$. □

5.1 Aproximace hladkými funkcemi

V celé této sekci předpokládáme $p \in \langle 1, +\infty)$.

Definice 5.13. *Buďte V, U otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Říkáme, že V je* kompaktně obsažena *v U právě tehdy, pokud $V \subset \bar{V} \subset U$ a $\bar{V}$ je kompaktní*[3]*. Píšeme $V \subset\subset U$.*

Poznámka 5.14. *Je-li $V \subset\subset U$, potom v U leží celé nějaké ε–okolí množiny V. (Obecně ε–okolím množiny V v metrickém prostoru rozumíme množinu $V^\varepsilon := \bigcup_{x \in V} B(x, \varepsilon)$.) Předpokládejme opak. Potom pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in V$ tak, že $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U$. Vzhledem ke kompaktnosti $\bar{V}$ lze z (x_n) vybrat konvergentní podposloupnost (x_{k_n}). Označme její limitu $x \in \bar{V} \subset U$. Jelikož U je otevřená, existuje $\delta > 0$ tak, že $B(x, \delta) \subset U$. Od jistého indexu n_δ výše ale platí $B(x_{k_n}, \frac{1}{k_n}) \subset B(x, \delta) \subset U$, což je spor.*

Lemma 5.15. *Buď $f \in L^p(W)$ a $V \subset\subset W$. Potom pro všechna dostatečně malá ε platí $\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}$.*

Důkaz. Uvažujme $\varepsilon < \varepsilon_0$, kde ε_0 je tak malé, že ε_0–okolí množiny V leží v W. Takové ε_0 podle Poznámky 5.14 existuje. S pomocí Hölderovy nerovnosti pro libovolné $x \in V$ odvodíme

$$|f^\varepsilon(x)| = \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y \right| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)^{\frac{p-1}{p}} \eta_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{p}} |f(y)| \, \mathrm{d}y \leq$$
$$\left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |f(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |f(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Odtud potom

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon\|_{L^p(V)}^p &= \int_V |f^\varepsilon(x)|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_V \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |f(y)|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &\leq \int_W |f(y)|^p \int_{B(y,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_W |f(y)|^p \, \mathrm{d}y = \|f\|_{L^p(W)}^p. \end{aligned}$$

Ve druhém odhadu jsme zaměnili pořadí integrace a současně zvětšili integrační oblast. □

[3] Požadavek kompaktnosti $\bar{V}$ je v tomto případě ekvivalentní omezenosti V.

Lemma 5.16. *Buď $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(U)$, potom $\lim_{\varepsilon\to0} f^\varepsilon (= \lim_{\varepsilon\to0} \eta_\varepsilon * f) = f$ v $L^p_{\mathrm{loc}}(U)$.*

Důkaz. Buď f nejprve navíc spojitá na U, potom f je stejnoměrně spojitá na libovolné $V \subset\subset U$. Zafixujme nějaké takové V. Pro libovolné $\delta > 0$ tedy existuje $\tilde\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $x \in V$ a $\varepsilon < \tilde\varepsilon$ platí

$$\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(x) - f(y)| \,\mathrm{d}y < \fint_{B(x,\varepsilon)} \delta \,\mathrm{d}y = \delta,$$

tj. $\lim_{\varepsilon\to0} \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(x) - f(y)| \,\mathrm{d}y = 0$ stejnoměrně na V. Zřejmě $\tilde\varepsilon$ musí být nutně tak malé, aby $\tilde\varepsilon$–okolí množiny V, které je rovněž prekompaktní, leželo v U. Z odhadu (stále pro $\varepsilon < \tilde\varepsilon$)

$$|f^\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) (f(y) - f(x)) \,\mathrm{d}y \right| \le C \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}y \le C\delta$$

dostáváme, že $f^\varepsilon \to f$ stejnoměrně na V a tudíž vzhledem k omezenosti V

$$\|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \le C\delta.$$

Hodnota konstanty C závisí pouze na volbě p a V.

Vezměme nyní libovolné $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(U)$ a nějaké W s vlastností $V \subset\subset W \subset\subset U$. Jelikož $\mathscr{D}(W)$ je hustý v $L^p(W)$, pro libovolné $\tilde\delta > 0$ existuje $g \in \mathscr{D}(W) \subset C(W)$ tak, že $\|f - g\|_{L^p(W)} < \tilde\delta$. S využitím prvního kroku důkazu (kde za f uvažujeme právě g a U zaměníme za W) a Lemmatu 5.15 tak pro všechna dostatečně malá ε odhadneme

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &\le \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\le 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \le 2\tilde\delta + C\delta, \end{aligned}$$

kde v limitě $\varepsilon \to 0$ lze δ volit libovolně malé. □

Poznámka 5.17. *Lemma nemůže platit pro $p = +\infty$, neboť konvergence spojitých funkcí v $L^\infty_{\mathrm{loc}}(U)$–normě je konvergence stejnoměrná na libovolném kompaktu v U. Stejnoměrná limita posloupnosti spojitých funkcí je ale nutně spojitá.*

Definice 5.18 (lokální Sobolevův prostor a lokální konvergence)**.** *Řekneme, že u leží v* lokálním Sobolevově prostoru *$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(U)$ právě tehdy, pokud $u \in W^{k,p}(V)$ pro libovolnou $V : V \subset\subset U$.*

Posloupnost $(u_m) \subset W^{k,p}(U)$ konverguje *k $u \in W^{k,p}(U)$* v *$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(U)$ (*konverguje lokálně*) právě tehdy, pokud $\lim_{m\to\infty} u_m = u$ v $W^{k,p}(V)$ pro libovolnou $V : V \subset\subset U$.*

Věta 5.19 (lokální aproximace hladkými funkcemi)**.** *Buď $u \in W^{k,p}(U)$. Na U_ε položme $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$. Potom*

1. *$u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ pro každé $\varepsilon > 0$,*
2. *$u^\varepsilon \to u$ ve $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(U)$ pro $\varepsilon \to 0$.*

Důkaz. První tvrzení jsme již dokázali v Úloze 1.

V důkazu druhého tvrzení uvažujme $\alpha : |\alpha| \leq k$ a $x \in U_\varepsilon$. Podle Úlohy 1 pro libovolné $x \in U_\varepsilon$ platí

$$(D^\alpha u^\varepsilon)(x) = D^\alpha \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y = \int_U D^\alpha_x \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha_y \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Funkce $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ leží v $\mathscr{D}(U)$. Podle definice slabé derivace tak odvodíme

$$(D^\alpha u^\varepsilon)(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)\,\mathrm{d}y = (D^\alpha u)^\varepsilon(x).$$

Nyní pro libovolné $V \subset\subset U$ z Lemmatu 5.16 plyne

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D^\alpha u^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}(D^\alpha u)^\varepsilon = D^\alpha u \quad \text{v } L^p(V),$$

což znamená, že $u^\varepsilon \to u$ v $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(U)$ pro $\varepsilon \to 0$. □

Důsledek 5.20. *Pro libovolné $p \in \langle 1, +\infty)$, $W^{k,p}_0(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Důkaz. Zřejmě $W^{k,p}_0(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Uvažujme tedy obráceně $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Pro libovolné $r > 0$ existuje $\zeta_r \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tak, že

$$\zeta_r = \begin{cases} 1 & \text{na } B(0,r) \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \setminus B(0,r+1) \end{cases}$$

a $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$, $\forall r > 0 : \|D^\alpha \zeta_r\|_\infty < C$. (Rozmyslete si, že C lze s vhodnou volbou ζ_r skutečně volit nezávislé na r-viz Úloha 8.) Podle Tvrzení 5.8 $\zeta_r u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Navíc $\operatorname{supp} \zeta_r u \subset B(0,r+1)$ a pro libovolné $\delta > 0$ platí $\|\zeta_r u - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta/2$, jakmile r volíme dost velké–opět viz Úloha 8. Vezměme nějaké takové r a uvažujme vyhlazení $(\zeta_r u)^\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, kde ε volíme tak malé, aby $\|(\zeta_r u)^\varepsilon - \zeta_r u\|_{W^{k,p}(B(0,r+1+\varepsilon))} = \|(\zeta_r u)^\varepsilon - \zeta_r u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta/2$. Existence takového ε je zaručena Větou 5.19. Z trojúhelníkové nerovnosti konečně dostáváme, že $\|u - (\zeta_r u)_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta$ pro libovolné předem zvolené δ. □

Definice 5.21 (hvězdicovitá oblast)**.** *Otevřená podmnožina $U \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá* hvězdicovitá oblast *právě tehdy, když existuje bod $x^0 \in U$ takový, že pro všechna $x \in U : x \neq x^0$ je průnik*

$$\{x^0 + t(x - x^0) : t \in (0, +\infty)\} \cap \partial U$$

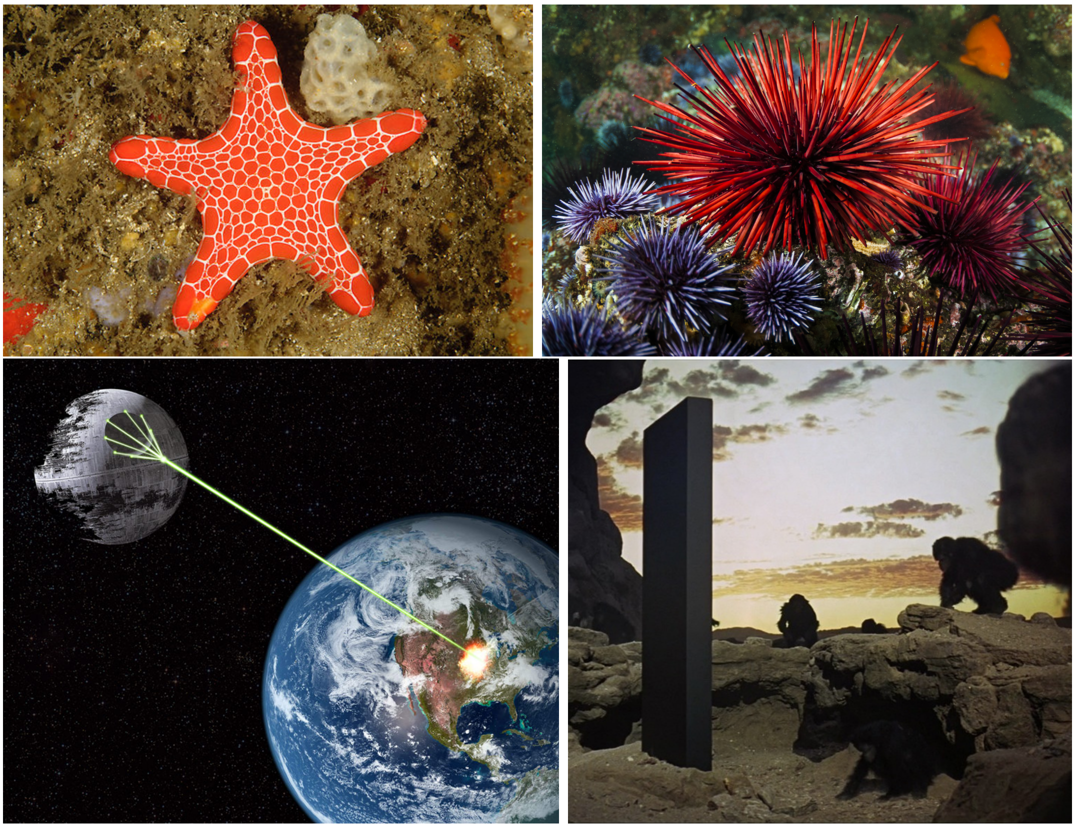
jednoprvková množina.

Poznámka 5.22. *Pro libovolné x z hvězdicovité oblasti platí, že spojnice x s x^0 leží celá v U. Odtud se snadno ukáže, že hvězdicovitá oblast je křivkově souvislá-tudíž je i souvislá a právem ji nazýváme oblastí.* [4]

Předpokládáme-li navíc, že hranice U je spojitá (tzn. je lokálně dána grafem spojité funkce), potom U je nutně omezená. To je důsledkem spojitosti funkce $S^{n-1} \to (0, +\infty)$,

$$\alpha \mapsto \operatorname{dist}(x^0, \{x^0 + t\alpha : t \in (0, +\infty)\} \cap \partial U).$$

[4] Oblastí myslíme otevřenou souvislou množinu.

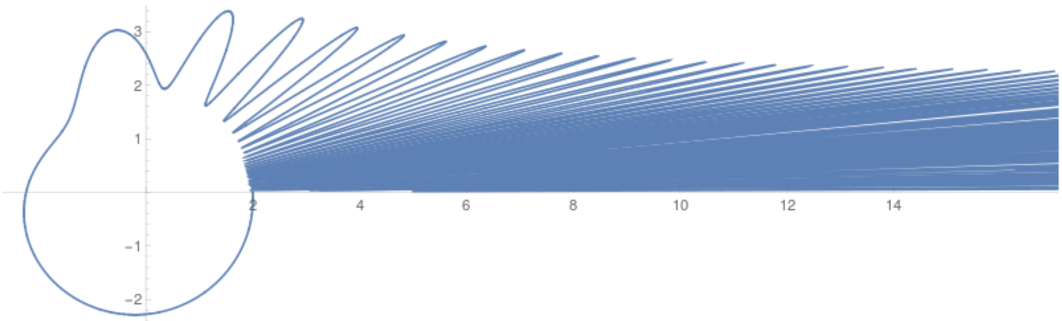


Obrázek 2: příklady hvězdicovitých oblastí

Obecně ale U *může být i neomezená! Uvažujme například*

$$U := \left\{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \le r < 2 - \frac{\varphi}{4\pi^2} + \frac{1 - \sin\frac{2\pi^2}{\varphi}}{\varphi}, \; 0 < \varphi \le 2\pi \right\},$$

viz Obrázek 3. U *je otevřená a bod* $(2,0)$ *leží na* ∂U*, tudíž s volbou* $x^0 = (0,0)$ *je* U *hvězdicovitá. Povšimněme si, že* ∂U *je v* $(2,0)$ *nespojitá.*



Obrázek 3: známka punku-příklad neomezené hvězdicovité oblasti

Věta 5.23 (aproximace hladkými funkcemi až k hranici pro omezené hvězdicovité oblasti)**.** *Buď* U *omezená hvězdicovitá oblast. Potom podprostor* $C^\infty(\bar{U})$ *je hustý ve* $W^{k,p}(U)$*.*

Důkaz. Buď $x^0 \in U$ z definice hvězdicovité oblasti. Souřadný systém volme tak, aby $x^0 = 0$.

1. Pro $\tau > 0$ položme $U^\tau := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \tau x \in U\}$, zřejmě tedy $U^1 = U$ a $\tau_1 < \tau_2 \Rightarrow U^{\tau_2} \subset U^{\tau_1}$. Dále pro $\forall x \in U^\tau$ definujeme

$$u_\tau(x) := u(\tau x).$$

Pro $\tau \in (0, 1\rangle$ můžeme provést odhad

$$\int_U |u_\tau(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{U^{\tau^{-1}}} \frac{1}{\tau^n} |u(y)|^p \,\mathrm{d}y \leq \frac{1}{\tau^n} \int_U |u(y)|^p \,\mathrm{d}y,$$

z čehož již plyne, že pro $\forall \tau \in \langle \widetilde{\tau}, 1\rangle$, kde $\widetilde{\tau} \in (0, 1\rangle$, lze provést odhad

$$\|u_\tau\|_p \leq \frac{1}{\widetilde{\tau}^{\frac{n}{p}}} \|u\|_p. \tag{37}$$

2. Uvažujme dále pouze $\tau \in (0, 1\rangle$. Pro testovací funkci $v \in \mathscr{D}(U)$ opět položme

$$v_\tau(x) := v(\tau x), \quad (\forall x \in U^\tau).$$

Ze stejnoměrné spojitosti v na omezené množině U plyne, že pro každé pevně zvolené $\delta > 0$ existuje τ_δ tak, že pro $\forall \tau \in (\tau_\delta, 1\rangle$

$$\|v - v_\tau\|_p^p = \int_U |v(x) - v(\tau x)|^p \,\mathrm{d}x < \delta\, |U|\,. \tag{38}$$

3. Volme libovolné pevné $u \in W^{k,p}(U)$. Ukážeme, že funkce u_τ konverguje k u v $W^{k,p}(U)$.

(a) Jelikož $\mathscr{D}(U)$ je hustá v $L^p(U)$, existuje cauchyovská posloupnost $(u_m)_{m=1}^\infty \subset \mathscr{D}(U)$ taková, že $\lim_{m\to+\infty} u_m = u$ v $L^p(U)$. Volme libovolné kladné $\delta^{(0)}$ a k němu libovolné pevné $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\|u - u_m\|_p < \frac{\delta^{(0)}}{4}.$$

Z 2. bodu plyne, že nalezneme $\tau^{(0)} \in (0, 1)$ takové, že $\forall \tau \in \left\langle \tau^{(0)}, 1\right\rangle$

$$\|u_m - (u_m)_\tau\|_p < \frac{\delta^{(0)}}{4}.$$

Dále z 1. bodu plyne

$$\|(u_m)_\tau - u_\tau\|_p = \|(u_m - u)_\tau\|_p \leq \frac{1}{\left(\tau^{(0)}\right)^{\frac{n}{p}}} \|u_m - u\|_p.$$

Omezíme-li se navíc s τ na interval $\langle \widetilde{\tau}^{(0)}, 1\rangle$, kde $\widetilde{\tau}^{(0)} \in \langle \tau^{(0)}, 1)$ je takové, že $\frac{1}{\left(\widetilde{\tau}^{(0)}\right)^{\frac{n}{p}}} \leq 2$, dostaneme

$$\|(u_m)_\tau - u_\tau\|_p < \frac{\delta^{(0)}}{2}.$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti tak odvodíme, že

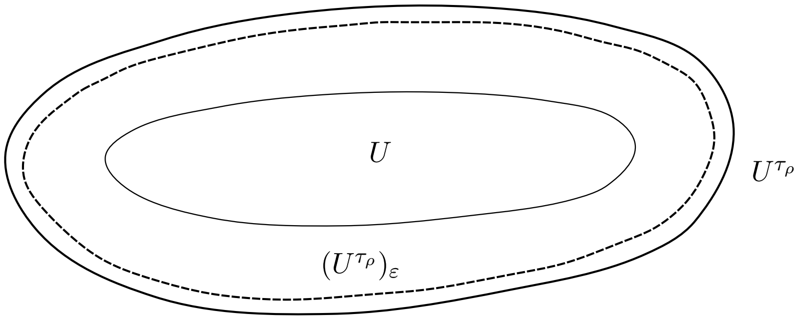
$$\|u - u_\tau\|_p \leq \|u - u_m\|_p + \|u_m - (u_m)_\tau\|_p + \|(u_m)_\tau - u_\tau\|_p < \delta^{(0)} \tag{39}$$

pro libovolné $\tau \in \langle \widetilde{\tau}^{(0)}, 1\rangle$. Funkce u_τ tedy konverguje k funkci u v $L^p(U)$.

(b) Pro konvergenci v $W^{k,p}(U)$ je třeba ukázat L^p– konvergenci pro všechny derivace až do stupně k. Volme libovolné pevné $\alpha : |\alpha| \leq k$. Protože $D^\alpha u \in L^p(U)$, existuje posloupnost $(u_m^{(\alpha)}) \subset \mathscr{D}(U)$ taková, že $\lim_{m\to+\infty} u_m^{(\alpha)} = D^\alpha u$ v $L^p(U)$.
Dále platí
$$D^\alpha u_\tau(x) = \tau^{|\alpha|} \left(D^\alpha u\right)_\tau (x).$$
Obdobnými odhady jako v případě (a) pro pevně zvolené $\delta^{(\alpha)}$ nalezneme $\widetilde{\tau}^{(\alpha)} \in (0,1)$ tak, že pro $\forall \tau \in \langle \widetilde{\tau}^{(\alpha)}, 1\rangle$
$$\begin{aligned}\|D^\alpha u - D^\alpha u_\tau\|_p &\leq \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_\tau\|_p + (1-\tau^{|\alpha|})\|(D^\alpha u)_\tau\|_p \\ &\leq \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_\tau\|_p + 2(1-\tau^{|\alpha|})\|D^\alpha u\|_p < \delta^{(\alpha)}.\end{aligned}$$
Zde jsme v druhém odhadu použili (37).

Celkem pro libovolné $\rho > 0$ nalezneme $\tau_\rho \in (0,1)$ tak, že pro $\forall \tau \in \langle \tau_\rho, 1\rangle$ platí
$$\|u - u_\tau\|_{W^{k,p}(U)} < \frac{\rho}{2}. \tag{40}$$

4. Volme pevné $\rho > 0$ a najděme k němu $\tau_\rho \in (0,1)$ tak, aby platilo (40). Zřejmě $u_{\tau_\rho} \in W^{k,p}(U^{\tau_\rho})$ a $U \subset\subset U^{\tau_\rho}$. Podle věty o lokální aproximaci $(u_{\tau_\rho})^\varepsilon \in C^\infty((U^{\tau_\rho})_\varepsilon)$ a $\lim_{\varepsilon\to 0^+} (u_{\tau_\rho})^\varepsilon = u_{\tau_\rho}$ na $W^{k,p}_{loc}(U^{\tau_\rho})$.



Obrázek 4: roztažení oblasti přes hranici

Pro všechna dostatečně malá ε je $\bar{U} \subset \left(U^{\tau_\rho}\right)_\varepsilon$, viz Obrázek 4. Proto existuje $\left(u_{\tau_\rho}\right)^{\varepsilon_\rho} \in C^\infty(\bar{U})$ takové, že $\|(u_{\tau_\rho})^{\varepsilon_\rho} - u_{\tau_\rho}\|_{W^{k,p}(U)} < \frac{\rho}{2}$.

5. Celkem tedy máme odhad
$$\|u - (u_{\tau_\rho})^{\varepsilon_\rho}\|_{W^{k,p}(U)} \leq \|u - u_{\tau_\rho}\|_{W^{k,p}(U)} + \|u_{\tau_\rho} - (u_{\tau_\rho})^{\varepsilon_\rho}\|_{W^{k,p}(U)} < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}.$$
□

Věta 5.24 (aproximace hladkými funkcemi až k hranici pro omezené oblasti s C^1–hranicí)**.** *Buď U omezená oblast s C^1–hranicí. Potom podprostor $C^\infty(\bar{U})$ je hustý ve ve $W^{k,p}(U)$.*

Důkaz. Úplný důkaz lze nalézt například v [2]. Zde si jej pouze naznačíme. Nejprve lokálně narovnáme část hranice-viz začátek sekce 5.2. V dalším kroce vhodným škálováním přetáhneme aproximovanou funkci přes tuto část hranice. Dále postupujeme podobně jako v případě hvězdicovité oblasti. Nakonec lokální výsledek převedeme na globální pomocí rozkladu jednotky. □

5.2 Zúžení na hranici-věta o stopě

Definice 5.25. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená. Říkáme, že U má C^k*–hladkou hranici *($k \geq 0$) právě tehdy, pokud pro libovolné $x^0 \in \partial U$ existuje $r > 0$ a $\gamma \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$ tak, že po vhodném přeznačení či změně orientace souřadných os platí*

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) : \, x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

V případě, že U má C^k–hladkou hranici, je snadné najít lokální transformaci souřadnic, která hranici převede na rovinnou. S notací zavedenou v definici výše stačí položit

$$\begin{aligned} y_i &= x_i =: \Phi^i(x) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1, \\ y_n &= x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) =: \Phi^n(x). \end{aligned} \tag{41}$$

Celkem budeme psát $y = \Phi(x)$. Přímým výpočtem ověříme, že $\det \frac{\partial(\Phi^1, \dots, \Phi^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} = 1$. Inverzní transformaci označíme $\Psi \equiv \Phi^{-1}$. Opět platí $\det \frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}y} \equiv \det \frac{\partial(\Psi^1, \dots, \Psi^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} = 1$.

Věta 5.26 (věta o stopě)**.** *Buď U omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ s C^1–hladkou hranicí a $p \in \langle 1, +\infty)$. Potom existuje $T \in \mathscr{B}(W^{1,p}(U), L^p(\partial U))$ tak, že $Tu = u|_{\partial U}$ pro všechna $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$.*

Důkaz. Důkaz provedeme v několika krocích.

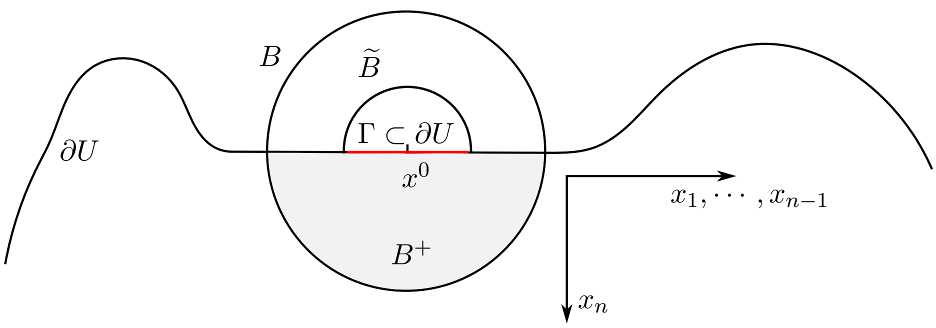
1. Nejprve se omezíme na případ, kdy $u \in W^{1,p}(U) \cap C^1(\bar{U})$ a ∂U je rovinná na okolí nějakého $x^0 \in \partial U$. Souřadný systém volíme tak, že podél této rovinné části hranice $x_n = 0$ a x_n je orientována směrem dovnitř U. Lze nalézti $r > 0$ tak, že koule $B := B(x^0, r)$ z celé hranice obsahuje pouze rovinnou část. Potom zavedeme

$$B^+ := B \cap \{x_n > 0\} \subset U.$$

Označme dále

$$\tilde{B} := B\left(x^0, \frac{r}{2}\right), \quad \Gamma := \tilde{B} \cap \partial U$$

(viz Obrázek 5) a vyberme $\zeta \in \mathscr{D}(B) : \; \zeta \geq 0$ na B, $\zeta = 1$ na $\tilde{B}$. Položme $\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$.



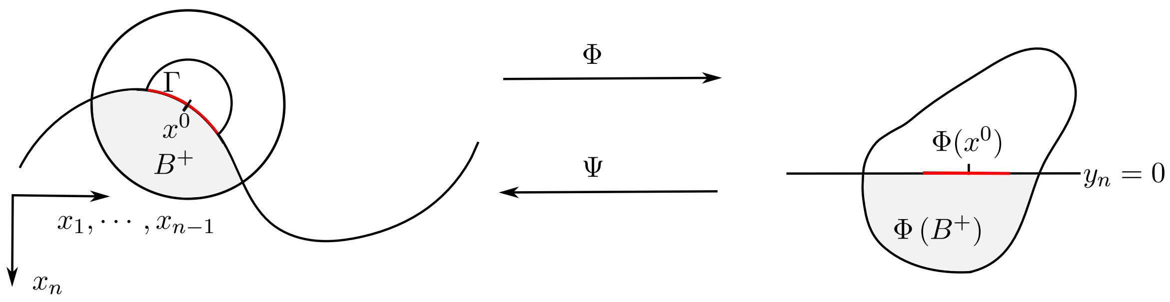
Obrázek 5: rovinná část hranice

Pomocí integrace per-partes odvodíme

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma} |u|^p \, \mathrm{d}\tilde{x} \; &\leq \int\limits_{\{x_n=0\}} \zeta |u|^p \, \mathrm{d}\tilde{x} = \int\limits_{\partial B^+} \zeta |u|^p (-\nu_n) \, \mathrm{d}\tilde{x} \\
&= -\int\limits_{B^+} (\zeta \, |u|^p)_{,x_n} \, \mathrm{d}x = -\int\limits_{B^+} \big(\zeta_{,x_n} |u|^p + \zeta p |u|^{p-1} u_{,x_n} \operatorname{sgn} u\big) \, \mathrm{d}x \\
&\leq \; C \int\limits_{B^+} \big(|u|^p + |u|^{p-1} |\nabla u|\big) \, \mathrm{d}x \leq C \int\limits_{U} (|u|^p + |\nabla u|^p) \, \mathrm{d}x = C \, \|u\|^p_{W^{1,p}(U)},
\end{aligned}
$$

kde ν_n je n-tá komponenta vnější normály k hranici B^+. Ve třetím odhadu jsme na druhý člen použili Youngovu nerovnost a nakonec zvětšili integrační oblast.

2. Předpokládejme, že ∂U není rovinná na okolí bodu x^0. Poté pomocí zobrazení (41), lze ∂U na okolí x^0 narovnat, viz Obrázek 6.



Obrázek 6: vyhlazení hranice

Se značením $\tilde{y} := (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ platí pro *plošný element* na Γ vztah $\mathrm{d}S(x) = \sqrt{|\det G|}\, \mathrm{d}\tilde{y}$, kde metrický tenzor G napočteme jako Gramovu matici tečných vektorů, tj.

$$
G = \Big(\Big\langle \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y_i}, \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y_j} \Big\rangle\Big)_{i,j=1}^{n-1}.
$$

Zde $\tilde{\Psi}$ značí zúžení Ψ na $\{y \in \Phi(B) : \; y_n = 0\}$, tj. parametrizaci nadplochy Γ. Jelikož pro $j = 1, 2, \ldots, n-1$ platí

$$
\frac{\partial \Psi^i}{\partial y_j} = \begin{cases} \delta^{ij} & \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y_j} & \text{pro } i = n, \end{cases}
$$

protože Ψ, tj. inverzní zobrazení k vyhlazení Φ, je tvaru

$$
\begin{aligned}
\Psi^i(y) &= y_i \quad \text{pro } i = 1, \ldots, n-1 \\
\Psi^n(y) &= y_n + \gamma(y_1, \ldots, y_{n-1}),
\end{aligned}
\tag{42}
$$

a $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, jsou maticové prvky G omezené na $\Phi(\Gamma)$. Dostáváme tedy

$$
\int\limits_{\Gamma} |u(x)|^p \; \mathrm{dS}(x) = \int\limits_{\Phi(\Gamma)} |u\,(\Psi(y))|^p \sqrt{|\det G|}\, \mathrm{d}\tilde{y} \leq C \int\limits_{\Phi(\Gamma)} |u\,(\Psi(y))|^p \; \mathrm{d}\tilde{y}.
$$

S využitím postupu z 1. bodu dále odhadneme

$$\int\limits_{\Phi(\Gamma)} |u(\Psi(y))|^p \, \mathrm{d}\tilde{y} \leq C \int\limits_{\Phi(B^+)} |u(\Psi(y))|^p + |\nabla_y (u \circ \Psi)(y)|^p \, \mathrm{d}y.$$

Díky (42) lze i–tou složku gradientu v posledním integrálu odhadnout jako

$$|(u \circ \Psi)_{,y_i}(y)| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(\Psi(y)) \frac{\partial \Psi^j}{\partial y_i}(y) \right| \leq C |\nabla u(\Psi(y))|.$$

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma} |u(x)|^p \, \mathrm{dS}(x) \leq C \int\limits_{\Phi(B^+)} & |u(\Psi(y))|^p + |\nabla u(\Psi(y))|^p \, \mathrm{d}y \\ &= C \int\limits_{B^+} |u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p \, \mathrm{d}x \leq C \|u\|^p_{W^{1,p}(U)}. \end{aligned} \tag{43}$$

3. Nyní celou ∂U rozdělíme na dílčí části Γ_i, $i \in I$, na kterých lze provést odhady dle 2. bodu. Dále platí, že z I lze vybrat konečnou podmnožinu tak, že $\partial U = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$. To plyne z kompaktnosti ∂U v topologii $\mathbb{R}^n$, viz Lemma 4.14. Z (43) tak ihned dostáváme

$$\int\limits_{\partial U} |u|^p \, \mathrm{dS} \leq C \|u\|^p_{W^{1,p}(U)}. \tag{44}$$

4. Definujme zobrazení $\widetilde{T} : W^{1,p}(U) \cap C^1(\bar{U}) \to L^p(\partial U)$ předpisem $\widetilde{T}u = u|_{\partial U}$. Z odhadu (44) plyne

$$\|\widetilde{T}u\|_{L^p(\partial U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

čili $\widetilde{T} \in \mathscr{B}\big(W^{1,p}(U) \cap C^1(\bar{U}), L^p(\partial U)\big)$. Z inkluze $C^\infty(\bar{U}) \subset W^{1,p}(U) \cap C^1(\bar{U})$ a hustoty $C^\infty(\bar{U})$ v $W^{1,p}(U)$ plyne, že $\widetilde{T}$ je navíc hustě definovaný, a tudíž k němu existuje právě jedno spojité rozšíření $T \in \mathscr{B}\big(W^{1,p}(U), L^p(\partial U)\big)$ takové, že $T|_{W^{1,p}(U) \cap C^1(\bar{U})} = \widetilde{T}$. Tím dostáváme poněkud slabší tvrzení než zaznívá větě. To, že dokonce pro $\forall u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U}) : Tu = u|_{\partial U}$, lze ukázat z poznatku, že funkce z $W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ jsou aproximovány prvky $C^\infty(\bar{U})$ nejen v odpovídající sobolevovské normě ale současně stejnoměrně. Ověření tohoto poznatku by vyžadovalo detailnější přezkoumání důkazu Věty 5.24.

□

Definice 5.27. *Obraz u při zobrazení T nazýváme* stopa u na ∂U. *Samo zobrazení T potom nazýváme* operátorem stopy.

Věta 5.28 (o funkcích v $W^{1,p}(U)$ s nulovou stopou)**.** *Buďte U omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ s C^1–hladkou hranicí, $p \in \langle 1, +\infty)$ a $u \in W^{1,p}(U)$. Potom $u \in W_0^{1,p}(U)$ právě tehdy, pokud $Tu = 0$ na ∂U.*

Důkaz. Předpokládejme, že $u \in W_0^{1,p}(U)$. Potom dle definice existuje posloupnost $(u_m) \subset \mathscr{D}(U)$ tak, že $u_m \to u$ v $W^{1,p}(U)$. Pro všechna $m \in \mathbb{N}$ zřejmě $Tu_m = 0$. Z omezenosti, tj. spojitosti, operátoru T potom plyne $Tu = 0$ (jako prvek $L^p(\partial U)$).

Důkaz druhé implikace je podstatně komplikovanější a lze jej nalézt například v [2]. □

5.3 Duální Sobolevův prostor $H^{-1}(U)$

Definice 5.29. Duálním Sobolevovým prostorem $H^{-1}(U)$ *rozumíme duální prostor k* $H_0^1(U)$. *Akci funkcionálu* $g \in H^{-1}(U)$ *na* $\varphi \in H_0^1(U)$ *budeme značit* (g, φ).

Jelikož $H_0^1(U)$ je Hilbertův prostor, Rieszova věta (o reprezentaci) nám pro libovolné $g \in H^{-1}(U)$ garantuje existenci takového $u \in H_0^1(U)$, že pro všechna $\varphi \in H_0^1(U)$ platí

$$(g, \varphi) = \langle u, \varphi \rangle_{H^1(U)} = \langle u, \varphi \rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2. \tag{45}$$

Přitom zobrazení $g \mapsto u$ je isometrie mezi $H^{-1}(U)$ a $H_0^1(U)$, zejména potom platí

$$\|g\| \equiv \|g\|_{H^{-1}(U)} = \|u\|_{H^1(U)} = \sqrt{\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2}.$$

Uvažujme nyní $(n+1)$–tici funkcí $f^0, f^1, \ldots, f^n \in L^2(U)$. Lineární funkcionál

$$\varphi \mapsto \langle f^0, \varphi \rangle_2 + \sum_{i=1}^n \langle f^i, \varphi_{,x_i} \rangle_2$$

je na $H_0^1(U)$ omezený, neboť z Hölderovy nerovnosti plyne

$$\begin{aligned}
|\langle f^0, \varphi \rangle_2 + \sum_{i=1}^n \langle f^i, \varphi_{,x_i} \rangle_2| &\leq \|f^0\|_2 \|\varphi\|_2 + \sum_{i=1}^n \|f^i\|_2 \|\varphi_{,x_i}\|_2 \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^n \|f^i\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\varphi\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \|\varphi_{,x_i}\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=0}^n \|f^i\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^1(U)}.
\end{aligned}$$

Tento funkcionál budeme sugestivně značit $f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}$. Pro jeho normu jsme právě odvodili

$$\|f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}\|_{H^{-1}(U)} \leq \left(\sum_{i=0}^n \|f^i\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Současně ale podle Riezsovy věty existuje $v \in H_0^1(U)$ tak, že

$$(f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}, \varphi) = \langle v, \varphi \rangle_{H^1(U)}$$

pro všechna $\varphi \in H_0^1(U)$ a

$$\|f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}\|_{H^{-1}(U)} = \left(\|v\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \|v_{,x_i}\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Výše uvedené poznatky nám umožňují alternativní charakterizaci prostoru $H^{-1}(U)$, které se budeme v těchto poznámkách držet.

Tvrzení 5.30 (charakterizace $H^{-1}(U)$)**.** *Lineární funkcionál g na $H_0^1(U)$ je omezený právě tehdy, existují-li funkce $g^0, g^1, \ldots, g^n \in L^2(U)$ tak, že pro všechna $\varphi \in H_0^1(U)$ platí*

$$(g, \varphi) = \langle g^0, \varphi \rangle_2 + \sum_{i=1}^{n} \langle g^i, \varphi_{,x_i} \rangle_2. \tag{46}$$

Pro jeho normu máme vyjádření

$$\|g\|_{H^{-1}(U)} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n} \|g^i\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} : g^0, g^1, \ldots, g^n \text{ je rozklad tvaru (46)} \right\}.$$

Je-li $g \in L^2(U)$, potom s ním automaticky asociujeme funkcionál

$$(g, \varphi) = \langle g, \varphi \rangle_2,$$

který odpovídá volbě $g^0 = g$, $g^i = 0$ pro $i \in \hat{n}$. Dostáváme se tak do zdánlivě paradoxní situace, kdy

$$H^{-1}(U) \simeq H_0^1(U) \subsetneq L^2(U) \subsetneq H^{-1}(U),$$

kde $\simeq$ představuje identifikaci skrze Rieszovu větu. Jenže druhá inkluze fakticky platí pro *jinou* identifikaci jistého podprostoru $H^{-1}(U)$ s $L^2(U)$!

Příklad 5.2. *Uvažujme na $H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$ funkcionál g generovaný funkcí $g = \chi_{(-1,1)} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus H^1(\mathbb{R})$, tj.*

$$(g, \varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Funkce

$$u(x) = \begin{cases} \sinh(1) \, \mathrm{e}^{x} & x \in (-\infty, -1) \\ 1 - \frac{\cosh(x)}{\mathrm{e}} & x \in \langle -1, 1 \rangle \\ \sinh(1) \, \mathrm{e}^{-x} & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

leží v $H^1(\mathbb{R})$ a splňuje (45)*. Na tomto příkladě mimo jiné vidíme, že vyjádření* (46) *nemusí být zdaleka jednoznačné.*

Příklad 5.3. *Na $H_0^1((-1,1))$ definujme spojitý funkcionál f určený dvojicí $f^0 = 0$, $f^1 = -\theta$ (θ značí Heavisideovu skokovou funkci), tj.*

$$(f, \varphi) = -\int_{0}^{1} \varphi'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Libovolné $\varphi \in H_0^1((-1,1))$ lze na $H^1((-1,1))$ aproximovat posloupností $(\varphi_m) \subset \mathscr{D}((-1,1))$. Pro prvky této posloupnosti (a obecně všechny prvky $\mathscr{D}((-1,1))$) máme

$$(f, \varphi_m) = -\int_{0}^{1} \varphi_m'(x) \, \mathrm{d}x = -[\varphi_m]_0^1 = \varphi_m(0) = (\delta, \varphi_m).$$

Levá strana konverguje k (f, φ), pravá strana potom k $\varphi(0)$, kde tuto hodnotu je nutno uvažovat ve smyslu stopy. Jelikož Diracovu δ–funkci nelze vyjádřit jakožto nějakou regulární distribuci [7], nemůže existovat $g \in L^2((-1,1))$ tak, že

$$(f, \varphi) = \langle g, \varphi \rangle_2$$

pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}((-1,1))$ a tím spíše ne pro všechna $\varphi \in H_0^1((-1,1))$. Výše uvedená identifikace prvků L^2 s prvky H^{-1} není tedy skutečně surjektivní.

6 Řešení eliptické rovnice

"Nikdy není tak dobře, aby nemohlo být ještě lépe."

V této části se vrátíme k operátoru

$$L = -\operatorname{div}(A(x)\nabla) + b\cdot\nabla + c$$

ze sekce 4. Jmenovitě budeme zkoumat existenci, jednoznačnost a regularitu tzv. *slabých řešení* problému

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{na } U \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial U \end{aligned} \tag{47}$$

za globálních předpokladů

$$a^{ij}(= a^{ji}),\ b^i,\ c \in L^\infty(U) \text{ a platí (17).} \tag{48}$$

6.1 Slabá formulace

Předpokládejme na okamžik, že u je hladké řešení (47) a $f \in L^2(U)$. (Takové u nemusí vůbec existovat!) Pro libovolné $v \in \mathscr{D}(U)$ tak platí

$$\langle f, v\rangle_{L^2(U)} = \int_U fv \,\mathrm{d}x = \int_U (Lu)v \,\mathrm{d}x = \int_U (A\nabla u)\cdot\nabla v + (b\cdot\nabla u)v + cuv \,\mathrm{d}x =: B[u,v], \tag{49}$$

kde jsme integrovali per-partes. Bilineární zobrazení B dává dobrý smysl na $H^1(U)$, my se vzhledem k Dirichletově hraniční podmínce omezíme na $H^1_0(U)$. Na levou stranu (49) lze pro změnu nahlížet jako na akci omezeného funkcionálu na prvek v. To nás vede k následující definici.

Definice 6.1. *Bilineární forma B na $H^1_0(U)\times H^1_0(U)$ se nazývá* bilineární forma asociovaná s operátorem L. *Říkáme, že $u \in H^1_0(U)$ je* slabé řešení *problému* (47) *s pravou stranou $f \in H^{-1}(U)$ právě tehdy, pokud*

$$B[u,v] = (f,v) \quad (\forall v \in H^1_0(U)).$$

Poznámka 6.2. *Buď U navíc omezená s C^1–hranicí a uvažujme problém*

$$\begin{aligned} Lu &= f \qquad \text{na } U \\ u &= g \neq 0 \quad \text{na } \partial U \end{aligned}$$

pro slabé řešení $u \in H^1(U)$ (u již nesplňuje Dirichletovu hraniční podmínku). Pokud g je stopou nějakého $w \in H^1(U)$, tj. $g = Tw$, lze tento problém převést na problém typu (47) *s novou pravou stranou. Pro $\tilde u := u - w$ totiž platí $T\tilde u = 0$, odkud $\tilde u \in H^1_0(U)$, a ve slabém smyslu*

$$L\tilde u = Lu - Lw = f - Lw, \tag{50}$$

kde $Lw = (b\cdot\nabla w + cw) - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a^{ij} w_{,x_j}\right)_{x_i} \in H^{-1}(U)$. O rovnosti (50) *se čtenář může přesvědčit krátkým přímým výpočtem-viz Úloha 9.*

6.2 Existence a jednoznačnost slabých řešení

Věta 6.3 (Lax–Milgram)**.** *Buď $\mathscr{H}$ Hilbertův prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dále buď $B : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ bilineární forma taková, že*

(i) $(\exists \alpha > 0)\ (\forall u, v \in \mathscr{H})\ (|B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|)$

(ii) $(\exists \beta > 0)\ (\forall u \in \mathscr{H})\ \left(B[u,u] \geq \beta \|u\|^2\right)$

Potom pro libovolné $f \in \mathscr{H}^*$ existuje právě jedno $u \in \mathscr{H}$ tak, že pro $\forall v \in \mathscr{H} : B[u,v] = (f,v)$.

Důkaz. Jelikož B je podle (i) omezená, existuje $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ tak, že $B[u,v] = \langle Au, v \rangle$ $(\forall u, v \in \mathscr{H})$ [1]. Dále pro libovolné $f \in \mathscr{H}^*$ Rieszova věta garantuje existenci $w \in \mathscr{H}$, pro které platí $(f,v) = \langle w, v \rangle$ $(\forall v \in \mathscr{H})$. Tímto jsme převedli hledání řešení $u \in \mathscr{H}$ rovnice $B[u,v] = (f,v)$ $(\forall v \in \mathscr{H})$ na hledání řešení rovnice $\langle Au, v \rangle = \langle w, v \rangle$ $(\forall v \in \mathscr{H})$, což je ekvivalentní s nalezením $u \in \mathscr{H}$, které splňuje

$$Au = w. \tag{51}$$

Pro existenci a jednoznačnost řešení (51) stačí ukázat, že operátor A je bijekce.

A je injektivní: Z (ii) dostáváme

$$\beta \|u\|^2 \leq B[u,u] = \langle Au, u \rangle \leq \|Au\| \|u\|,$$

kde druhá nerovnost plyne ze Schwarzovy nerovnosti. Odtud plyne

$$0 \leq \beta \|u\| \leq \|Au\|.$$

Jelikož $\beta > 0$, A je nutně prosté.

A je surjektivní: Volme $v \in \mathrm{Ran}A^{\perp}$. Poté pro $\forall u \in \mathscr{H} : \langle Au, v \rangle = 0$. Speciálně pro volbu $u = v$ dostáváme

$$0 = \langle Av, v \rangle = B[v,v] \geq \beta \|v\|^2 \Rightarrow v = 0.$$

To znamená, že $\mathrm{Ran}A^{\perp} = \{0\}$. Ukážeme-li, že $\mathrm{Ran}A$ je navíc uzavřený, potom $\mathrm{Ran}A = \mathscr{H}$.

Pro libovolnou cauchyovskou posloupnost $(y_n) \subset \mathrm{Ran}A$ existuje posloupnost $(x_n) \subset \mathscr{H}$ taková, že $y_n = Ax_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Z (ii) odvodíme nerovnost

$$\beta \|x_n - x_m\|^2 \leq \langle A(x_n - x_m), x_n - x_m \rangle \leq \|y_n - y_m\| \|x_n - x_m\|,$$

z níž plyne $\beta \|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\|$, a posloupnost (x_n) je tedy rovněž cauchyovská v $\mathscr{H}$. Protože $\mathscr{H}$ je Hilbertův, existuje $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \in \mathscr{H}$. Navíc z omezenosti, tj. spojitosti, operátoru A plyne

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} Ax_n = A \lim_{n \to \infty} x_n = Ax,$$

odkud $y \in \mathrm{Ran}A$.

□

Věta 6.4 (Energetický odhad)**.** *Buď B dána předpisem* (49) *a přitom platí* (48)*. Potom existují konstanty $\alpha, \beta > 0$ a $\gamma \geq 0$ tak, že pro $\forall u, v \in H_0^1(U)$ platí*

(a) $|B[u,v]| \le \alpha \|u\|_{H^1(U)} \|v\|_{H^1(U)}$,

(b) $\beta \|u\|^2_{H^1(U)} \le B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$.

Důkaz. (a) Díky omezenosti koeficientů v B můžeme odhadovat

$$
\begin{aligned}
|B[u,v]| = \left| \int_U (A\nabla u)\cdot \nabla v + b\cdot \nabla u v + cuv \,\mathrm{d}x \right| &\le \int_U |(A\nabla u)\cdot \nabla v| + |b\cdot \nabla u v| + |cuv| \,\mathrm{d}x \\
\le \int_U \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_\infty |\nabla u||\nabla v| + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty |\nabla u||v| + \|c\|_\infty |u||v| \,\mathrm{d}x &\le \\
\le C \int_U |\nabla u||\nabla v| + |\nabla u||v| + |u||v| \,\mathrm{d}x & \\
\le C\Big\{ \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|\nabla u\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2\|v\|_2 \Big\}, &
\end{aligned}
$$

kde poslední nerovnost plyne ze Schwarzovy nerovnosti. Současně platí

$$\|u\|_{H^1(U)} \ge \max\{\|u\|_2,\ \|\nabla u\|_2\}.$$

Celkem tedy máme

$$|B[u,v]| \le C \|u\|_{H^1(U)} \|v\|_{H^1(U)}.$$

(b) Připomeňme, že L je stejnoměrně eliptický, tj. $(\exists \theta > 0)(\forall x \in U)(\forall \xi \in \mathbb{R}^n)((A(x)\xi)\cdot \xi \ge \theta |\xi|^2)$. Speciálně pro volbu $\xi = \nabla u$ dostáváme $\theta |\nabla u|^2 \le \nabla u \cdot (A\nabla u)$. Po integraci přes U získáváme pomocí Schwarzovy a Youngovy nerovnosti následující odhady

$$
\begin{aligned}
\theta \int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_U (A\nabla u)\cdot \nabla u \,\mathrm{d}x &= B[u,u] - \int_U ((b\cdot \nabla u)u + cu^2)\,\mathrm{d}x \\
&\le B[u,u] + \int_U (|(b\cdot\nabla u)u| + |cu^2|)\,\mathrm{d}x \\
&\le B[u,u] + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 + \|c\|_\infty \|u\|_2^2 \\
&\le B[u,u] + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty \left(\varepsilon \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_2^2 \right) + \|c\|_\infty \|u\|_2^2. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Poznamenejme, že Youngovu nerovnost jsme použili následujícím způsobem

$$\|\nabla u\|_2 \|u\|_2 = 2\varepsilon^{1/2} \|\nabla u\|_2 \frac{1}{2\varepsilon^{1/2}} \|u\|_2 \le \varepsilon \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_2^2 \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

Máme tedy

$$\left(\theta - \varepsilon \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty \right) \|\nabla u\|_2^2 \le B[u,u] + \left(\|c\|_\infty + \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty \right) \|u\|_2^2.$$

Nyní volme ε tak, aby závorka na levé straně nerovnosti byla větší než $\frac{\theta}{2}$. Přičtením $\frac{\theta}{2}\|u\|_2^2$ získáváme konečný odhad

$$\frac{\theta}{2} \|u\|^2_{H^1(U)} \le B[u,u] + C\|u\|_2^2.$$

□

Poznámka 6.5. *Pokud U je omezená, $b \equiv 0$ a současně $c \geq 0$, lze vždy volit $\gamma = 0$! Ve druhém odhadu v* (52) *můžeme totiž celý člen $-\int_U cu^2\,dx$ zanedbat a v závěru důkazu místo prostého přičtení $\frac{\theta}{2}\|u\|_2^2$ aplikovat Poincarého nerovnost z poznámky 7.4,*

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(U)} \quad (\forall u \in H_0^1(U)).$$

Věta 6.6 (existence a jednoznačnost slabých řešení)**.** *Nechť platí* (48)*. Potom existuje $\gamma \geq 0$ tak, že pro všechna $\mu \geq \gamma$ a $f \in H^{-1}(U)$ existuje právě jedno slabé řešení $u \in H_0^1(U)$ problému*

$$\begin{aligned} Lu + \mu u &= f \quad \text{na } U \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial U. \end{aligned} \tag{53}$$

Důkaz. V důkazu využijeme Větu 6.3 s $\mathscr{H} = H_0^1(U)$, $\mathscr{H}^* = H^{-1}(U)$ a

$$B_\mu[u,u] := B[u,u] + \mu\|u\|_{L^2(U)}^2$$

pro $\mu \geq \gamma$, kde γ je konstanta z Věty 6.4. Forma B_μ odpovídá operátoru $L + \mu I$ a dle Věty 6.4 vyhovuje odhadům

$$|B_\mu[u,v]| \leq |B[u,v]| + \mu\|u\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)} \leq C\|u\|_{H^1(U)}\|v\|_{H^1(U)}.$$

a

$$\beta\|u\|_{H^1(U)}^2 \leq B[u,u] + \gamma\|u\|_{L^2(U)}^2 \leq B_\mu[u,u].$$

Odtud již díky Větě 6.3 víme, že existuje právě jedno slabé řešení $u \in H_0^1(U)$ problému (53). □

6.3 Regularita slabých řešení

Intermezzo–diferenční kvocient a jeho souvislost se slabou derivací

Definice 6.7. *Buďte U otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, $V \subset\subset U$ a $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$. Potom pro libovolné $x \in V$, $h \in \mathbb{R} :\ 0 < |h| < \operatorname{dist}(V, \partial U)$ a $i \in \hat{n}$ zavádíme* diferenční kvocient (v bodě x a velikosti h) *jako*

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}.$$

Dále klademe $D^h u := (D_1^h u, \ldots, D_n^h u)$.

Poznámka 6.8. *Vedle $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ uvažujme ještě $\varphi \in \mathscr{D}(V)$. Potom pro všechna nenulová v absolutní hodnotě dostatečně malá h platí* "integrace per-partes"

$$\int_V u D_i^h \varphi \,dx = -\int_V (D_i^{-h} u)\varphi \,dx,$$

viz Úloha 10.

Snadno se rovněž odvodí "Leibnizovo pravidlo"

$$D_i^h(vw) = (D_i^h v)w + v_i^h D_i^h w,$$

kde $v_i^h(x) := v(x + he_i)$, viz Úloha 11.

Věta 6.9 (souvislost diferenčního kvocientu se slabou derivací)**.** *Buďte U otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $V \subset\subset U$.*

1. *Je-li $1 \le p < \infty$ a $u \in W^{1,p}(U)$, potom pro všechna $h \in \mathbb{R}:\ 0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial U)$ platí*
$$\|D_i^h u\|_{L^p(V)} \le \|u_{,x_i}\|_{L^p(U)} \quad (i \in \hat{n}).$$

2. *Je-li $1 < p < \infty$, $u \in L^p(U)$ a existuje-li $K \ge 0$ takové, že pro libovolné $h \in \mathbb{R}:\ 0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial U)$ platí $\|D_i^h u\|_{L^p(V)} \le K$, potom u má na V slabou derivaci podle x_i a platí pro ni*
$$\|u_{,x_i}\|_{L^p(V)} \le K.$$

Důkaz. 1. První tvrzení nejdříve dokážeme pro $u \in C^\infty(U) \cap W^{1,p}(U)$. Newtonova formule říká, že
$$u(x + he_i) - u(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(x + the_i))\,\mathrm{d}t = h \int_0^1 u_{,x_i}(x + the_i)\,\mathrm{d}t.$$
To nám dává následující odhad na diferenční kvocient
$$|D_i^h u|(x) = \left| \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \right| \le \int_0^1 |u_{,x_i}(x + the_i)|\,\mathrm{d}t.$$
Odtud pomocí Hölderovy nerovnosti a Fubiniho věty dostáváme
$$\begin{aligned}\|D_i^h u\|_{L^p(V)}^p &\le \int_V \left(\int_0^1 |u_{,x_i}(x + the_i)|\,\mathrm{d}t \right)^p \mathrm{d}x \le \int_V \int_0^1 |u_{,x_i}(x + the_i)|^p\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_V |u_{,x_i}(x + the_i)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \int_U |u_{,x_i}(x)|^p\,\mathrm{d}x = \|u_{,x_i}\|_{L^p(U)}^p.\end{aligned}$$
V posledním odhadu jsme ve vnitřním integrálu substituovali $x + the_i \mapsto x$ a potom zvětšili integrační oblast.

Buď nyní $u \in W^{1,p}(U)$. Zvolme libovolné pevné W tak, že $V \subset\subset W \subset\subset U$ a $\operatorname{dist}(V, \partial W) > |h|$. Potom z Věty 5.19 víme, že existuje posloupnost $(u_m) \subset C^\infty(W)$ taková, že $u_m \to u$ na $W^{1,p}(W)$. Podle první části důkazu aplikované na dvojici V a W a získáváme
$$\|D_i^h u_m\|_{L^p(V)} \le \|u_{m,x_i}\|_{L^p(W)}.$$
Pravá strana zřejmě konverguje k $\|u_{,x_i}\|_{L^p(W)}$. Z odhadů
$$\begin{aligned}\|D_i^h(u_m - u)\|_{L^p(V)} &= \left\| \frac{(u_m - u)(x + he_i) - (u_m - u)(x)}{h} \right\|_{L^p(V)} \\ &\le \frac{1}{|h|} \Big(\|(u_m - u)(x + he_i)\|_{L^p(V)} + \|u_m - u\|_{L^p(V)} \Big) \le \frac{2}{|h|} \|u_m - u\|_{L^p(W)}\end{aligned}$$
vidíme, že levá strana konverguje k $\|D_i^h u\|_{L^p(V)}$.

2. Připomeňme, že na reflexivním Banachově prostoru má libovolná omezená posloupnost slabě konvergentní podposloupnost [1] a že pro $p \in (1, \infty)$ je $L^p(V)$ reflexivní, přičemž $L^p(V)^* \equiv L^q(V)$, kde q je hölderovsky sdružený koeficient, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zde $\equiv$ značí přirozenou lineární isometrii $L^q(V) \to L^p(V)^*:\ f \mapsto \{\psi \mapsto \int_V f\psi\,\mathrm{d}x\}$.

Nyní vezměme libovolné $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ pevné a h dostatečně malé v absolutní hodnotě. Integrace per partes dává

$$\int_V u D_i^h \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_V (D_i^{-h} u)\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Volme posloupnost $(h_m) \subset \mathbb{R}$ tak, že $\lim_{m\to\infty} h_m = 0$. Z předpokladů věty plyne

$$\sup_{m\in\mathbb{N}, m\geq m_0} \|D_i^{-h_m} u\|_{L^p(V)} \leq K,$$

pro nějaké m_0 dostatečně velké, tj. posloupnost $\left(D_i^{-h_m} u\right)_{m=m_0}^{+\infty} \subset L^p(V)$ je omezená. Existuje tedy (h_{m_k}) taková, že $\text{w-lim}_{k\to\infty} D_i^{-h_{m_k}} u = v_i \in L^p(V)$. Z Lebesgueovy věty a slabé konvergence plyne

$$\int_V u\,\varphi_{,x_i} \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_V u\, D_i^{h_{m_k}} \varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} -\int_V D_i^{-h_{m_k}} u\,\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_V v_i \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Existuje tedy slabá derivace u podle x_i a platí pro ni $u_{,x_i} = v_i \in L^p(V)$.

Konečně pro libovolné $f \in L^p(V)^* \equiv L^q(V) :\ \|f\|_{L^q(V)} = 1$ máme

$$\Big|\int_V f v_i \,\mathrm{d}x\Big| = \lim_{k\to\infty} \Big|\int_V f D_i^{-h_{m_k}} u \,\mathrm{d}x\Big| \leq \lim_{k\to\infty} \|D_i^{-h_{m_k}} u\|_{L^p(V)} \leq K,$$

odkud $\|v_i\|_{L^p(V)} \leq K$.

□

Důsledek 6.10. *Pokud za předpokladů druhého bodu věty platí dokonce $\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq K$, potom $u \in W^{1,p}(V)$ a $\|\nabla u\|_{L^p(V)} \leq nK$.*

Věta 6.11 (vnitřní H^2–regularita)**.** *Buďte $a^{ij} \in C^1(U)$, b^i, $c \in L^\infty(U)$, $f \in L^2(U)$ a $u \in H^1(U)$ slabé řešení problému $Lu = f$ (bez specifikované hraniční podmínky na ∂U). Potom $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$ a pro libovolné $V \subset\subset U$ platí*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right), \tag{54}$$

kde konstanta C závisí jen na U, V a koeficientech L.

Důkaz. Pro libovolné pevné $V\subset\subset U$ zvolme W tak, aby $V \subset\subset W \subset\subset U$. Dále uvažujme funkci $\zeta \in \mathscr{D}(W)$ tak, že $0 \leq \zeta \leq 1$ na W a $\zeta = 1$ na V. Z předpokladů víme, že u řeší

$$B[u,v] = (f,v) = \int_U f v \,\mathrm{d}x \quad (\forall v \in H_0^1(U)). \tag{55}$$

Položíme-li $v = -D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)$, $k \in \hat{n}$, potom lze rovnici (55) psát ve tvaru

$$\int_U (A\nabla u)\cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_U \widetilde{f} v \,\mathrm{d}x,$$

kde $\widetilde{f} := f - b\cdot\nabla u - cu$, $\widetilde{f} \in L^2(U)$. Označme levou stranu v předchozí rovnosti $\mathcal{A}$ a pravou stranu $\mathcal{B}$ a proveďme následující odhady.

Integrace per-partes pro diferenční kvocient dává

$$\mathcal{A} = -\int_U (A\nabla u) \cdot \left(D_k^{-h}\nabla\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right) \mathrm{d}x = \int_U D_k^h (A\nabla u) \cdot \nabla\left(\zeta^2 D_k^h u\right) \mathrm{d}x.$$

Definujeme-li prvky matice $A_k'^h$ jako $a_k^{ij,h}(x) = a^{ij}(x + he_k)$ a prvky matice $D_k^h A$ jako $D_k^h a^{ij}(x)$, dostaneme za pomoci Leibnizova pravidla jak pro derivaci tak pro diferenční kvocient

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2,$$

kde

$$\mathcal{A}_1 := \int_U \zeta^2 A_k'^h \left(D_k^h \nabla u\right) \cdot D_k^h \nabla u \, \mathrm{d}x$$

a

$$\mathcal{A}_2 := \int_U 2\zeta A_k'^h \left(D_k^h\nabla u\right) \cdot \nabla\zeta D_k^h u + 2\zeta\left(D_k^h A\nabla u\right) \cdot \nabla\zeta D_k^h u + \zeta^2\left(D_k^h A\nabla u\right) \cdot D_k^h\nabla u \, \mathrm{d}x.$$

Člen $\mathcal{A}_1$ můžeme díky uniformní elipticitě operátoru L odhadnout jako

$$\mathcal{A}_1 \geq \theta \int_U \zeta^2 \left|D_k^h \nabla u\right|^2 \mathrm{d}x.$$

Protože $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B} - \mathcal{A}_2 \leq |\mathcal{B} - \mathcal{A}_2| \leq |\mathcal{B}| + |\mathcal{A}_2|$, budeme chtít postupně odhadnout $|\mathcal{A}_2|$ a $|\mathcal{B}|$.

Odhad na $\mathcal{A}_2$: Z trojúhelníkové nerovnosti a omezenosti a^{ij}, $(a^{ij})_{,x_k}$, b^i, c, ζ a $\nabla\zeta$ plyne

$$|\mathcal{A}_2| \leq C \int_U \zeta\left(|D_k^h\nabla u||D_k^h u| + |\nabla u||D_k^h u| + |\nabla u||D_k^h \nabla u|\right) \mathrm{d}x.$$

Díky volbě funkce ζ lze v předchozím integrálu integrovat pouze přes W a dále s pomocí Schwarzovy a následně Youngovy nerovnosti provést odhad

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_2| \leq C\Big(&\|\zeta D_k^h\nabla u\|_{L^2(W)}\|D_k^h u\|_{L^2(W)} + \|\nabla u\|_{L^2(W)}\|D_k^h u\|_{L^2(W)} + \|\nabla u\|_{L^2(W)}\|\zeta D_k^h \nabla u\|_{L^2(W)}\Big) \\ &\leq \varepsilon\|\zeta D_k^h\nabla u\|^2_{L^2(W)} + \frac{C}{\varepsilon}\left(\|D_k^h u\|^2_{L^2(W)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(W)}\right). \qquad (56)\end{aligned}$$

kde $\varepsilon \in (0, \theta)$ je zatím libovolné.

Odhad na $\mathcal{B}$: Trojúhelníková nerovnost dává

$$|\mathcal{B}| \leq C \int_U (|f| + |\nabla u| + |u|)\,|v| \, \mathrm{d}x.$$

Pro všechna v absolutní hodnotě dostatečně malá h s pomocí Věty 6.9 dostáváme

$$\begin{aligned}\int_U |v|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_W \left|D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2 \mathrm{d}x \leq \int_U \left|\left(\zeta^2 D_k^h u\right)_{,x_k}\right|^2 \mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int_W \left|\nabla\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2 \mathrm{d}x \leq \int_W 2\left(\left|2\zeta\nabla\zeta D_k^h u\right|^2 + \left|\zeta^2 \nabla D_k^h u\right|^2\right) \mathrm{d}x \leq \\ &\leq C\int_W \left(\left|D_k^h u\right|^2 + \zeta^2\left|D_k^h\nabla u\right|^2\right) \mathrm{d}x \leq C\int_U \left(|\nabla u|^2 + \zeta^2 \left|D_k^h \nabla u\right|^2\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ze Schwarzovy, Youngovy a výše odvozené nerovnosti postupně dostáváme

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}| &\leq C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|\nabla u\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right)\|v\|_{L^2(U)} \\ &\leq \tilde{\varepsilon}\|v\|^2_{L^2(U)} + \frac{C}{\tilde{\varepsilon}}\left(\|f\|^2_{L^2(U)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(U)} + \|u\|^2_{L^2(U)}\right) \leq \\ &\leq \varepsilon\|\zeta^2 D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(U)} + \frac{C}{\varepsilon}\left(\|f\|^2_{L^2(U)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(U)} + \|u\|^2_{L^2(U)}\right),\end{aligned}$$

kde $\varepsilon \in (0,\theta)$ lze volit libovolné.

Celkem tedy pro libovolné v absolutní hodnotě dostatečně malé h máme

$$\theta \int_U \zeta^2 \left|D_k^h \nabla u\right|^2 \mathrm{d}x \leq \mathcal{A}_1 \leq |\mathcal{B}| + |\mathcal{A}_2| \leq 2\varepsilon \int_U \zeta^2 \left|D_k^h \nabla u\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{C}{\varepsilon}\int_U \left(f^2 + |\nabla u|^2 + u^2\right) \mathrm{d}x.$$

Zde jsme po dosazení (56) opět využili Věty 6.9.

Položíme-li $\varepsilon = \theta/4$, dostaneme

$$\frac{\theta}{2}\int_U \zeta^2 \left|D_k^h \nabla u\right|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_U f^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \,\mathrm{d}x,$$

což lze vzhledem k volbě funkce ζ přepsat jako

$$\frac{\theta}{2}\int_V \left|D_k^h \nabla u\right|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_U f^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \,\mathrm{d}x. \tag{57}$$

Věta 6.9 nyní garantuje, že existuje $(\nabla u)_{,x_k} \in L^2(V;\mathbb{R}^n)$. Protože k a V byly libovolné, tak $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$. Navíc z (57) plyne

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}\right). \tag{58}$$

Tento odhad lze ještě vylepšit tak, že využijeme jeho platnosti při záměně U za W (s jinou konstantou C) a $\|u\|_{H^1(W)}$ odhadneme z eliptičnosti podobně jako jsme odhadovali $\|D_k^h \nabla u\|_{L^2(V)}$. Konkrétněji za testovací funkci ve slabé formulaci volíme $v = \zeta^2 u$, kde $\zeta \in \mathscr{D}(U)$ je taková, že $0 \leq \zeta \leq 1$ na U a $\zeta \equiv 1$ na W, abychom skončili s odhadem

$$\int_W |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_U \zeta^2 |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \leq C \int_U f^2 + u^2 \,\mathrm{d}x.$$

Ten společně s (58) pro dvojici V a W dává (54). □

Důsledek 6.12 (slabé řešení skoro všude splývá s klasickým)**.** *Za předpokladů Věty 6.11, slabé řešení u řeší rovnici $Lu = f$ bodově skoro všude.*

Důkaz. Pro všechna $v \in H^1_0(U)$ máme

$$B[u,v] = (f,v) = \langle f, v\rangle_{L^2(U)},$$

kde nyní $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$. Omezíme-li se na $v \in \mathscr{D}(U)$, integrací per-partes dostaneme

$$B[u,v] = \langle Lu, v\rangle_{L^2(U)} = \langle f, v\rangle_{L^2(U)}.$$

Díky hustotě $\mathscr{D}(U)$ v $L^2(U)$ potom $Lu = f$ na $L^2(U)$. □

Vnitřní regularitu vyššího stupně lze dokázat matematickou indukcí-viz Úloha 12. Pro regularitu slabého řešení až k hranici je vedle regularity koeficientů operátoru a pravé strany fundamentální i dostatečná hladkost hranice. Složením výsledků pro vnitřní a hraniční regularitu potom dostáváme [2, sekce 6.3, Theorem 5]

Věta 6.13 (vyšší regularita až k hranici)**.** *Nechť U je otevřená omezená množina s C^{m+2}-hladkou hranicí. Buďte a^{ij}, b^i, $c \in C^{m+1}(\bar{U})$, $f \in H^m(U)$ a $u \in H^1_0(U)$ slabé řešení problému $Lu = f$ s Dirichletovou hraniční podmínkou na ∂U, viz (47). Potom $u \in H^{m+2}(U)$ a platí*

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right),$$

kde konstanta C závisí jen na U, m a koeficientech L.

Příklad 6.1 (Existence slabého řešení pro Neumannův problém)**.** *Uvažujme následující úlohu*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{na } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial U \end{aligned} \tag{59}$$

pro neznámou funkci u. Zde U je otevřená omezená souvislá podmnožina $\mathbb{R}^n$ s C^1-hranicí, ν představuje jednotkovou vnější normálu k ∂U a $f \in L^2(U)$. Předpokládejme, že u je klasické řešení (59). Přenásobením na $L^2(U)$ první z rovností v (59) funkcí $v \in H^1(U)$ dostaneme

$$\int_U fv \,\mathrm{d}x = \int_U -\Delta u\, v \,\mathrm{d}x = -\int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \,\mathrm{d}S(x) + \int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x.$$

To nás motivuje definovat slabé řešení *Neumannova problému jako takové $u \in H^1(u)$, že pro všechna $v \in H^1(U)$ platí*

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_U fv \,\mathrm{d}x. \tag{60}$$

Povšimněme si, že Neumannova hraniční podmínka se ve své explicitní podobě v slabé formulaci neobjevuje! Volbou $v \equiv$ konst. nahlédneme, že slabé řešení může existovat jen za podmínky

$$\int_U f \,\mathrm{d}x = 0. \tag{61}$$

Dále je patrné, že slabé řešení nemůže být na $H^1(U)$ jednoznačné, neboť posuneme-li libovolné řešení (60) o konstantu dostaneme opět řešení (60). Ukážeme, že existuje právě jedno slabé řešení v prostoru

$$D^1(U) := \{u \in H^1(U) : \int_U u \,\mathrm{d}x = 0\}.$$

Pro libovolnou posloupnost $(u_n) \subset D^1(U)$, která na $H^1(U)$ konverguje k u, platí $u \in H^1(U)$ díky úplnosti $H^1(U)$. Dále

$$\Big|\int_U u \,\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_U u - u_n \,\mathrm{d}x\Big| \leq \int_U |u - u_n| \,\mathrm{d}x \leq \sqrt{|U|}\, \|u - u_n\|_{L^2(U)} \leq \sqrt{|U|}\, \|u - u_n\|_{H^1(U)},$$

odkud plyne $\int_U u \,\mathrm{d}x = 0$. Celkem dostáváme, že $u \in D^1(U)$–tento prostor je tedy uzavřený. Vzhledem k Poincarého–Wirtingerově nerovnosti, viz Věta 7.5 , je na $D^1(U)$ norma $\|\cdot\|_{H^1(U)}$ ekvivalentní následující normě $\|u\|^2_{D^1(U)} := \int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x$. Ta je generována skalárním součinem

$$(u, v) := \int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x.$$

Na $D^1(U)$ budeme dále nahlížet jako na Hilbertův prostor s právě tímto součinem.

Lineární funkcionál $v \mapsto \int_U fv$ je spojitý na $D^1(U)$, protože s pomocí Schwarzovy a Poincarého–Wirtingerovy nerovností dostaneme

$$\Big| \int_U fv \,\mathrm{d}x \Big| \leq \|f\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \leq \|f\|_{L^2(U)} C \|v\|_{D^1(U)}.$$

Podle Rieszovy věty existuje právě jedno $u \in D^1(U)$ tak, že pro všechna $v \in D^1(U)$ platí

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = (u, v) = \int_U fv. \tag{62}$$

Vzhledem k podmínce (61) platí tento vztah dokonce pro všechna $v \in H^1(U)$, protože

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_U \nabla u \cdot \nabla (v - \fint_U v) \,\mathrm{d}x = \int_U f(v - \fint_U v) \,\mathrm{d}x = \int_U fv \,\mathrm{d}x.$$

Zde jsme v druhé rovnosti použili (62) pro funkci $v - \fint_U v \in D^1(U)$.

Celkem jsme ukázali, že za podmínky (61) existuje v $D^1(U)$ právě jedno slabé řešení problému (60). Libovolné další slabé řešení (60) v $H^1(U)$ se od něj odlišuje o konstantu. Vzhledem k šikovné volbě skalárního součinu jsme k tomuto závěru ani nepotřebovali Lax–Milgramovu větu!

7 Sobolevovy prostory-setkání druhé

"Mistře Evansi, kde mám začít se studiem?" "Už jsi snídal?" "Ano, ale…" "Tak běž umýt nádobí!"

Mějme $u \in W^{k,p}(U)$, kde U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Plyne z integrability funkce u a jejích derivací v p–té mocnině i integrabilita u ve vyšší mocnině či dokonce přímo spojitost či jistá vyšší míra hladkosti? Odpověď silně závisí na vztahu mezi n, p a k, jak ukazuje následující motivační úvaha. Nechť pro nějaké $p, p^* \geq 1$ a všechna $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ platí vztah

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{63}$$

Dosadíme-li do (63) přeškálovanou funkci $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$, $\lambda > 0$, dostaneme

$$\lambda^{-\frac{n}{p^*}} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \|u_\lambda\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C \lambda^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

odkud nutně $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{p^*} = 0$, tj.

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \tag{64}$$

Tato nerovnost může platit jen za předpokladu $p < n$. V takovém případě $p^* > p$.

Definice 7.1. *Buď $n > p \geq 1$, potom p^* vyhovující (64), tj. $p^* = \frac{np}{n-p}$, budeme nazývat* sobolevovsky sdružený koeficient *k p.*

7.1 Sobolevovy nerovnosti pro $1 \leq p < n$

Věta 7.2 (Gagliardova–Nirenbergova–Sobolevova nerovnost)**.** *Buď $1 \leq p < n$. Potom existuje konstanta $C = C(p,n)$ tak, že pro všechna $u \in C^1_C(\mathbb{R}^n)$ platí*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Důkaz této nerovnosti lze nalézt například v [2]. Ukážeme si, jak ji rozšířit na vhodné Sobolevovy prostory.

Věta 7.3 (odhady pro $W^{1,p}_0(U), 1 \leq p < n$)**.** *Buď U otevřená omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $p \in \langle 1, n)$. Potom existuje konstanta $C = C(p,n,U)$ tak, že pro všechna $u \in W^{1,p}_0(U)$*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(U)} \tag{65}$$

pro $\forall q \in \langle 1, p^*\rangle$. Speciálně platí tzv. Poincarého nerovnost*,*

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(U)}. \tag{66}$$

Důkaz. Jelikož podle definice $W^{1,p}_0(U) = \overline{\mathscr{D}(U)}^{W^{1,p}(U)}$, pro každé $u \in W^{1,p}_0(U)$ existuje cauchyovská posloupnost $(u_m) \subset \mathscr{D}(U) : u_m \to u$ ve $W^{1,p}(U)$. Prvky posloupnosti (u_m) na $\mathbb{R}^n \setminus U$ hladce dodefinujeme nulou a použijeme pro ně Gagliardovu–Nirenbergovu–Sobolevovu nerovnost, viz Věta 7.2,

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(U)} = \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|\nabla u_m\|_{L^p(U)}. \tag{67}$$

Limitním přechodem na pravé straně dostáváme

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(U)}.$$

Pro platnost (65) s $q = p^*$ stačí nyní ukázat, že $u_m \to u$ na $L^{p^*}(U)$.

Posloupnost (u_m) je zjevně díky (67) cauchyovská na $L^{p^*}(U)$, tudíž existuje $\tilde{u} \in L^{p^*}(U)$: $u_m \to \tilde{u}$. Jelikož (u_m) konverguje na $L^{p^*}(U)$, existuje vybranná posloupnost $(u_{m_k}) : u_{m_k} \to \tilde{u}$ skoro všude na U. Posloupnost (u_{m_k}) ale konverguje i v $L^p(U)$ (konverguje totiž v $W^{1,p}(U)$), a existuje tedy vybranná posloupnost $(u_{m_{k_j}}) : u_{m_{k_j}} \to u$ skoro všude na U. Protože posloupnost $(u_{m_{k_j}})$ konverguje jak k u tak k $\tilde{u}$ skoro všude na U, dostáváme tak $u = \tilde{u}$ na $L^{p^*}(U)$.

Pro $q \in \langle 1, p^*)$ nyní nerovnost (65) platí díky omezenosti U, ze které plyne

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq |U|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}\|u\|_{L^{p^*}(U)}.$$

Povšimněme si, že konstantu v této nerovnosti lze odhadnout novou, která již nebude záviset na volbě $q \in \langle 1, p^*\rangle$. □

Poznámka 7.4. *Poincarého nerovnost* (66) *se v aplikacích velice často vyskutuje s hodnotou $p = 2$, při které je L^p prostor Hilbertův. Vzhledem k podmínce $2 = p < n$ ji ale zatím nemáme dokázanou pro $n \leq 2$. Ukážeme si snadný přímý důkaz, který funguje v libovolné dimenzi a navíc nám dává horní odhad na konstantu v* (66)*. Bez újmy na obecnosti uvažujme $U \subset (0, L) \times \mathbb{R}^{n-1}$, $L > 0$ a označme $x \equiv (x_1, x')$. Pro libovolné $u \in \mathscr{D}(U)$ platí*

$$|u(x_1,x')|^2 = \left|\int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x')\,\mathrm{d}t\right|^2 \leq \left(\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x')\right|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq L\int_0^L |\nabla u(t,x')|^2\,\mathrm{d}t,$$

kde jsme v posledním odhadu použili Hölderovu nerovnost. Integrace této nerovnosti vede k

$$\int_U |u|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^L |u(x_1, x')|^2 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x' \leq L \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^L \int_0^L |\nabla u(t, x')|^2 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x'$$
$$\leq L^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^L |\nabla u(t, x')|^2 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x' = L^2 \int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Díky hustotě $\mathscr{D}(U)$ v $H_0^1(U)$ lze tuto nerovnost ihned rozšířit pro všechna $u \in H_0^1(U)$.

Bez důkazu si představíme ještě další související nerovnost [2, sekce 5.8, Theorem 1].

Věta 7.5 (Poincaré-Wirtinger)**.** *Buď U omezená otevřená souvislá podmnožina $\mathbb{R}^n$ s C^1–spojitou hranicí a $p \in [1, +\infty]$. Potom existuje konstanta $C = C(n, p, U)$ tak, že pro libovolné $u \in W^{1,p}(U)$ platí*

$$\|u - \fint_U u\|_{L^p(U)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(U)}.$$

Je zřejmé, že nerovnost (65) nemůže platit na $W^{1,p}(U)$. Uvažme například konstantní funkci. Ukážeme si, že na pravou stranu je třeba přidat L^p–normu funkce samotné. V důkaze budeme potřebovat následující poznatek o tzv. *prodloužení* funkce ze Sobolevova prostoru, jehož důkaz lze nalézt v [2].

Věta 7.6 (o prodloužení)**.** *Buďte U, V otevřené omezené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ takové, že $U \subset\subset V$. Nechť U má navíc C^1–hranici. Potom existuje $E \in \mathscr{B}(W^{1,p}(U), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ s vlastnostmi*

(i) $Eu = u$ *skoro všude na* U,

(ii) $\operatorname{supp} Eu \subset V$,

přičemž norma tohoto zobrazení závisí jen na volbě U, V a p.

Zobrazení E budeme nazývat *operátorem prodloužení*, obraz Eu potom *prodloužením funkce* u.

Věta 7.7 (odhady pro $W^{1,p}(U), 1 \leq p < n$)**.** *Nechť U je otevřená omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ s C^1 hranicí, $1 \leq p < n$ a $u \in W^{1,p}(U)$. Potom pro libovolné $q \in \langle 1, p^* \rangle$: $u \in L^q(U)$ a pro všechna $u \in W^{1,p}(U)$ platí*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}, \tag{68}$$

kde konstanta závisí jen na volbě p, n a U.

Důkaz. Zafixujme otevřenou omezenou množinu $V : U \subset\subset V$. Volme $u \in W^{1,p}(U)$ a jeho prodloužení z Věty 7.6 zkonstruované pomocí V označme jako Eu. Z věty o globální aproximaci plyne, že existuje $(u_m) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) : u_m \to Eu$ v $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Gagliardova–Nirenbergova–Sobolevova nerovnost, viz Věta 7.2, potom dává, že pro $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{69}$$

Analogicky jako v důkaze Věty 7.3 ukážeme, že posloupnost (u_m) konverguje k Eu na $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Limitním přechodem v (69) dostaneme

$$\|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

kde poslední nerovnost plyne z omezenosti E. Protože

$$\|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \geq \|Eu\|_{L^{p^*}(U)} = \|u\|_{L^{p^*}(U)},$$

platí odhad (68) pro $q = p^*$. Pro ostatní hodnoty q jej rozšíříme stejně jako v důkaze Věty 7.3. $\square$

7.2 Sobolevovy nerovnosti pro $n < p$

Intermezzo-Hölderovy prostory

Definice 7.8. *Buďte $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $0 < \gamma \leq 1$. Splňuje-li funkce $u : U \to \mathbb{R}$ pro nějaké C odhad*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \qquad (\forall x,\, y \in U), \tag{70}$$

nazýváme ji hölderovsky spojitá s exponentem γ. *Je-li $\gamma = 1$ potom hovoříme o* lipschitzovsky spojité funkci. *Prostor všech funkcí, pro něž platí (70) značíme $C^{0,\gamma}(U)$ a zavádíme na něm seminormu*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(U)} := \sup_{x,y \in U, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}.$$

Poznámka 7.9. *Funkce z $C^{0,\gamma}(U)$ jsou zřejmě stejnoměrně spojité.*

Pokud by v (70) bylo $\gamma > 1$, funkce u je automaticky konstatní na každé komponentě souvislosti U. Vezmeme-li totiž libovolné $x \in U$ a $s \in \mathbb{R}^n : |s| = 1$, dostáváme

$$\left| \frac{u(x + ts) - u(x)}{t} \right| \leq Ct^{\gamma - 1}.$$

Pravá strana konverguje k 0 pro $t \to 0$. Máme tedy $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ na U. Případ $\gamma > 1$ se proto neuvažuje.

Definice 7.10. Hölderův prostor $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ *je tvořen všemi $u \in C^k(\bar{U})$, které mají všechny derivace řádu $k \in \mathbb{N}_0$ hölderovsky spojité s exponentem γ. Zavádíme na něm normu*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(U)}. \tag{71}$$

Poznámka 7.11. *Hölderův prostor je s výše uvedenou normou úplný, jak se může čtenář sám přesvědčit v rámci Úlohy 13. Alternativně lze na $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ uvažovat ekvivalentní normu*

$$u \mapsto \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \max_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(U)}.$$

Příklad 7.1. *Má-li funkce u na konvexní množině U omezené první derivace, potom u je na U lipschitzovsky spojitá. Vzhledem ke konvexnosti U totiž pro libovolné $x, y \in U$ a $t \in [0, 1]$ platí $xt + (1 - t)y \in U$ a tudíž*

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| = \Big| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(xt + (1 - t)y) \,\mathrm{d}t \Big| &\leq \int_0^1 |\nabla u(xt + (1 - t)y) \cdot (x - y)| \,\mathrm{d}t \\ &\leq \|\nabla u\|_\infty \int_0^1 |x - y| \,\mathrm{d}t = \|\nabla u\|_\infty |x - y|. \end{aligned} \tag{72}$$

Příklad 7.2. *S přirozenou identifikací $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$, $(x, y) \leftrightarrow x + iy = z$, uvažujme otevřenou podmnožinu $D := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \setminus (-2, -1) \times \{0\}$ a na ní funkci $u(z) = \mathrm{Arg}(z)$, tj. hlavní větev argumentu. Zřejmě $\mathrm{Arg} : D \to (-\pi, \pi)$ a navíc všude na D lze použít vyjádření*

$$\mathrm{Arg}(x + iy) = 2 \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \qquad (\forall (x, y) : x > 0 \vee y \neq 0).$$

Přímo se lze přesvědčit, že u i ∇u jsou na D omezené. Nicméně u není na D hölderovsky spojitá, protože $\lim_{\varepsilon \to 0} |u(-1.5 + i\varepsilon) - u(-1.5 - i\varepsilon)| = 2\pi$ a současně $\lim_{\varepsilon \to 0} | -1.5 + i\varepsilon - (-1.5 - i\varepsilon)| = 0$.

Předchozí příklady ukazují, že samotná omezenost derivace nepostačuje pro hölderovskou spojitost funkce. Je zapotřebí i nějaké omezení na lokální a globální chování hranice. Například v Morreyho nerovnosti níže s $p = +\infty$, viz Věta 7.13, je pro lipshitzovskou spojitost vyžadována omezenost množiny U a C^1-hladkost hranice. Množina D z Příkladu 7.2 však nemá C^1-hladkou hranici ani po vyhlazení ostrých "rohů"!

Věta 7.12 (Morreyho nerovnost). *Buď $n < p \leq \infty$. Potom existuje konstanta C tak, že pro $\forall u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ platí*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

kde $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

Důkaz Morreyho nerovnosti lze nalézt například opět v [2]. S její pomocí odvodíme, že libovolná funkce z $W^{1,p}(U)$ $(n < p)$ již leží, po případném předefinování na množině nulové míry, v $C^{0,\gamma}(\bar{U})$.

Věta 7.13 (odhady pro $W^{1,p}(U)$, $n < p \leq \infty$). *Nechť U je otevřená omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ s C^1-hranicí, $n < p \leq \infty$ a $u \in W^{1,p}(U)$. Potom existuje reprezentant $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$ funkce u tak, že*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

s $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, přičemž konstanta C závisí jen na n, p a U.

Důkaz. Uvažujme pouze případ $n < p < \infty$. Důkaz pro případ $p = \infty$ lze nalézt například v [6]. Zafixujme $V : U \subset\subset V$. Volme $u \in W^{1,p}(U)$ a s pomocí V zkonstruujme jeho prodloužení Eu, viz Věta 7.6. Z věty o globální aproximaci plyne existence posloupnosti $(u_m) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$: $u_m \to Eu$ v $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ Věta 7.12 dává

$$\|u_m\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{73}$$

Limitním přechodem na pravé straně dostáváme

$$\lim_{m\to+\infty} \|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

kde jsme v odhadu využili omezenosti E.

Vzhledem k (73) je (u_m) cauchyovská i v prostoru $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, který je úplný, a tudíž existuje $\lim\limits_{m\to+\infty} u_m = u^* \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Na levé straně (73) tak máme

$$\lim_{m\to+\infty} \|u_m\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \geq \|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}.$$

Nyní zbývá ověřit, že $u^* = u$ skoro všude na U. Protože (u_m) je cauchyovská na $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, tak je cauchyovská i na $L^p(\mathbb{R}^n)$, a existuje tedy vybraná posloupnost (u_{m_k}) : $(u_{m_k}) \to Eu$ skoro všude na $\mathbb{R}^n$. Dále $\lim_{k\to+\infty} u_{m_k} = u^*$ v $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ a tím spíše i stejnoměrně na celém $\mathbb{R}^n$. Odtud již plyne, že $u^* = Eu$ skoro všude na $\mathbb{R}^n$, a tedy i skoro všude na U, kde ale skoro všude platí $Eu = u$.

□

7.3 Obecná Sobolevova nerovnost

Věta 7.14 (obecná Sobolevova nerovnost)**.** *Buď U otevřená omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ s C^1–hranicí a $u \in W^{k,p}(U)$. Pokud*

1. *$k < \frac{n}{p}$, potom $u \in L^q(U)$, kde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Navíc existuje konstanta $C = C(k,p,n,U)$ taková, že pro všechna $u \in W^{k,p}(U)$ platí*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

2. *$k > \frac{n}{p}$, potom $u \in C^{k-\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor -1,\gamma}(\bar{U})$, kde $\gamma = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p} & \frac{n}{p} \notin \mathbb{N} \\ \text{jakékoli } \gamma \in (0,1) & \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$*
Navíc existuje konstanta $C = C(k,p,n,\gamma,U)$ taková, že pro každé $u \in W^{k,p}(U)$ existuje reprezentant $u^* \in C^{k-\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor -1,\gamma}(\bar{U})$ této funkce tak, že platí

$$\|u^*\|_{C^{k-\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor -1,\gamma}(\bar{U})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme tvrzení pro $k < \frac{n}{p}$.
Protože $u \in W^{k,p}(U)$, tak pro $\forall\, \alpha : |\alpha| \leq k-1$ platí $D^\alpha u \in W^{1,p}(U)$. Z Věty 7.7 máme pro každé $\alpha : |\alpha| \leq k-1$ odhad

$$\|D^\alpha u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|D^\alpha u\|_{W^{1,p}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

kde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Odtud plyne $u \in W^{k-1,p^*}$ a

$$\|u\|_{W^{k-1,p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

Aplikací téhož postupu na u jakožto prvek W^{k-1,p^*} získáváme

$$\|u\|_{W^{k-2,p^{**}}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k-1,p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

kde $\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$. Postup lze opakovat dokud $\frac{1}{p} - \frac{i}{n} > 0$, což určitě platí pro $i \leq k$. Tím získáváme nerovnost

$$\|u\|_{L^q(U)} = \|u\|_{W^{0,q}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

kde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$.

Dále uvažujme $k > \frac{n}{p}$ a $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$.
Obdobně jako v předchozím případě získáme pro libovolné $\ell \in \mathbb{N} : \ell < \frac{n}{p}$ odhad

$$\|u\|_{W^{k-\ell,r}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n}$. Položíme-li $\ell := \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor < \frac{n}{p}$, potom

$$r = \frac{np}{n - p\ell} > \frac{np}{n - p\left(\frac{n}{p} - 1\right)} = n \tag{74}$$

a

$$\|u\|_{W^{k-\lfloor \frac{n}{p}\rfloor ,r}(U)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(U)}. \tag{75}$$

Z Věty 7.13 s ohledem na (74) plyne $\forall\alpha: \ |\alpha| \le k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1$, $D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{r}}(\bar{U})$ a

$$\|D^\alpha u\|_{C^{0,1-\frac{n}{r}}(\bar{U})} \le C\|D^\alpha u\|_{W^{1,r}(U)} \le C\|u\|_{W^{k-\lfloor \frac{n}{p}\rfloor ,r}(U)}. \tag{76}$$

Jelikož $1-\frac{n}{r} = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$, celkem máme $u \in C^{k-\lfloor \frac{n}{p}\rfloor -1, \lfloor \frac{n}{p}\rfloor + 1 - \frac{n}{p}}(\bar{U})$. Kombinací (75) a (76) dostáváme

$$\|u\|_{C^{k-\lfloor \frac{n}{p}\rfloor -1,\gamma}(\bar{U})} \le C\|u\|_{W^{k,p}(U)}$$

s $\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$.

Nakonec buď $k > \frac{n}{p}$ a $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Položme $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1 = \frac{n}{p} - 1$. Obdobně jako v prvním případě lze ukázat, že

$$\|u\|_{W^{k-\ell,r}(U)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(U)} \tag{77}$$

pro $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n} = \frac{1}{n}$, tedy pro $r = n$. Dále pro všechna $\tilde{r} \in \langle 1, r)$, tedy $\tilde{r} < n$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{k-\ell,\tilde{r}}(U)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k-\ell} \|D^\alpha u\|_{\tilde{r}}^{\tilde{r}}\right)^{\frac{1}{\tilde{r}}} &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k-\ell} |U|^{1-\frac{\tilde{r}}{r}} \|D^\alpha u\|_r^{\tilde{r}}\right)^{\frac{1}{\tilde{r}}} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k-\ell} |U|\right)^{\frac{1}{\tilde{r}}-\frac{1}{r}} \|u\|_{W^{k-\ell,r}(U)},\end{aligned} \tag{78}$$

tj. $u \in W^{k-\ell,\tilde{r}}(U)$. Podle Věty 7.7 pro $\forall\alpha: \ |\alpha| \le k-\ell-1 = k-\frac{n}{p}$, $D^\alpha u \in L^q(U)$ s $q \in \langle 1, \tilde{r}^* \rangle$ a platí příslušný odhad pro normy. Jelikož s naší volbou $\tilde{r}$ máme $\tilde{r}^* \in \langle \frac{n}{n-1}, +\infty)$, $q \in \langle 1, +\infty)$. Celkem tedy pro libovolné $q \in \langle 1, +\infty)$ dostáváme $u \in W^{k-\frac{n}{p},q}(U)$, přičemž

$$\|u\|_{W^{k-\frac{n}{p},q}(U)} \le C\|u\|_{W^{k-l,\tilde{r}}(U)}, \tag{79}$$

kde $\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{q} + \frac{1}{n}$. Pro libovolné $q > n$ nyní z Věty 7.13 ihned odvodíme, že pro $\forall\alpha: \ |\alpha| \le k-\frac{n}{p}-1$ platí $D^\alpha u \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$, kde $\gamma := 1 - \frac{n}{q} \in (0,1)$, a

$$\|u\|_{C^{k-\frac{n}{p}-1,\gamma}(\bar{U})} \le C\|u\|_{W^{k-\frac{n}{p},q}(U)}, \tag{80}$$

Dokazovaný odhad dostaneme kombinací (77), (78), (79) a (80). $\square$

Důsledek 7.15. *Jsou-li pravá strana f a koeficienty eliptického operátoru L v Dirichletově problému* (47) *hladké na celém $\bar{U}$ a současně je hladká i hranice U, potom slabé řešení u tohoto problému je rovněž hladké na $\bar{U}$.*

Důkaz. Podle Věty 6.13, $u \in H^m(U)$ pro libovolné $m \in \mathbb{N}$. Z Věty 7.14 potom plyne, že derivace u libovolného stupně je dokonce hölderovsky spojitá na $\bar{U}$. $\square$

Reference

[1] J. Blank, P. Exner, M. Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Univerzita Karlova, Praha 1993.

[2] L. C. Evans: *Partial Differential Equations, Second Edition*, AMS, Providence 2010.

[3] L. C. Evans, R. F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised Edition, CRC Press, 2015.

[4] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Reprint of the 1998 Edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001.

[5] M. H. Protter, H. F. Weinberger: *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 1984.

[6] M. Rokyta, O. John, J. Málek, M. Pokorný, J. Stará: *Úvod do moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic*, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~mbul8060/moderni_teorie.pdf`, 2009.

[7] P. Šťovíček: *Metody matematické fyziky I: Teorie zobecněných funkcí*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2004.

Úlohy

Úloha 1. *Buď η standardní vyhlazovací funkce, $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$, a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$, kde U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Potom $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f \in C^\infty(U_\varepsilon)$ pro libovolnou $U_\varepsilon := \{x \in U \,|\, \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$. Navíc platí*

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Úloha 2 ($\star$)**.** *Buď u harmonická na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ a $r > 0$ takové, že $B(x_0, r) \subset U$. Potom*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))},$$

kde $k = |\alpha|$. (Návod: Použijte matematickou indukci podle stupně derivace.)

Úloha 3. *Buď $\mathcal{G}$ Greenova funkce pro Poissonovu rovnici na U. Ukažte, že pro všechna $x, y \in U : x \neq y$, $\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{G}(y,x)$. (Návod: Pro pevné $x, y \in U$ položte $v(z) := \mathcal{G}(x,z)$ a $w(z) := \mathcal{G}(y,z)$; potom pro tuto dvojici použijte Greenovu formuli na $U \setminus (B(x,\varepsilon) \cup B(y,\varepsilon))$, kde ε je dostatečně malé; nakonec pošlete $\varepsilon \to 0$.)*

Úloha 4. *Dokažte slabý princip maxima pro eliptický operátor L s nezáporným členem nultého řádu ($c \geq 0$). Ten říká, že každé subřešení u splňuje nerovnost $\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+$, kde u^+ značí kladnou část funkce u. (Návod: Použijte slabý princip maxima pro $L - c$ na oblasti $V := \{x \in U : u(x) > 0\}$.)*

Úloha 5. *Formulujte Hopfovo lemma pro superřešení.*

Úloha 6. *Buď $u \in W^{k,p}(U)$. Dokažte, že slabé derivace $D^\alpha u$ nezávisí na volbě reprezentanta. Dále ukažte, že slabé derivace jsou záměnné, tj. $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ pro α, β : $|\alpha| + |\beta| \leq k$, a že pro libovolnou otevřenou $V : V \subset U$ platí $u \in W^{k,p}(V)$. Konečně dokažte Leibnizovo pravidlo pro součin u s libovolným prvkem $\mathscr{D}(U)$.*

Úloha 7 ($\star$). *Uvažujme na $X := \bigoplus_{i=1}^N X_i$, kde X_i je normovaný prostor, následující normu, tzv. l^p–normu,*

$$\|(f_1, \dots, f_N)\|_p = \left(\sum_{i=1}^N \|f_i\|_{X_i}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$p \in \langle 1, +\infty)$. Ukažte, že jsou-li všechny X_i separabilní, potom i X je separabilní. Pro $p \in (1, +\infty)$ nalezněte duální prostor k X a ukažte, že jsou-li všechny X_i reflexivní, je i X reflexivní. Nejprve uvažujte N konečné a potom se pokuste odvodit totéž pro spočetně nekonečný direktní součet.

Úloha 8. *Buď $k \in \mathbb{N}_0$. Dokažte, že pro libovolné $r > 0$ existuje $\zeta_r \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tak, že*

$$\zeta_r = \begin{cases} 1 & na\ B(0, r) \\ 0 & na\ \mathbb{R}^n \setminus B(0, r+1) \end{cases}$$

a $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$, $\forall r > 0 : \|D^\alpha \zeta_r\| < C$. (Konstanta C tedy nezávisí na volbě α a především ani na volbě r!) Dále ukažte, že pro libovolné $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ platí, že pro jakékoliv $\delta > 0$ nalezneme $r_\delta > 0$ tak, že pro všechna $r > r_\delta$ dostaneme $\|\zeta_r u - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta$.

Úloha 9. *Buď L eliptický. Převeďte slabou formulaci úlohy*

$$\begin{aligned} Lu &= f && na\ U \\ u &= g \neq 0 && na\ \partial U \end{aligned}$$

na slabou formulaci eliptického problému s Dirichletovou hraniční podmínkou.

Úloha 10. *Buďte V otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(V)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(V)$. Dokažte, že pro všechna nenulová v absolutní hodnotě dostatečně malá h platí ("integrace per-partes")*

$$\int_V u D_i^h \varphi \, \mathrm{d}x = - \int_V (D_i^{-h} u) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Úloha 11. *Položme $v^h(x) := v(x + he_i)$. Ukažte, že platí ("Leibnizovo pravidlo")*

$$D_i^h(vw) = (D_i^h v) w + v^h D_i^h w.$$

Úloha 12 ($\star$). *Dokažte vnitřní regularitu vyššího stupně pro slabé řešení eliptické rovnice. Konkrétněji nechť pro $m \in \mathbb{N}_0$: a^{ij}, b^i, $c \in C^{m+1}(U)$, $f \in H^m(U)$ a $u \in H^1(U)$ je slabé řešení rovnice $Lu = f$ na U. Potom $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(U)$ a pro libovolné $V : V \subset\subset U$ platí*

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right),$$

kde konstanta C závisí jen na m, U, V a koeficientech L.

Úloha 13. *Dokažte, že zobrazení*

$$u \mapsto \|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

z Hölderova prostoru $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ do $\langle 0, +\infty)$ je norma a $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ je s touto normou úplný.