

Poznámky k předmětu
Matematika 4
(verze 5)

Bára Jiříčková, **Jana Kozáková**, **Kamila Ooppelová**, Matěj Tušek

LS 2024, Praha

Abstrakt

Tento text je v podstatě přepisem mých ručně psaných poznámek, které vznikly během čínské chřipky v letech 2020-21. Pokrývá celou přednášku k předmětu *Matematika 4*. Za sepsání děkuji Janě Kozákové (kapitoly 1 a 2 včetně ilustrací) a Kamile Ooppelové (kapitoly 3–10), dík za perfektní ilustrace v kapitolách 3–10 potom patří Báře Jiříčkové.

Ačkoliv se text obsahově velmi shoduje s přednáškou, stále nepochybně obsahuje řadu překlepů (které v matematice snadno vedou k posunu významu, tj. chybě) vzniklých zejména, avšak pravděpodobně ne výlučně, přepisem do digitální podoby, proto ho doporučuji jako průvodce přednáškou a nikoliv jako jediný studijní materiál.

Matěj Tušek

Obsah

1	Obyčejné diferenciální rovnice	4
1.1	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	6
1.2	Separovatelné rovnice	8
1.3	Lineární diferenciální rovnice řádu n	10
1.4	Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty	13
1.5	Lineární diferenciální rovnice s pravou stranou	15
2	Funkce více proměnných-základní pojmy, spojitost a limita	19
2.1	Spojitosť funkce více proměnných	21
2.2	Limita funkce více proměnných	21
2.3	Vztah mezi limitou a spojitostí	21
3	Parciální a směrové derivace	21
3.1	Parciální derivace	21
3.2	Směrová derivace	23
3.3	Vektorové funkce	25
3.4	Derivace složené funkce	26
4	Kvadratické formy	27
5	Lokální extrémy funkce více proměnných	29
6	Vázané extrémy funkce více proměnných	33
6.1	Nutná podmínka pro více vazeb	37
7	Funkce zadaná implicitně	38
8	Riemannův integrál v \mathbb{R}^n	41
8.1	Vlastnosti vícerozměrného Riemannova integrálu	45
8.2	Výpočet Riemannova vícerozměrného integrálu	45
8.2.1	Fubiniho věta	45
8.2.2	Věta o substituci	49
9	Významné substituce	51
9.1	Polární souřadnice	51
9.2	Cylindrické souřadnice	52
9.3	Sférické souřadnice	53
10	Ukázky aplikací integrálu	55
10.1	Výpočet ploch a objemů	55
10.2	Výpočet „průměru“ hodnot funkce na množině, tj. střední hodnoty funkce	55
10.3	Výpočet složek těžiště	56

Notace

\mathbf{x}	prvek \mathbb{R}^n
$\ \mathbf{x}\ $	eukleidovská norma vektoru \mathbf{x}
$C^n(I)$	prostor funkcí, které mají na intervalu I spojitě derivace do řádu n
$f^{(n)}$	derivace funkce f řádu n
$\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(\mathbf{x}_0)$	Wronského determinant funkcí f_1, \dots, f_n v bodě \mathbf{x}_0

1 Obyčejné diferenciální rovnice

Motivace

1. Volný pád

Těleso padá v homogenním tíhovém poli, budeme uvažovat jednorozměrný případ pádu podél osy x . Na těleso působí pouze tíhová síla $F_g = mg$, kterou je těleso přitahováno k zemi.
2. Newtonův pohybový zákon nám dává závislost $x = x(t)$ pro danou sílu F .

$$F(x, t) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Určíme počáteční podmínky. Na počátku pádu v čase $t = 0$ je těleso v poloze $x(0) = 0$ a je v klidu, tedy $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$.

Sestavíme diferenciální rovnici:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = g, \text{ kde } g = \textit{konst.}$$

Řešíme integrací, konstanty určíme z počátečních podmínek:

$$\frac{dx}{dt} = \int g dt = gt + C_1, \text{ z poč. p. } 0 = \frac{dx}{dt}(0) = g \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$
$$x(t) = \int gt dt = \frac{1}{2}gt^2 + C_2, \text{ z poč. p. } 0 = x(0) = \frac{g \cdot 0^2}{2} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Úloha 1. *Jak se změní řešení diferenciální rovnice $\frac{d^2x}{dt^2} = g$, změníme-li počáteční podmínky?*

2. Radioaktivní rozpad

Radioaktivní rozpad je stochastický proces. V látce je v nějakém čase t N jader radionuklidů, které neprošly přeměnou. Zajímá nás počet nezměněných jader radionuklidů v látce v závislosti na čase t , tj. hledáme funkci $N = N(t)$.

Sestavíme rovnici na základě předpokladu, že rychlost přeměny je úměrná počtu zatím nerozpadlých jader:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad \lambda > 0 \dots \text{přeměnová konst., char. rychlost přeměny radionuklidu} \quad (1)$$

Formální úpravou dostaneme:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Řešíme integrací obou stran rovnice (později si ukážeme, že korektní způsob vede ke stejnému výsledku):

$$\ln N = -\lambda t + C \quad / \exp()$$
$$N = Ke^{-\lambda t}$$

Konstantu K určíme z počáteční podmínky $N(0) = N_0$. Celkem máme:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Definice 1.1. *Bud' F funkce $(n + 2)$ proměnných, kde $n \in \mathbb{N}$, tj. $F : \text{Dom}(F) \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$, která je nekonzstantní v poslední proměnné. Potom symbol*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (2)$$

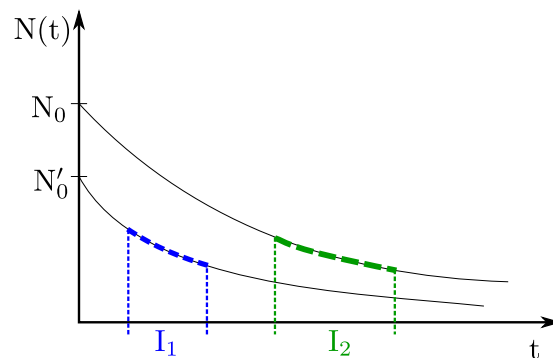
nazýváme obyčejnou diferenciální rovnicí řádu n . Řešením rovnice rozumíme takovou funkci $y = y(x)$ na otevřeném intervalu I , která splňuje následující:

1. $(\forall x \in I)((x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \text{Dom}(F))$,
2. $(\forall x \in I)F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$.

Poznámka 1.2. *Obyčejné diferenciální rovnice uvedené v Motivaci můžeme zapsat v podobě podle (2).*

$$\begin{array}{ll} \frac{d^2x}{dt^2} - g = 0 & F = F(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_4 - g = 0 \\ \frac{dN}{dt} + \lambda N = 0 & F = F(b_1, b_2, b_3) = b_3 + \lambda b_2 = 0 \end{array}$$

Poznámka 1.3. *Proč uvažujeme řešení rovnice $y = y(x)$ na otevřeném intervalu I ? V případě uzavřeného intervalu by bylo třeba uvažovat i jednostranné derivace v krajních bodech intervalu. Zejména ale máme-li sjednocení dvou intervalů $I_1 \cup I_2$, nedostali bychom jednoznačnost pro nějakou zvolenou počáteční podmínku.*



Obr. 1: Řešení rovnice (1) na otevřených intervalech I_1 a I_2 .

Definice 1.4. *Je-li funkce $y = y(x)$ řešením obyčejné diferenciální rovnice (2) na intervalu I a $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ je řešením (2) na intervalu \tilde{I} , přičemž $I \subset \tilde{I}$ a současně platí $(\forall x \in I)(y(x) = \tilde{y}(x))$, potom \tilde{y} se nazývá rozšířením y a y se nazývá zúžením \tilde{y} . Řešení, které již nelze dále rozšířit, se nazývá maximální.*

Definice 1.5. Lze-li (2) přepsat jako $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, kde f je funkce $(n+1)$ proměnných, potom říkáme, že obyčejná diferenciální rovnice je vyřešena vůči nejvyšší derivaci.

Věta 1.6 (Peanova). Pokud je funkce f spojitá na podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^{(n+1)}$, potom pro libovolný bod $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Omega$ existuje alespoň jedno řešení rovnice $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ procházející tímto bodem.

Bez důkazu.

1.1 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Obecný tvar lineární diferenciální rovnice 1. řádu:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad (3)$$

Předpokládáme, že funkce $p(x)$ a $q(x)$ jsou spojité na intervalu $I \in \mathbb{R}$. Naším úkolem je najít řešení $y = y(x)$.

Pro případ, kdy $p(x) = 0$ se LDR 1. řádu zjednoduší a řešení $y = y(x)$ hledáme integrací obou stran rovnice

$$\begin{aligned} y'(x) &= q(x) \\ y(x) &= Q(x) + C, \text{ kde } Q(x) \text{ je primitivní funkce } q(x) \end{aligned}$$

Pro případ, kdy $p(x) \neq 0$ hledáme řešení LDR 1. řádu přenásobením vhodným faktorem a integrací, tedy zavádíme tzv. *integrační faktor*.

Integrační faktor:

$$e^{\int p(x) dx} \equiv e^{P(x)}$$

Integrační faktorem vynásobíme LDR 1. řádu v obecném tvaru (3)

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x)y(x) &= q(x) \quad / e^{P(x)} \\ e^{P(x)}y'(x) + \underbrace{p(x)e^{P(x)}}_{\frac{d}{dx}e^{P(x)}}y(x) &= q(x)e^{P(x)} \end{aligned}$$

Dále opačně aplikujeme pravidlo derivace součinu funkcí a výsledný vztah zintegrujeme:

$$\begin{aligned} \left(e^{P(x)}y(x) \right)' &= q(x)e^{P(x)} \quad / \int dx \\ e^{P(x)}y(x) &= \int q(x)e^{P(x)} dx + C \\ y(x) &= e^{-P(x)} \left(\int q(x)e^{P(x)} dx + C \right) \end{aligned}$$

Definičním oborem řešení je $D_y \equiv \text{Dom}(y) = I$.

Poznámka 1.7. Konstantu C určíme z počáteční podmínky.

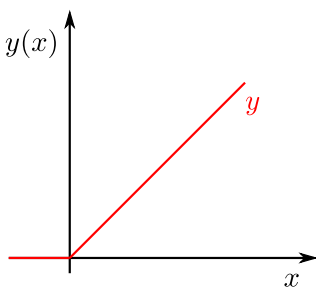
Příklad 1.1 (Neexistence řešení). Mějme rovnici

$$y'(x) = \Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$$

kde $\Theta(x)$ je tzv. Heavisideova theta funkce, s počáteční podmínkou $y(0) = 0$. Rovnice budeme dále řešit na dvou intervalech

$$\begin{aligned} x < 0 \quad y'(x) = 0 : y(x) = C, \quad 0 = y(0) = C \Rightarrow C = 0, \\ x > 0 \quad y'(x) = 1 : y(x) = x + q, \quad 0 = y(0) = 0 + q, \Rightarrow q = 0. \end{aligned}$$

Chceme-li složit řešení rovnic, abychom získali řešení pro bod $(0,0)$, dojdeme k závěru, že výsledná funkce není diferencovatelná v bodě $x = 0$. Znovu si tedy prohlédneme zadanou Heavisideovu funkci, ta není spojitá v $x = 0$, tedy nespĺňuje předpoklady Peanovy věty – existence řešení tak není nutně zaručena.



Obr. 2: Řešení rovnice $y'(x) = \Theta(x)$.

Věta 1.8 (Picardova). Nechť diferenciální rovnice 1. řádu je vyřešena vůči nejvyšší derivaci, tj. $y' = f(x, y(x))$. Funkce f buď spojitá v 1. proměnné a Lipschitzovsky spojitá v 2. proměnné na okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom na nějakém okolí bodu x_0 existuje právě jedno řešení procházející bodem (x_0, y_0) , tj. splňující $y(x_0) = y_0$.

Poznámka 1.9 (Lipschitzovská spojitost). Funkce f je v 2. proměnné Lipschitzovsky spojitá na I , existuje-li konstanta K tak, že

$$(\forall y_1, y_2 \in I) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Úloha 2. Uvedte příklad Lipschitzovsky spojitě funkce.

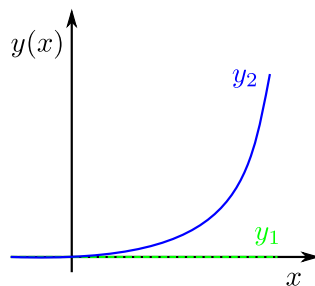
Příklad 1.2. Mějme rovnici $y'(x) = y^{\frac{2}{3}}$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$. Té vyhovují (např.) dvě řešení

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \\ y_2 &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{3}\right)^3 & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nemůžou být tedy splněny předpoklady Picardovy věty. Skutečně funkce $y \mapsto y^{\frac{2}{3}}$ není Lipschitzovsky spojitá na žádném okolí $y = 0$. Neexistuje totiž konstanta K taková, aby byla Lipschitzovská spojitost splněna. Pokud by existovala, potom

$$\begin{aligned} |y_1^{\frac{2}{3}} - y_2^{\frac{2}{3}}| &\leq K|y_1 - y_2| \\ |y_1^{\frac{2}{3}}| &\leq K|y_1| \quad \text{pro } y_2 = 0 \\ |y_1^{-\frac{1}{3}}| &\leq K, \end{aligned}$$

což nemůže platit na okolí nuly.



Obr. 3: Řešení rovnice $y'(x) = y^{\frac{2}{3}}$.

1.2 Separovatelné rovnice

Obecný tvar separovatelné diferenciální rovnice

$$f(x) = g(y)y' \tag{4}$$

Pro jednoduchost předpokládáme, že funkce $f(x), g(y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a jsou na celém \mathbb{R} spojitě. Naším úkolem je najít řešení $y = y(x)$.

Motivace

Máme separovatelnou diferenciální rovnici v obecném tvaru a hledáme řešení. Derivaci y' rozepíšeme do tvaru zlomku $\frac{dy}{dx}$, jmenovatelem dx přenásobíme rovnici a poté ji integrujeme.

$$\begin{aligned} f(x) = g(y)y' &= g(y) \frac{dy}{dx} \quad / \, dx \\ f(x) \, dx &= g(y) \, dy \quad / \, \int \\ F(x) &= G(y) + C, \end{aligned}$$

kde $F(x) = \int f(x) \, dx$, $G(y) = \int g(y) \, dy$ a $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Získali jsme takto řešení v implicitním tvaru. Tento postup však není matematicky zcela správně (k derivaci se nelze chovat jako ke zlomku).

Rigorózní postup

Obecný tvar separovatelné rovnice upravíme do tvaru

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Předpokládáme, že $f(x)$ a $g(y)$ jsou spojité a $g(y) \neq 0$. Z Peanovy věty vyplývá, že existuje řešení diferenciální rovnice $y = y(x)$ procházející bodem (x_0, y_0) .

$$\begin{aligned} f(x) &= g(y(x))y'(x) \quad / \int dx \\ F(x) &= \int g(y(x))y'(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ y = y(x) \\ \frac{dy}{dx} = y'(x) \\ dy = y'(x) dx \end{array} \right. \\ F(x) &= \int g(y) dy \\ F(x) &= G(y(x)) + C \\ y(x) &= G^{-1}(F(x) - C) \end{aligned}$$

Funkce $F(x)$ a $G(y)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$ a $g(y)$ a $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Funkce $G^{-1}(y)$ existuje, protože $G(y)$ je ostře monotónní, neboť $G'(y) = g(y) \neq 0$ a zároveň je $g(y)$ spojitá. Ostře monotónní funkce je prostá, a tedy i invertibilní.

Příklad 1.3. Najděte řešení rovnice $y' - 1 = y^2$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' = y^2 + 1 \\ \frac{dy}{y^2 + 1} &= dx \\ \int \frac{dy}{y^2 + 1} &= \int dx \\ \arctan y &= x + C \\ y &= \tan(x + C), \end{aligned}$$

Definiční obor funkce tangens je

$$\text{Dom}(\tan(x)) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right),$$

potom definiční obor na otevřených intervalech definovaných funkcí y_k vychází

$$\text{Dom}(y_k) = \left(-\frac{\pi}{2} - C + k\pi, \frac{\pi}{2} - C + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

1.3 Lineární diferenciální rovnice řádu n

Obecný tvar lineární diferenciální rovnice řádu n

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + p_1y' + p_0y = q \quad (5)$$

Předpokládáme, že funkce p_i a q jsou spojité na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Při řešení těchto diferenciálních rovnic budeme postupovat ve dvou fázích: 1. hledáme řešení homogenní LDR řádu n (tedy s nulovou pravou stranou), 2. hledáme partikulární řešení.

Homogenní diferenciální rovnice řádu n

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + p_1y' + p_0y = 0 \quad (6)$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme lineární diferenciální operátor na vektorovém prostoru funkcí $C^{(n)}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f, f', \dots, f^{(n)} \text{ spojité na } I\}$

$$\mathcal{L} := \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_1 \frac{d}{dx} + p_0.$$

Diferenciální rovnici (5) zapíšeme ve tvaru $\mathcal{L}y = q$ a rovnici (6) zapíšeme jako $\mathcal{L}y = 0$.

Definice 1.10. Soubor funkcí $\{f_i\}_{i=1}^n \subset C^{(n)}(I)$ je lineárně nezávislý na intervalu I právě tehdy, když $(\forall x \in I)(\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0) \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(c_i = 0)$.

Věta 1.11. Množina všech řešení homogenní rovnice (6) je lineární podprostor $C^{(n)}$ dimenze n .

Důkaz. 1. Ukážeme, že množina všech řešení rovnice (6) je podprostor, tj. množina uzavřená vůči lineárním kombinacím. Nechť

$$f, g \in C^{(n)}(I) : \mathcal{L}f = 0, \mathcal{L}g = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$\mathcal{L}(\alpha f + g) = 0 : \mathcal{L} \text{ je lineární} \Rightarrow \mathcal{L}(\alpha f + g) = \alpha \mathcal{L}f + \mathcal{L}g = \alpha \cdot 0 + 0 = 0.$$

2. Ukážeme, že podprostor z 1. bodu je dimenze n . Zkonstruujeme bázi tohoto podprostoru.

$y_i = y_i(x), i \in \hat{n}$, volím jako řešení $\mathcal{L}y_i = 0$ vyhovující podmínce $y_i^{(k)}(x_0) = \delta_{i,k+1}; k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

kde x_0 je libovolný bod z I .

2a. Množina $\{y_i\}_{i=1}^n$ je lineárně nezávislá:

$$(\forall x \in I) \left(\sum_{i=1}^n c_i y_i(x) = 0 \right) \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^n c_i y_i(x_0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Obě strany zderivujeme.

$$(\forall x \in I) \left(\sum_{i=1}^n c_i y_i'(x) = 0 \right) \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^n c_i y_i'(x_0) = c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Podobně postupujeme s derivacemi až do řádu $n-1$. Dostaneme tak, že $(\forall i \in \hat{n})(c_i = 0)$.

2b. Množina $\{y_i\}_{i=1}^n$ generuje celý podprostor:

y je řešením (6), tj. $\mathcal{L}y = 0$, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Ukážeme, že

$$(\forall x \in I) \left(y(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x) \right) = (\star).$$

Dosazením $x = x_0$ do (\star) dostaneme kandidáta na konstantu α_1 :

$$y_0 = y(x_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x_0) = \alpha_1 \cdot 1 = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = y_0$$

Derivací (\star) dostaneme další konstanty α_i :

$$\alpha_2 = y'_0, \dots, \alpha_n = y_0^{(n-1)}$$

S touto volbou konstant jsou levá i pravá strana (\star) řešením téže diferenciální rovnice se shodnou počáteční podmínkou. Z věty o jednoznačnosti řešení platí (\star) skutečně na celém I . □

Definice 1.12. *Bázi prostoru všech řešení homogenní rovnice (6) na intervalu I nazýváme fundamentální systém řešení rovnice.*

Důsledek 1.13. *K nalezení libovolného řešení homogenní rovnice (6) postačuje nalézt nějaký její fundamentální systém.*

Věta 1.14. *Nechť u je jedno řešení diferenciální rovnice (5). Potom libovolné další řešení y rovnice (5) je $y = u + v$, kde v řeší (6).*

Důkaz.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = q, \mathcal{L}y = q &\stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{L}(y - u) = 0 : \\ \mathcal{L}(y - u) = \mathcal{L}y - \mathcal{L}u &= q - q = 0 \end{aligned}$$

□

Vsuvka – Lineární závislost a nezávislost funkcí

Funkce f_1, \dots, f_n jsou lineárně nezávislé (LN) na otevřeném intervalu I právě tehdy, když

$$(\forall x \in I) \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0 \right) \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(c_i = 0).$$

Definice 1.15. *Systém funkcí $\{y_i\}_{i=1}^n$ je lineárně závislý (LZ) na intervalu I právě tehdy, pokud není lineárně nezávislý na intervalu I .*

Příklad 1.4. *Rozhodněte, zda jsou funkce f_1 a f_2 lineárně nezávislé.*

$f_1 = \sin x, f_2 = \cos x, I \in \mathbb{R}$

Pokud by byly funkce f_1 a f_2 lineárně závislé, pak by existovala konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$ taková, že $f_1 = \alpha f_2$ nebo $f_2 = \alpha f_1$, tedy $\sin x = \alpha \cos x$ nebo $\cos x = \alpha \sin x$. Taková konstanta však neexistuje. Funkce jsou lineárně nezávislé.

Definice 1.16 (Wronského determinant). *Bud' $\{f_i\}_{i=1}^n \subset C^{(n-1)}(I)$. Potom determinant matice*

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) & \dots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & \dots & f_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

nazýváme Wronského determinant (wronskián) funkcí f_1, \dots, f_n v bodě x_0 .

Značíme ho $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x_0)$.

Věta 1.17. *Jsou-li funkce $(f_1, \dots, f_n) \in C^{(n-1)}(I)$ lineárně závislé na intervalu I , potom $(\forall x \in I) \mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x) = 0$.*

Důkaz. Jsou-li funkce LZ, pak existují konstanty $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, z nich alespoň jedna nenulová, tak, že

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0 \quad (\forall x \in I).$$

Derivujeme dle x :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i f_i'(x) &= 0 \quad (\forall x \in I) & / \frac{d}{dx} \\ \sum_{i=1}^n c_i f_i''(x) &= 0 \quad (\forall x \in I) & / \frac{d}{dx} \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n c_i f_i^{(n-1)}(x) &= 0 \quad (\forall x \in I) \end{aligned}$$

Součty derivovaných funkcí zapíšeme do matice.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)}(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abychom dostali nulovou pravou stranu pro nenulový vektor (c_1, \dots, c_n) , musí být $\det \mathcal{W}$ nulový v každém bodě, tedy $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x) = 0 \quad (\forall x \in I)$. \square

Důsledek 1.18. *Odměněná implikace předchozí věty: $(\exists x \in I)(\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x) \neq 0) \Rightarrow (f_1, \dots, f_n)$ je lineárně nezávislá na I .*

Věta 1.19. *Je-li pro nějaké $x_0 \in I : \mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x_0) = 0$ a navíc jsou-li f_1, \dots, f_n řešením těžké homogenní LDR, potom je systém (f_1, \dots, f_n) lineárně závislý na I a navíc $(\forall x \in I) \mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x) = 0$.*

Bez důkazu.

Příklad 1.5. Budte $f(x) = x^2$ a $g(x) = x|x|$. Potom $(\forall x \in \mathbb{R})(\mathcal{W}(f, g)(x) = 0)$, ale přitom jsou tyto funkce LN na \mathbb{R} .

1.4 Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Obecný tvar homogenní LDR

$$\tilde{\mathcal{L}}y := a_n y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (7)$$

kde $a_n, \dots, a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_n \neq 0$. Uvažujeme tedy řešení rovnic pouze s konstantními koeficienty.

Motivace

Hledáme řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x}, & \lambda \in \mathbb{C} \\ y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice (7).

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \quad (\forall x \in I)$$

Rovnici můžeme vydělit $e^{\lambda x}$, čímž dostaneme charakteristický polynom v proměnné λ .

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, obecně $m \leq n$. Rovnici (7) řeší (obecně komplexní) exponenciála $e^{\lambda_i x}$.

Vsuvka – Komplexní exponenciála

Mějme komplexní číslo z definované jako $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je komplexní jednotka, $i^2 = -1$. Exponenciálu komplexního čísla e^z můžeme definovat pomocí Taylorova polynomu

$$e^z := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Komplexně sdružené číslo k číslo z je $\bar{z} = a - bi$. Pro komplexně sdruženou exponenciálu platí $\overline{e^{ib}} = e^{-ib}$, protože $\overline{e^{ib}} = \cos b - i \sin b = \cos(-b) + i \sin(-b) = e^{-ib}$. Absolutní hodnota ryze komplexní exponenciály je dána jako $|e^{ib}| = \sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$.

Vsuvka – O kořenech polynomů

Základní věta algebry: Polynom stupně n s reálnými nebo komplexními koeficienty má právě n kořenů z \mathbb{C} , počítáme-li jejich násobnosti.

Polynom stupně n le tedy rozložit následujícím způsobem

$$p_n(\lambda) = a_n \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j)^{k_j}; \quad \sum_{j=1}^m k_j = n,$$

kde k_j je algebraická násobnost kořene λ_j .

Pozorování: Komplexně sdružené číslo ke kořenu λ polynomu $p_n(\lambda)$ s reálnými koeficienty a_i je rovněž kořenem tohoto polynomu. Komplexně sdružený polynom $\overline{p_n(\lambda)}$ lze totiž zapsat ve tvaru

$$\overline{p_n(\lambda)} = \overline{\sum_{j=1}^n a_j \lambda^j}$$

Dále komplexně sdružený součet je součtem komplexně sdružených sčítanců a podobně pro součin. Koeficienty a_i jsou reálné, tedy platí $\overline{a_i} = a_i$. Máme tedy

$$\overline{p_n(\lambda)} = \overline{\sum_{j=1}^n a_j \lambda^j} = \sum_{j=1}^n \overline{a_j \lambda^j} = \sum_{j=1}^n \overline{a_j} \overline{\lambda^j} = \sum_{j=1}^n a_j \overline{\lambda^j} = p_n(\overline{\lambda}) = 0.$$

Věta 1.20. *Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, ($m \leq n$) jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristického polynomu rovnice (7), tj. $\sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^j = 0$ ($\forall i \in \hat{m}$) s násobnostmi k_1, \dots, k_m , $\sum_{j=1}^m k_j = n$, potom rovnice (7) má následující fundamentální systém:*

$$\left. \begin{array}{l} e^{\lambda_1 x} \quad x e^{\lambda_1 x} \quad \dots \quad x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x} \quad x e^{\lambda_2 x} \quad \dots \quad x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ e^{\lambda_m x} \quad x e^{\lambda_m x} \quad \dots \quad x^{k_m-1} e^{\lambda_m x} \end{array} \right\} n \text{ LN funkcí.}$$

Bez důkazu.

Příklad 1.6. *Nalezněte fundamentální systém rovnice $y^{(4)} - y = 0$. Sestavíme charakteristický polynom a spočteme jeho kořeny.*

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\text{kořeny: } \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -i \quad \lambda_4 = i$$

Sestavíme fundamentální systém $\tilde{F}S : \{e^x, e^{-x}, e^{-ix}, e^{ix}\}$.

Lineární kombinací prvků $\tilde{F}S$ získáme FS s reálnými funkcemi, $FS : \{e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x\}$, který rovněž řeší (7).

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Poznámka 1.21 (Přechod k \mathbb{R} fundamentálnímu systému). $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ je kořenem charakteristického polynomu s reálnými koeficienty, potom $\bar{\lambda}$ je také kořenem charakteristického polynomu $\rightarrow 2$ řešení

$$\tilde{y}_1(x) := e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax+ibx} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$\tilde{y}_2(x) := e^{\bar{\lambda}x} = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$$

$\rightarrow 2$ reálná řešení

$$y_1(x) = \frac{\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)}{2} = e^{ax} \cos(bx)$$

$$y_2(x) = \frac{\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_2(x)}{2i} = e^{ax} \sin(bx)$$

Poznámka 1.22 (Obecné řešení).

$$y(x) = \underbrace{y_p(x)}_{\substack{\text{partikulární řešení} \\ \text{tj. lib. řešení (5)}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i y_i(x)}_{\substack{\text{obecné řešení rovnice} \\ \text{s nulovou PS}}}$$

$C_i \in \mathbb{R}$ se dopočtou z počáteční podmínky (předepsaných reálných hodnot):

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

1.5 Lineární diferenciální rovnice s pravou stranou

Obecný tvar

$$\mathcal{L}y = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = q \quad (8)$$

Předpokládáme, že funkce p_i, q jsou spojité na $I \subset \mathbb{R}$.

Ansatz¹ – Variace konstant

Odhadujeme, že řešení rovnice s pravou stranou je

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i,$$

kde c_i jsou zatím neznámé funkce na intervalu I . Poté dosadíme do rovnice (5).

¹edukovaný odhad

Na každý sčítanec aplikujeme Leibnizovo pravidlo a naložíme dodatečné podmínky na funkce c_i

$$\begin{aligned}
 y' &= \sum_{i=1}^n c_i y_i' + \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i' y_i}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ na } I} \\
 y'' &= \sum_{i=1}^n c_i y_i'' + \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i' y_i'}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ na } I} \\
 &\vdots \\
 y^{(k)} &= \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(k)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i' y_i^{(k-1)}}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ na } I} \\
 y^{(n)} &= \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n c_i' y_i^{(n-1)}
 \end{aligned}$$

Dosadíme do (8).

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n c_i' y_i^{(n-1)} + p_{n-1} \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n-1)} + \dots + p_0 \sum_{i=1}^n c_i y_i &= q \\
 \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{\mathcal{L}y_i}_{= 0 \text{ na } I} + \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i' y_i^{(n-1)}}_{\text{požadujeme, aby platilo na } I} &= q
 \end{aligned}$$

Řešení jsme takto redukovali na to, zda zvládneme najít c_i , pro které máme n podmínek, které lze zapsat do matice.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q \end{pmatrix}$$

Soustava rovnic je řešitelná právě tehdy, když je matice soustavy regulární, tj. právě tehdy, když je determinant matice nulový. To ale platí, protože se jedná o Wronského matici FS.

Poznámka 1.23 (Cramerovo pravidlo). *Zavedeme determinanty $\Delta = \mathcal{W}(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ a Δ_i definovaný jako*

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & 0 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & 0 & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & q & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

kde za i -tý sloupec dosadíme pravou stranu řešené rovnice $(0, 0, \dots, q)^T$.
Získáme c'_i jako podíl Δ_i a Δ ,

$$c'_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

c_i získáme integrací c'_i , tj.

$$c_i = \int c'_i + K_i,$$

kde $K_i \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

Dosadíme za c_i zpět do řešení $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$,

$$y = \sum_{i=1}^n \left(\int c'_i + K \right) y_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\int c'_i \right) y_i}_{\text{partikulární řeš.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n K_i y_i}_{\text{homogenní řeš.}}$$

Poznámka 1.24. Nevýhoda variace konstant je výpočetní náročnost, zejména integrace. Ve speciálních případech pravé strany diferenciální rovnice lze řešit jednodušeji ansatzem.

Speciální pravé strany

Příklad 1.7. Najděte partikulární řešení rovnice $y''' - 3y'' + 4y = x^2 + 2x$.

Rovnice má speciální pravou stranu – polynom stupně 2. Odhadneme partikulární řešení jako polynom druhého stupně $y_p = ax^2 + bx + c$, přičemž budeme hledat hodnoty konstant $a, b, c \in \mathbb{R}$. V řešené LDR se vyskytují derivace do 3. stupně. Postupně tedy budeme y_p derivovat.

$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 + bx + c \\ y'_p &= 2ax + b \\ y''_p &= 2a \\ y'''_p &= 0 \end{aligned}$$

Tyto mezivýsledky dosadíme do levé strany řešené LDR.

$$-6a + 4ax^2 + 4bx + 4c = x^2 + 2x \quad (\forall x \in I)$$

Nyní přejdeme k výpočtu konstant a, b, c . Rozepíšeme rovnici podle mocniny x na soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} x^2 : & \quad 4a = 1 \\ x^1 : & \quad 4b = 2 \\ x^0 : & \quad -6a + 4c = 0 \end{aligned}$$

Získali jsme hodnoty konstant $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{8}$. Partikulární řešení rovnice tedy vychází

$$y_p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}, \quad \text{Dom}(y_p) = \mathbb{R}.$$

Příklad 1.8. Najděte partikulární řešení rovnice $y'' + y' = x^2$.

Tato rovnice má také speciální pravou stranu – polynom stupně 2. Odhadneme tedy partikulární řešení opět obecný polynom stupně 2 – $y_p = ax^2 + bx + c$. Postupujeme obdobně jako u předchozího příkladu. Obecný polynom dvakrát zderivujeme a dosadíme do levé strany řešené rovnice.

$$\begin{aligned}y_p &= ax^2 + bx + c \\y'_p &= 2ax + b \\y''_p &= 2a \\2a + b + 2ax &= x^2\end{aligned}$$

Rozepíšeme podle mocniny x na soustavu rovnic. Hned u x^2 narazíme na problém, protože vychází rovnost $x^2 : 0 = 1$, kterou nelze splnit. Odhadované řešení y_p tedy není správné a je nutné provést lepší odhad partikulárního řešení.

Provedeme nový odhad řešení $y_r = x(ax^2 + bx + c)$. Postupujeme obdobně. Derivujeme a zapíšeme do levé strany LDR.

$$\begin{aligned}y_r &= ax^3 + bx^2 + cx \\y'_r &= 3ax^2 + 2bx + c \\y''_r &= 6ax + 2b \\6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c &= x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 : \quad &3a = 1 \\x^1 : \quad &2b + 6a = 0 \\x^0 : \quad &c + 2b = 0\end{aligned}$$

Řešením soustavy získáme hodnoty $a = \frac{1}{3}, b = -1, c = 2$. Partikulární řešení rovnice vychází

$$y_r = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x, \text{ Dom}(y_r) = \mathbb{R}.$$

Obecně lze speciální pravé strany (PS) rozdělit na dvě skupiny, které mají své typické tvary odhadu partikulárního řešení (ansatzu).

1. $PS = P(x)e^{\mu x}$, kde $P(x)$ je polynom stupně m a μ je ρ -násobný kořen char. polynomu
→ ansatz: $y_p(x) = x^\rho Q(x)e^{\mu x}$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n
2. $PS = e^{\alpha x}(P(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x))$, kde $P(x)$ a $R(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m a $\alpha + \beta i$ je ρ -násobný kořen char. polynomu
→ ansatz: $y_p(x) = x^\rho(Q(x) \cos(\beta x) + S(x) \sin(\beta x))e^{\alpha x}$, kde $Q(x)$ a $S(x)$ jsou polynomy stupně m

2 Funkce více proměnných-základní pojmy, spojitost a limita

Funkcí více proměnných rozumíme zobrazení f otevřené podmnožiny $\text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

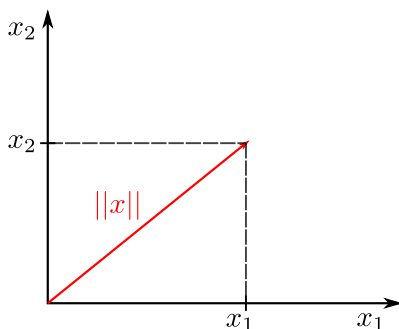
$$f : \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^n \ (n \in \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} (\in \text{Dom}(f)) \longmapsto f(\mathbf{x}) (\in \mathbb{R}).$$

Dále si zadefinujeme základní pojmy, které budeme dále používat, jsou to norma, skalární součin a metrika.

Norma

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Na prostoru \mathbb{R}^n definujeme eukleidovskou normu vektoru \mathbf{x} : $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.



Obr. 4: Norma vektoru \mathbf{x} .

Platí následující vztahy: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$
2. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$... trojúhelníková nerovnost
3. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Vlastnosti 1., 2., 3. lze uvažovat za axiomy a získat tak další normy.

Skalární součin

Dva vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} svírají úhel α . Platí následující vztah:

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|},$$

kde jsme zavedli standardní skalární součin vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} jako

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Skalární součin generuje normu vektoru:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

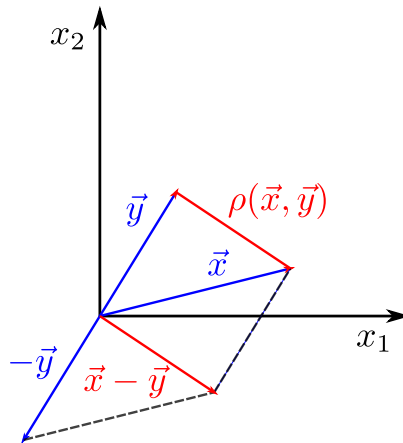
Platí následující vztahy: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1. $\langle \alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Metrika

Metriku $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definujeme jako normu rozdílu vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} ,

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$



Obr. 5: Grafické znázornění metriky $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ generované eukleidovskou normou.

Platí následující vztahy: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$

1. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
2. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$
3. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$

Vztahy 1., 2., a 3. lze považovat za axiomy a získat tak například následující metriku.

Příklad 2.1 (Triviální metrika). *Mějme množinu studentů M , $M = \{S : S \text{ je student MAT4}\}$, $\rho : M \times M \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$. Můžeme zavést metriku, která vyhovuje axiomům*

$$\rho(S_1, S_2) := \begin{cases} 1 & S_1 \neq S_2 \\ 0 & S_1 = S_2 \end{cases}.$$

2.1 Spojitost funkce více proměnných

Motivace

Funkce jedné proměnné: Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta) (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

Funkce n proměnných

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) (|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon)$.

Definice 2.1. ε -okolím bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, kde $\varepsilon > 0$, rozumíme množinu

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\}.$$

Definice 2.2. Buď $f : \text{Dom}f(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ funkce definovaná na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \text{Dom}f$. Potom funkce f je spojitá v \mathbf{a} právě tehdy když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_\delta(\mathbf{a}) \cap \text{Dom}f)(|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon).$$

2.2 Limita funkce více proměnných

Definice 2.3. Redukovaným okolím bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu $\mathcal{U}_\varepsilon^*(\mathbf{a}) := \mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\}$.

Definice 2.4. Buď $f : \text{Dom}f(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ funkce definovaná na nějakém redukovaném okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Potom funkce f má v bodě \mathbf{a} limitu $c \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\mathbf{a}) \cap \text{Dom}f)(|f(\mathbf{x}) - c| < \varepsilon).$$

2.3 Vztah mezi limitou a spojitostí

Pozorování: Je-li funkce f v bodě \mathbf{a} spojitá, pak platí $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Pozorování: Lze dosáhnout opačné implikace? Je-li funkce f spojitá na $\text{Dom}f \setminus \{\mathbf{a}\}$ a existuje-li v bodě \mathbf{a} limita, pak lze funkci f dodefinovat/předefinovat na \tilde{f} , která již bude spojitá v bodě \mathbf{a} .

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \dots \mathbf{x} \in \text{Dom}(f) \setminus \{\mathbf{a}\} \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) & \dots \mathbf{x} = \mathbf{a} \end{cases}$$

3 Parciální a směrové derivace

3.1 Parciální derivace

Definice 3.1. Buď $f : \text{Dom}f(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \text{Dom}(f)$. Parciální derivací funkce f podle proměnné x_i v bodě \mathbf{a} nazýváme vlastní limitu (existuje-li)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Poznámka 3.2. Zavedeme-li $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako $\psi_i(x) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$, potom

$$\frac{d\psi_i}{dx}(a_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_i(a_i + h) - \psi_i(a_i)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

\Rightarrow výpočet parciální derivace podle x_i : zafixujeme všechna $x_j, j \neq i$, a funkci f derivujeme stejně jako bychom derivovali funkci jedné proměnné x_i .

Poznámka 3.3. Parciální derivaci podle x_i lze spočítat ve všech bodech, kde existuje, a na výsledek lze nahlížet jako novou funkci $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tzn. lze potom opět derivovat podle proměnné $x_j, j \in \hat{n}$. Klademe:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right)(\mathbf{a})$$

Terminologie.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \dots$ druhá parciální derivace podle x_i

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \dots$ (smíšená) parciální derivace podle x_i a x_j

POZOR! V případě smíšených derivací obecně **závisí** na pořadí derivování!

Příklad 3.1. Nalezněte druhé smíšené parciální derivace funkce $f(x, y) = |x| + y$ v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$.

1.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = 0 \quad (\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2)$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{neexistuje} & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{neexistuje } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

Podobně lze zavést i k -tou parciální derivaci podle $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, kde $i_1, i_2, \dots, i_k \in \hat{n}$, jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \Big|_{\mathbf{a}} := \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}} \right) \right) \Big|_{\mathbf{a}}$$

Definice 3.4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na jistém okolí bodu \mathbf{a} a nechť $\forall i \in \hat{n}$ existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$. Potom gradientem funkce f v bodě \mathbf{a} rozumíme vektor

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) \equiv \nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Příklad 3.2. Spočítejte gradient funkce $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ v bodě $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) = -24$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) = 8 \ln 2$$

$$\Rightarrow \nabla f(\mathbf{a}) = (12, -24, 8 \ln 2)$$

Aritmetika partiálních derivací: stejná jako u obyčejných derivací, tj.:

Mají-li f, g v \mathbf{a} partiální derivaci podle x_i , $\lambda \in \mathbb{R}$, potom:

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \dots \text{Leibnitzovo pravidlo}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{f}{g}\right)(\mathbf{a}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2} \text{ pokud } g(\mathbf{a}) \neq 0.$$

Věta 3.5. Buď $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a necht' na jistém okolí bodu \mathbf{a} existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ a derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je v bodě \mathbf{a} spojitá. Potom existuje i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ a platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Bez důkazu.

3.2 Směrová derivace

Motivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}, \text{ kde } (\mathbf{e}_i)_j := \delta_{ij}, \text{ tedy } \|\mathbf{e}_i\| = 1$$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ "měří" míru změny hodnot funkce f , posuneme-li se z \mathbf{a} ve směru \mathbf{e}_i

\rightarrow proč se nepodívat na změnu v libovolném směru:

Definice 3.6. $f: \text{Dom}f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \text{Dom}f$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Derivací funkce f ve směru \mathbf{s} v bodě \mathbf{a} rozumíme vlastní limitu (existuje-li):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}).$$

Poznámka 3.7. Hodnota směrové derivace nezávisí na velikosti \mathbf{s} . Vezmeme-li totiž libovolné $\alpha > 0$ a položíme-li $\mathbf{r} := \alpha\mathbf{s}$, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{1}{\alpha\|\mathbf{s}\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\alpha\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \frac{f(\mathbf{a} + \tilde{h}\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{\tilde{h}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Poznámka 3.8.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}), \quad \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \frac{d\varphi}{dt}(0) = \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \end{aligned}$$

Poznámka 3.9. Někteří autoři v definici $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a})$ nenásobí faktorem $\frac{1}{\|\mathbf{s}\|}$. Derivace potom závisí na velikosti \mathbf{s} (lineárně). Jiní zase fixují $\|\mathbf{s}\| = 1$, což souhlasí s naší definicí.

Výpočet směrové derivace

1. z definice či jednodušeji z Poznámky 3.8
2. pro dostatečně hladké funkce je směrová derivace jen odpovídající lineární kombinace parciálních derivací:

Věta 3.10. Nechť $f: \text{Dom}f(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ má v \mathbf{a} spojité parciální derivace. Potom f má v \mathbf{a} i derivaci v libovolném směru $\mathbf{s} \neq 0$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \langle \text{grad} f(\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Příklad 3.3. Vypočítejte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ ve směru $\mathbf{s} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ v bodě $\mathbf{a} = (1, 1)$.

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Zkusíme oba postupy

1.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) = \left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 \\ \varphi'(t) &= 2\left(1 + \frac{1}{2}t\right) \frac{1}{2} - 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi'(0) &= 1 - \sqrt{3} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(1, 1) \end{aligned}$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \Rightarrow \text{grad } f(\mathbf{a}) = (2, -2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \left\langle (2, -2), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle = 1 - \sqrt{3}$$

→ výhodnější postup; zejména měníme-li \mathbf{s} a/nebo \mathbf{a}

Geometrická interpretace gradientu

Mějme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in \text{Dom}(f)$ pevně zvolené a hledjme $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{s}\| = 1$ tak, aby se funkce f ve směru \mathbf{s} nejvíce měnila.

Řešení: Necht' f má spojité parciální derivace \Rightarrow

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle = \|\text{grad } f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{s}\| \cos \alpha \dots \cos \alpha - \text{úhel svíraný mezi } \text{grad } f(\mathbf{a}) \text{ a } \mathbf{s}$$

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a})$ je – **maximální** pro $\alpha = 0$ (resp. $\alpha = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$), tj. $\Leftrightarrow \mathbf{s}$ je rovnoběžné s $\text{grad } f(\mathbf{a})$

a má stejnou orientaci

– **minimální** pro $\alpha = \pi$ (resp. $\alpha = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$), tj. $\Leftrightarrow \mathbf{s}$ je rovnoběžné s $\text{grad } f(\mathbf{a})$

a má opačnou orientaci

– **nulová** pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (resp. $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$), tj. $\Leftrightarrow \mathbf{a}$ je kolmá k $\text{grad } f(\mathbf{a})$

Poznámka 3.11. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) = 0$ ($\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), pokud $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$. Tento případ v příkladě výše neuvažujeme. Později uvidíme, že podmínka $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$ je nutná podmínka lokálního extrému funkce f v bodě \mathbf{a} .

Závěr: $\text{grad } f(\mathbf{a})$ udává **směr největšího růstu** funkce f v bodě \mathbf{a} . ($-\text{grad } f(\mathbf{a})$) potom udává **směr největšího poklesu** funkce f v bodě \mathbf{a} . Ve směru kolmém ke $\text{grad } f(\mathbf{a})$ se funkce f v "prvním přiblížení" nemění. Jedná se o "směr tečny k vrstevnici v definičním oboru funkce f ".

3.3 Vektorové funkce

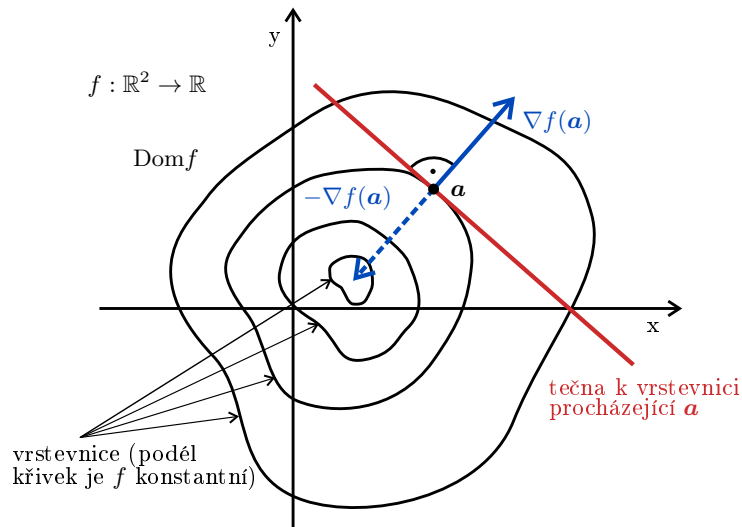
jsou zobrazení $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$; $n, r \in \mathbb{N}$ (obecně různé)

Příklad 3.4. *Intenzita elektrického pole* $\mathbf{E} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ každému času a bodu prostoru přiřazuje vektor.

Poznámka 3.12. \mathbf{F} lze chápat jako r -tici funkcí $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in \hat{r}$, $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, \dots, F_r)$.

Pokud $n = r = 3$, tak zavádíme operátor **rotace**, který z jedné vektorové funkce $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3)$ udělá novou vektorovou funkci:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$



Obr. 6: Gradient funkce f v \mathbf{a} .

Obecně se ale zavádí **divergence** vektorové funkce $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jako

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i},$$

výsledkem je skalární funkce.

Úloha 3. $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mající záměnné druhé smíšené derivace. Ukažte, že

1. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$
2. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$
3. $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (= \Delta \dots \text{Laplaceův operátor})$
4. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F}$
5. $\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \langle \mathbf{F}, \operatorname{grad} f \rangle$

3.4 Derivace složené funkce

Motivace

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{platí } (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Zobecnění pravidla (bez důkazu):

$$\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, \dots, F_s) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s, \text{ zde } F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \quad g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$$

\rightarrow složená funkce $g \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lze parciálně derivovat a platí:

$$\frac{\partial (g \circ \mathbf{F})}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial g}{\partial y_j}(\mathbf{F}(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \dots \text{řetězové pravidlo}$$

Příklad 3.5. $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}_1(x, y, z) = 2xy$, $\mathbf{F}_2(x, y, z) = x + y + z$, $g(u, v) = u^2 + v^2$. Nalezněte $\frac{\partial g \circ \mathbf{F}}{\partial x}$, $\frac{\partial g \circ \mathbf{F}}{\partial y}$, $\frac{\partial g \circ \mathbf{F}}{\partial z}$. Vypočítejte parciální derivaci podle x , zbylé ponecháváme čtenáři jako cvičení.

1. řetězové pravidlo

$$\begin{aligned} \frac{\partial g \circ \mathbf{F}}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial g}{\partial u}(\mathbf{F}(x, y, z)) \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial v}(\mathbf{F}(x, y, z)) \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = \\ &= 2F_1(x, y, z) \cdot 2y + 2F_2(x, y, z) \cdot 1 = 8xy^2 + 2(x + y + z) \end{aligned}$$

2. dosazení

$$\begin{aligned} (g \circ \mathbf{F})(x, y, z) &= (2xy)^2 + (x + y + z)^2 \\ \frac{\partial(g \circ \mathbf{F})}{\partial x}(x, y, z) &= 4xy \cdot 2y + 2(x + y + z) = 8xy^2 + 2(x + y + z) \end{aligned}$$

→ Vidíme, že pro konkrétní dvojice funkcí g , \mathbf{F} bývá výhodnější nejprve spočítat $g \circ \mathbf{F}$ a poté teprve derivovat, pro práci s obecnými funkcemi je ale řetězové pravidlo nepostradatelné.

4 Kvadratické formy

Definice 4.1. Buď $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ symetrická matice $n \times n$. Symetrickou bilineární formou v \mathbb{R}^n nazýváme zobrazení $qq : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem $qq(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbb{A}\mathbf{y}^T =$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j.$$

Matice \mathbb{A} nazýváme maticí bilineární formy qq .

Definice 4.2. Kvadratickou formou rozumíme zobrazení $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem $q(\mathbf{x}) := qq(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$.

Úloha 4. 1. Ukažte, že qq je skutečně bilineární, tj. lineární v obou proměnných, tj. platí např. $qq(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha qq(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + qq(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

2. Ukažte, že qq je skutečně symetrická, tj. $qq(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = qq(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

3. Ukažte, že $qq(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = qq(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = 0$.

Obecně q zobrazuje do \mathbb{R} , ale může zobrazovat i jen do $\langle 0, +\infty \rangle$ či $(-\infty, 0]$. Dále $q(\mathbf{0}) = qq(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$, ale pro některé formy se žádný další vektor na nulu nezobrazí. To nás vede k definici:

Definice 4.3. Buď q kvadratická forma. Říkáme, že q je

1. **Pozitivně, resp. negativně definitní** $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : q(\mathbf{x}) > 0$, resp. $q(\mathbf{x}) < 0$.

2. **Pozitivně, resp. negativně semidefinitní** $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : q(\mathbf{x}) \geq 0$, resp. $q(\mathbf{x}) \leq 0$ a současně $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : q(\mathbf{x}) = 0$.

3. *Indefinitní* $\Leftrightarrow \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : q(\mathbf{x}) < 0 \wedge q(\mathbf{y}) > 0$.

Příklad 4.1. $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1.

$$q(x, y) = x^2 + y^2 \left(= (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \geq 0 \dots \text{suma kvadrátů s kladnými koeficienty}$$

$$\wedge q(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow \text{pozitivně definitní forma (PD)}$$

2.

$$q(x, y) = -2x^2 + 2xy - 3y^2 \left(= -2x^2 + 1xy + 1yx - 3y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) =$$

$$= -2 \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{5}{2}y^2 \leq 0 \wedge q(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{y}{2} = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0$$

$$\Rightarrow \text{negativně definitní forma (ND)}$$

Doplnění na čtverec \rightarrow *MUSÍME zahrnout všechny členy, obsahující vybranou proměnnou, zde x, tj. $-2x^2 + 2xy$*

3.

$$q(x, y) = 10x^2 \geq 0 \wedge q(0, y) = 0; \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \text{pozitivně semidefinitní forma (PSD)}$$

4.

$$q(x, y) = -x^2 + 2xy - y^2 = -(x - y)^2 \leq 0 \wedge q(x, x) = 0 (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}), \text{ tj. } \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ např. } \mathbf{x} = (1, 1)$$

$$q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \text{negativně semidefinitní forma (NSD)}$$

5.

$$q(x, y) = xy \left(= (x, y) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \dots \text{trik: substituce } x = u + v, y = u - v$$

$$q(x, y) = (u + v)(u - v) = u^2 - v^2 = \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x - y}{2} \right)^2 \dots \text{nabývá klad. i zápor hodnot, např.}$$

$$q(1, 1) = 1 \geq 0, q(1, -1) = -1 \leq 0 \Rightarrow \text{indefinitní forma (IND)}$$

Úloha 5. *Rozmyslete si, že*

$$q \text{ je ND} \Leftrightarrow (-q) \text{ je PS,}$$

$$q \text{ je NSD} \Leftrightarrow (-q) \text{ je PSD.}$$

Pozorování (bez důkazu): Formu q lze vždy doplnit na čtverce, (v případě, kdy máme jen smíšené členy, pomocí triku jako v bodě 5 Příkladu 4.1), čtverců je nejvýše n (pro $q : \mathbb{R}^n \rightarrow$

\mathbb{R}). Pokud v každém kroku vtáhneme do čtverce všechny výskyty některé z proměnných, lze odvodit následující:

$$q(\mathbf{x}) = a_1(?)^2 + a_2(?)^2 + \dots + a_l(?)^2, \text{ kde } a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ a } l \leq n$$

$$l = n \begin{cases} (\forall i \in \hat{n})(a_i > 0) \dots q \text{ je PD} \\ (\forall i \in \hat{n})(a_i < 0) \dots q \text{ je ND} \end{cases}$$

$$l < n \begin{cases} (\forall i \in \hat{l})(a_i > 0) \dots q \text{ je PSD} \\ (\forall i \in \hat{l})(a_i < 0) \dots q \text{ je NSD} \end{cases}$$

$$\exists a_i > 0 \wedge \exists a_j < 0 \dots q \text{ je IND}$$

Úloha 6. Promyslete: Obsahuje-li diagonála matice \mathbb{A} kladné i záporné prvky, potom asociovaná forma q je vždy IND.

Úloha 7. Promyslete: Jak snadno určíme typ formy, je-li \mathbb{A} diagonální, (tj. $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$)?

Úloha 8. Promyslete (bonus): Jak určíme typ formy ze znalosti vlastních čísel matice \mathbb{A} ?

Sylvestrovův kritérium (pouze pro určení PD a ND!)

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbb{A}\mathbf{x}^T$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Spočítejme subdeterminanty (hlavní minory) matice \mathbb{A} , tedy

$$\Delta_1 = a_{11}$$

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \det \mathbb{A}$$

Platí:

1. q je PD $\Leftrightarrow (\forall i \in \hat{n})(\Delta_i > 0)$
2. q je ND $\Leftrightarrow (\forall i \in \hat{n})((-1)^i \Delta_i > 0)$

5 Lokální extrémů funkce více proměnných

Definice 5.1. Buď $f : \text{Dom}f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f má v \mathbf{a} (ostré) lokální minimum, resp. (ostré) lokální maximum \Leftrightarrow existuje-li redukované okolí $U^*(\mathbf{a})$ tak, že $\forall x \in U^*(\mathbf{a}) : (f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})) f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$, resp. $(f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})) f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$. (Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme (ostrými) lokálními extrémů.

Příklad 5.1. Pomocí definice nalezněte lokální extrémů funkcí

1.

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} : 1 = f(\mathbf{0}) > f(x, y) \Rightarrow f \text{ má v } \mathbf{0} \text{ ostré lokální maximum}$$

2.

$$g(x, y) = 1 - x^2 y^2$$
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} : 1 = g(\mathbf{0}) \geq g(x, y) \wedge g(0, y) = g(x, 0) = g(\mathbf{0}) = 1$$
$$\Rightarrow g \text{ má v } \mathbf{0} \text{ neostré lokální maximum, stejně tak ho má v } (0, y), y \in \mathbb{R} \text{ a } (x, 0), x \in \mathbb{R}$$

V úlohách výše jsme lokální extrémy uhodli. Jak si poradit v ne tak jasných případech? \rightarrow

Věta 5.2. (Nutná podmínka lokálního extrému) *Bud' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Má-li f v bodě \mathbf{a} lokální extrém a má-li v něm derivaci podle i -té proměnné, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$*

Důkaz. Necht' f má v \mathbf{a} např. lokální minimum, tj. $(\exists U^*(\mathbf{a}))(\forall \mathbf{x} \in U^*(\mathbf{a}))(f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}))$. Máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h} = c \in \mathbb{R} \text{ a chceme ukázat, že } c = 0$$

Důkaz provedeme sporem. Kdyby $c \neq 0$, např. $c > 0$, potom

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h} > 0$$

$\Rightarrow f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) < f(\mathbf{a})$ pro $\forall h < 0 : |h|$ dost malá, tj. i pro nějaká $\mathbf{x} = \mathbf{a} + h\mathbf{e}_i$ ležící v $U^*(\mathbf{a})$, kde ale platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}) \Rightarrow$ **spor.** (Podobně pro maximum $\forall c < 0$) \square

Úloha 9. *Porovnejte Větu 5.2 s nutnou podmínkou lokálního extrému funkce funkce jedné proměnné!*

POZOR: Stejně jako v 1D, nulovost derivací **neimplikuje** lokální extrém, viz sedlový bod. Nicméně nám podmínka nulovosti derivace dává body „podezřelé z extrému“, tzv. *stacionární body* funkce $f \Leftrightarrow \text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$. Jak tedy rozhodnout, zda stacionární bod \mathbf{a} je bodem lokálního extrému funkce f ? Jak určit typ extrému? Podobně jako v 1D nám pomůže 2. derivace a podobně jako v 1D nám ani ta neposkytne vždy odpověď.

Taylorův rozvoj funkce více proměnných/kvadratická aproximace

Odvodíme: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, f$ „dostatečně pěkná“. Potom

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) d^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T + \text{„relativně malý zbytek“}$$

zde $d^2 f_{\mathbf{a}}$ je matice druhých parciálních derivací f v \mathbf{a} , tj.

$$(d^2 f_{\mathbf{a}})_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \dots \text{Hessova matice}$$

\rightarrow příslušná kvadratická forma se nazývá *druhý diferenciál* funkce f v bodě \mathbf{a} . (Ta může být PD, ND, PSD, NSD či IND)

Důkaz. $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{s}\| = 1$ zatím libovolné.

- zavedeme pomocnou funkci $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako $\phi(h) := f(\mathbf{a} + h\mathbf{s})$ na nějakém otevřeném intervalu I , který obsahuje bod $h = 0$
- pro ϕ máme běžný Taylorův rozvoj (je-li $\phi \in C^2(I)$ a existuje-li ϕ''' na I) v $h = 0$:

$$\phi(h) = \phi(0) + \phi'(0)h + \frac{1}{2}\phi''(0)h^2 + \frac{1}{6}\phi'''(\xi)h^3, \quad (9)$$

zde $\xi = \xi(h) \in I$.

Poznámka 5.3. Je-li $\phi''' \in C(\bar{I})$, můžeme na I zbytek odhadnout jako $\left| \frac{1}{6}\phi'''(\xi)h^3 \right| \leq M|h|^3$, kde M je nějaká konstanta. Píšeme $\frac{1}{6}\phi'''(\xi)h^3 = \mathcal{O}(h^3)$.

- nyní vyjádříme členy na pravé straně (9) v termínech f

$$\begin{aligned} \phi(0) &= f(\mathbf{a}) \\ \phi'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle \\ \phi''(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi'(t) - \phi'(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a})}{t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} f \right) (\mathbf{a}) \end{aligned}$$

- máme tedy:

$$f(\mathbf{a} + h\mathbf{s}) = f(\mathbf{a}) + \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle h + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} f \right) (\mathbf{a}) h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

- upravíme ještě:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \right) (\mathbf{a}) &= \left\langle \left(\text{grad } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \right) (\mathbf{a}), \mathbf{s} \right\rangle = \langle \text{grad} \langle \text{grad } f, \mathbf{s} \rangle (\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{a}) s_i s_j = \\ &= \mathbf{s} d^2 f_a \mathbf{s}^T \end{aligned}$$

- nyní položíme:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}, \quad h = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

a dostáváme:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) d^2 f_a (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3)$$

□

Věta 5.4. (Postačující podmínka lokálního extrému): *Buď \mathbf{a} stacionární bod funkce $f : \text{Dom}f(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť má tato funkce na nějakém okolí bodu \mathbf{a} spojitě parciální derivace do 3. řádu. Je-li 2. diferenciál funkce f v bodě \mathbf{a}*

$$\left. \begin{array}{l} PD \\ ND \\ IND \end{array} \right\} \text{potom} \left\{ \begin{array}{l} \text{má } f \text{ v } \mathbf{a} \text{ ostré lokální minimum} \\ \text{má } f \text{ v } \mathbf{a} \text{ ostré lokální maximum} \\ f \text{ nemá v } \mathbf{a} \text{ lokální extrém, } \mathbf{a} \text{ je tzv. sedlový bod.} \end{array} \right.$$

Poznámka 5.5. *Je-li $d^2f_{\mathbf{a}}$ PSD či NSD, tak nelze na základě 2. derivací o lokálním extrému rozhodnout! (Srovnejte s 1D případem!)*

Důkaz. $\mathbf{a} \dots$ stacionární bod, tj. $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow$ Taylorův rozvoj v \mathbf{a} :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) d^2f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T}_{(*)} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3)$$

zanedbáme-li zbytek, tak $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$:

1. $(*) > 0$ pro $d^2f_{\mathbf{a}}$ PD
2. $(*) < 0$ pro $d^2f_{\mathbf{a}}$ ND
3. $(*)$ mění znaménko pro $d^2f_{\mathbf{a}}$ IND

\rightarrow zbytek je vůči $(*)$ zanedbatelný jen pro $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ malé, tj. na nějakém okolí bodu \mathbf{a} , na něm potom platí $(\mathbf{x} \neq \mathbf{a})$:

1. $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}) \Rightarrow$ OL minimum
2. $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) \Rightarrow$ OL maximum
3. pro nějaká $\mathbf{x}: f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$ a jiná $\mathbf{y}: f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{a}) \Rightarrow$ v \mathbf{a} není lokální extrém

□

Úloha 10. *Co v důkazu selže pro $d^2f_{\mathbf{a}}$ semidefinitní?*

POZOR: Jedná se o podmínku postačující! Tj. funkce může mít např. OL minimum i v bodech, kde $d^2f_{\mathbf{a}}$ je PSD viz Příklad 5.2.

Příklad 5.2. *Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^4$.*

$$\text{grad } f(x, y) = (2x, 4y^3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) = \mathbf{a} \dots \text{jediný stacionární bod}$$

$$d^2f_{\mathbf{a}} = ? : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\Rightarrow d^2f_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ čili } d^2f_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = 2h_1^2 \geq 0 \wedge d^2f_{\mathbf{a}}((0, 1)) = 0$$

$$\Rightarrow d^2f_{\mathbf{a}} \text{ je PSD}$$

$$\Rightarrow \text{Větu 5.4 nelze použít, ale přesto: } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{a}\}$$

$$0 = f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{0}) < f(x, y), \text{ tj. v } \mathbf{a} \text{ je ostré lokální minimum.}$$

6 Vázané extrémny funkce více proměnných

Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n : \dim M < n$ (např. M je křivka v rovině či 3D prostoru nebo M je plocha v 3D prostoru), $\mathbf{a} \in M$.

Definice 6.1. Říkáme, že f nabývá v \mathbf{a} (ostrého) lokálního minima vzhledem k $M \Leftrightarrow (\exists U_{\mathbf{a}}^*)(\forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}^* \cap M)(f(\mathbf{x})(>) \geq f(\mathbf{a}))$.

Poznámka 6.2. Analogicky definujeme další typy extrémů vzhledem k M . Zkuste sami!

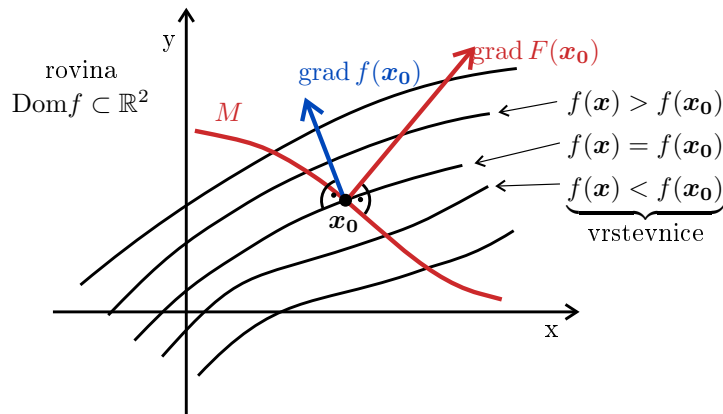
Budeme uvažovat jen množiny zadané vazbami tvaru:

$$F_i(\mathbf{x}) = C_i, \quad i \in \hat{l}, \quad l < n; \quad \text{kde } C_i \text{ jsou konstanty} - \text{ BÚNO je lze volit nulové}$$

tj. $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\forall i \in \hat{l})(F_i(\mathbf{x}) = C_i)\}$. V takovém případě se lokální extrémny vzhledem k M nazývají rovněž **vázané extrémny**

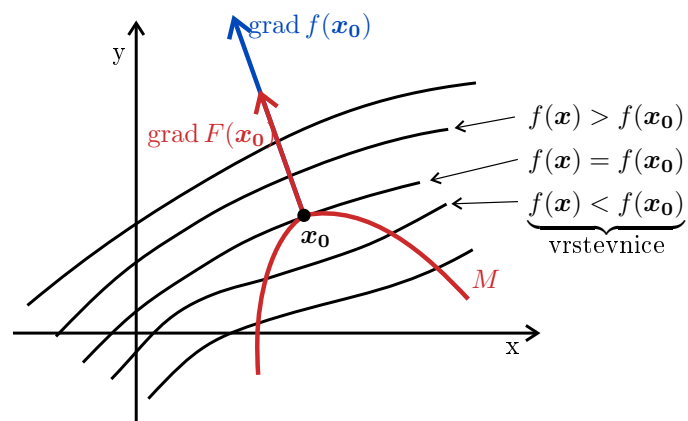
Začneme s nejjednodušším případem, kdy $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : F(\mathbf{x}) = C\}$, kde f, F budou mít tolik derivací, kolik budeme potřebovat. Níže $\mathbf{x}_0 \in M$.

- oba gradienty $\text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ a $\text{grad } F(\mathbf{x}_0)$ jsou kolmé k tečnám příslušných „vrstevnic“, kde vrstevnicí funkce F je samotná množina M , protože dle definice je na ní F konstantní.
 - pohybujeme-li se po vazbě (červené křivce), protínáme vrstevnici funkce f pro hodnoty menší i větší než $f(\mathbf{x}_0) \Rightarrow$ v situaci zachycené na Obr. 7 tedy f nemá v \mathbf{x}_0 vázaný lokální extrém (extrém vzhledem k M)



Obr. 7: Hledání vázaného extrémny na M ve zvoleném bodě \mathbf{x}_0 , kde M jsou body splňující $F(\mathbf{x}) = C$. Platí $F(\mathbf{x}_0) = C$, neboť $\mathbf{x}_0 \in M$.

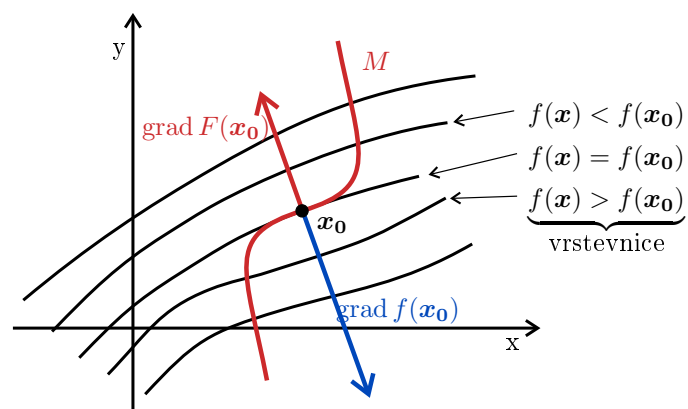
- na Obr. 8 je v \mathbf{x}_0 nabýváno ostrého lokálního maxima vzhledem k M
 - POZOROVÁNÍ: $\text{grad } F(\mathbf{x}_0) \parallel \text{grad } f(\mathbf{x}_0)$



Obr. 8: Hledání vázaného extrému na M ve zvoleném bodě \mathbf{x}_0 , kde M jsou body splňující $F(\mathbf{x}) = C$.

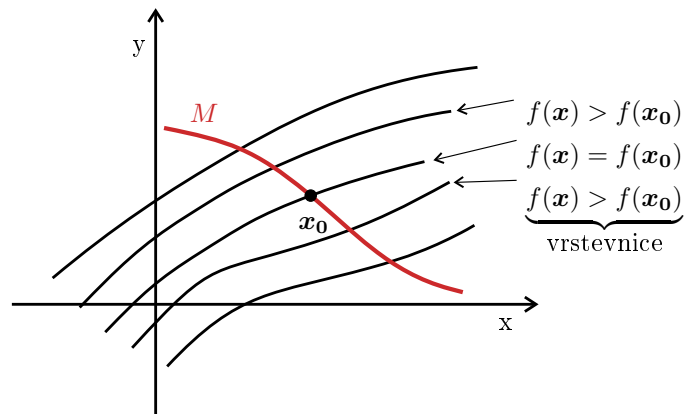
3. $\text{grad } F(\mathbf{x}_0) \parallel \text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ ale není postačující podmínka pro vázaný extrém, viz Obr. 9.

- zde $\text{grad } F(\mathbf{x}_0) \parallel \text{grad } f(\mathbf{x}_0)$, ale f nenabývá v \mathbf{x}_0 vázaného extrému



Obr. 9: Hledání vázaného extrému na M ve zvoleném bodě \mathbf{x}_0 , kde M jsou body splňující $F(\mathbf{x}) = C$.

4. • na Obr. 10 je v \mathbf{x}_0 *neostré* lokální minimum f (bez vazby), tím pádem i s libovolnou vazbou.



Obr. 10: Hledání vázaného extrému na M ve zvoleném bodě \mathbf{x}_0 , kde M jsou body splňující $F(\mathbf{x}) = C$.

Úloha 11. (ke 4. bodu) Může být toto minimum ostré i neostré dle konkrétního druhu vazby?

⇒ Z 1. - 4. lze vypožorovat, že **nutná** podmínka pro vázaný lokální extrém zní

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \parallel \text{grad } F(\mathbf{x}_0)$$

to lze přepsat: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ (tzv. *Lagrangeův multiplikátor*):

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \lambda \text{grad } F(\mathbf{x}_0)$$

$$\text{grad } \mathcal{L}(\mathbf{x}_0; \lambda) = 0; \text{ kde } \mathcal{L} := f - \lambda F \dots \text{Lagrangeova funkce}$$

Úloha 12. Jaké situaci odpovídá $\lambda = 0$?

Definice 6.3. Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ omezená a uzavřená, f definovaná a spojitá na U . Potom hodnoty $\max_{\mathbf{x} \in U} f(\mathbf{x})$, resp. $\min_{\mathbf{x} \in U} f(\mathbf{x})$ nazýváme globální maximum, resp. globální minimum funkce f na U .

Poznámka 6.4. Maxima a minima v Definici 6.3 jsou skutečně nabývána díky spojitosti f na kompaktní (=omezená a uzavřená) podmnožině \mathbb{R}^n .

Příklad 6.1. *Koronapříklad*

- uvažujme továrnu produkující nějaký výrobek (roušky) v množství $Q = f(K, L)$, kde f je zatím nespecifikovaná funkce,
 $K \dots$ množství kapitálových investic (šicí stroje)
 $L \dots$ množství pracovní síly (šičky)
- buď dále cena za stroj q a mzda šičky p jüanů (CNY)
- celkový rozpočet továrny je B CNY
- jak rozpočet rozdělit mezi stroje a zaměstnance, aby byl zisk úměrný produkci Q maximální?

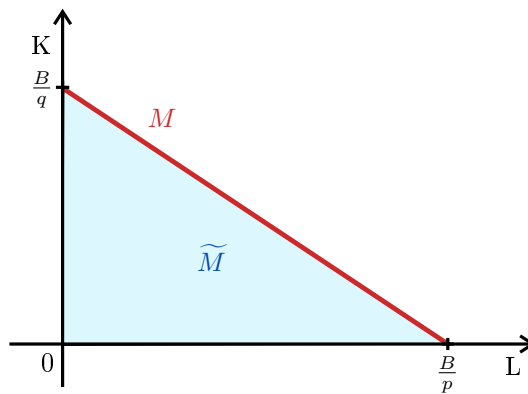
- předpokládejme, že

$$f(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad (10)$$

kde $0 < \alpha < 1$ je volný parametr modelu

Poznámka 6.5. (10) ... „Cobb-Douglas production function“; zkuste navrhnout jinou výstižnější funkci a poté maximalizovat Q !

Řešení: Hledáme (dokonce globální) maximum funkce $f = f(K, L)$ na množině $\tilde{M} := \{(K, L) : K \geq 0, L \geq 0, \underbrace{qK + pL}_{\text{náklady}} \leq \underbrace{B}_{\text{rozpočet}}\}$



Obr. 11: Hledání vázaného extrému na množině \tilde{M} . Podél úsečky M investujeme celý rozpočet \rightarrow očekáváme na ní maximální produkci.

- Lagrangeova funkce $\mathcal{L} = f(K, L) - \lambda F(K, L) = K^\alpha L^{\alpha-1} - \lambda(qK + pL)$

•

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= \alpha K^{\alpha-1} L^{\alpha-1} - \lambda q = 0 & (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} - \lambda p = 0 & (2) \end{aligned} \right\} 2 \text{ rovnice, } 3 \text{ neznámé } K, L, \lambda + \text{ vazba: } qK + pL = B \quad (3)$$

- nejprve se zbavíme parametru λ :

$$\begin{aligned} \alpha p K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - (1-\alpha) q K^\alpha L^{-\alpha} &= 0 \\ \alpha p L &= (1-\alpha) q K \\ L &= \frac{(1-\alpha) q}{\alpha p} K \end{aligned}$$

dosazením do (3) máme

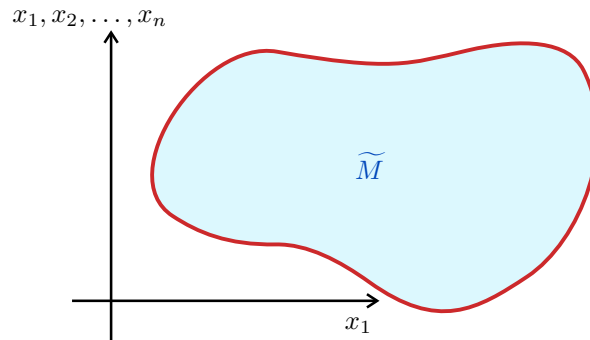
$$\begin{aligned} K \left(q + \frac{(1-\alpha) q}{\alpha} \right) &= B \Rightarrow K_0 = \frac{\alpha B}{q}, L_0 = \frac{(1-\alpha) B}{p} \\ f(K_0, L_0) &= K_0^\alpha L_0^{1-\alpha} > 0 \end{aligned}$$

- současně na krajích úsečky $f\left(0, \frac{B}{p}\right) = 0$ a $f\left(\frac{B}{q}, 0\right) = 0 \Rightarrow v(K_0, L_0)$ je globální extrém vzhledem k M

Úloha 13. Vyšetřete lokální extrémů f uvnitř \widetilde{M} , tj. postupujte jako pro běžné lokální extrémů bez vazby a poté jen vyberte stacionární body uvnitř M .

(Řešení: Uvnitř M žádné lokální extrémů nejsou.)

Z příkladu je poměrně jasné, jak hledat globální extrémů na množině $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^n : \dim \widetilde{M} = n$:



Obr. 12: Hledání vázaného extrémů na množině \widetilde{M} .

1. běžné lokální extrémů uvnitř \widetilde{M} (není nutno zkoumat jejich typ, stačí dokonce jen najít všechny stacionární body)
2. vázané lokální extrémů na hranici \widetilde{M} (opět stačí najít stacionární body dané Lagrangeovy funkce)
 - funkci f vyčíslíme ve všech bodech získaných v 1) a 2)
 - největší hodnota dává **globální maximum**, nejmenší **globální minimum**

6.1 Nutná podmínka pro více vazeb

Nyní si bez důkazu ukážeme, jak postupovat v případě více vazeb typu $F_i(\mathbf{x}) = 0, i \in \hat{l}$, kde $i \leq l < n$.

Definice 6.6. Buď $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ vektorová funkce o složkách (F_1, F_2, \dots, F_l) , $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Buďte dále F_i diferencovatelné v $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Potom Jacobiho maticí funkce f v bodě \mathbf{a} rozumíme matici $l \times n$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_l}{\partial x_1} & \frac{\partial F_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_l}{\partial x_n} \end{pmatrix}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \text{grad } F_1(\mathbf{a}) \\ \text{grad } F_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \text{grad } F_l(\mathbf{a}) \end{pmatrix} := \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \equiv \frac{D(F_1, \dots, F_l)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$$

Poznámka 6.7. Jacobiho matice je lineární aproximace zobrazení \mathbf{F} v bodě \mathbf{a} .

Věta 6.8. Necht $f, F_1, \dots, F_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mají spojité parciální derivace. Označme $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\forall i \in \hat{l})(F_i(\mathbf{x}) = 0)\}$. Necht dále matice $\frac{D(F_1, \dots, F_l)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x})$ má hodnost l pro každé $\mathbf{x} \in M$. Má-li f v bodě $\mathbf{a} \in M$ lokální extrém vzhledem k M , potom existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ taková, že $\text{grad } \mathcal{L}(\mathbf{a}; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) = 0$, kde $\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) := f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^l \lambda_i F_i(\mathbf{x})$.

Poznámka 6.9. Podmínka na maximální hodnotu Jacobiho matice zajišťuje, že vazby jsou „nezávislé“.

Poznámka 6.10. (postačující podmínka pro vázaný lokální extrém): $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vazba $F(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = 0\}$

- $\mathcal{L} = f(\mathbf{x}) - \lambda F(\mathbf{x})$. . . Lagrangeova funkce
-

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L} = 0 \\ F(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \right\} \text{stacionární body; vezměme jeden, řekněme } \mathbf{a} \text{ (existuje-li)} \quad (11)$$

otázka: Nabývá f v \mathbf{a} lokálního extrému vzhledem k M nebo se jedná o sedlový bod?

- bez vazby: V některých případech pomůže druhá derivace f v \mathbf{a} .
- s vazbou: Nabízí se spočítat druhou derivaci \mathcal{L} v $(\mathbf{a}; \lambda)$, kde λ je příslušná hodnota Lagrangeova multiplikátoru, tj. $(\mathbf{a}; \lambda)$ řeší systém (11).
Připomeňme, že druhá derivace ve stacionárním bodě dává míru změny dané funkce na okolí daného bodu (viz Taylorův rozvoj). Nás ale zajímá jen míra změny „podél vazby“.
 \Rightarrow Kvadratickou formou druhé derivace je nutno zúžit na přírůstky argumentů „podél vazby“, tj. na tečný prostor k M v \mathbf{a} .

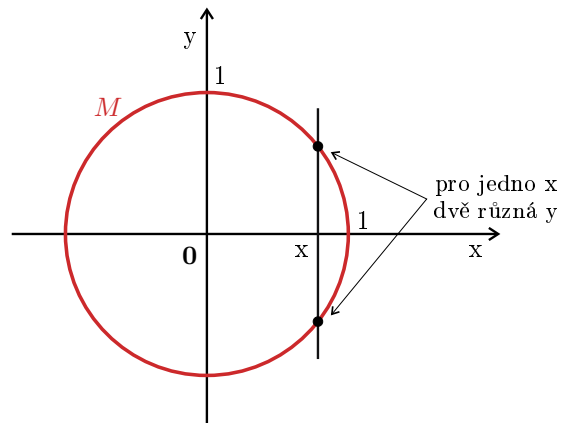
Tečný prostor k M : $F(\mathbf{x}) = 0$. . . rozvineme do Taylora: $F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + \langle \text{grad } F(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2)$, kde \mathbf{h} tvoří malý přírůstek argumentu, $F(\mathbf{a}) = 0, \|\langle \text{grad } F(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle\|$ minimalizujeme a $\mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2)$ zanedbáme v lineární aproximaci, tj. tečný prostor je tvořen vektory \mathbf{h} , které splňují $\langle \text{grad } F(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle = 0$.

Pozorování: Je-li již nezúžená forma $d^2\mathcal{L}$ pozitivně či negativně definitní, můžeme si zúžení odpustit!

7 Funkce zadaná implicitně

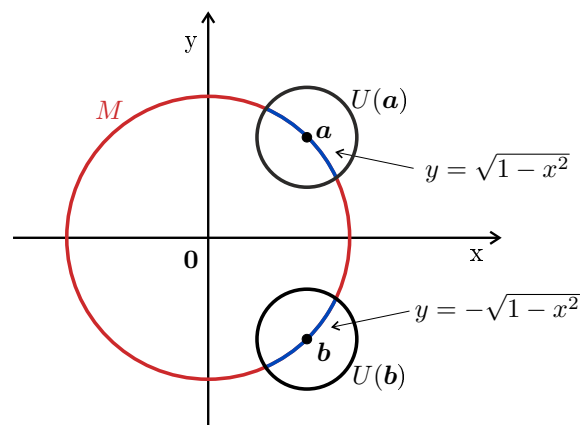
Motivace: $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$, tj. M tvoří body roviny splňující vztah $x^2 + y^2 = 1$ (kružnice se středem v počátku o poloměru 1) $\Rightarrow M$ není zjevně graf funkce $y = y(x)$:



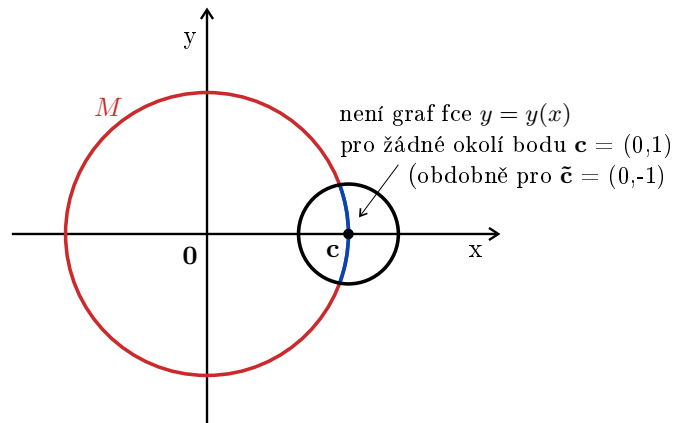
Obr. 13: Funkce zadaná implicitně

nicméně, vyjma speciálních případů, které rozebereme za okamžik, platí následující: pro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 : F(\mathbf{a}) = 0$ existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že $M \cap U(\mathbf{a})$ je již grafem funkce $y = y(x)$



Obr. 14: Funkce zadané implicitně.

jak vypadají zmíněné speciální případy:



Obr. 15: Funkce zadaná implicitně.

Úloha 14. Na okolí jakých bodů zadává rovnost $F(x, y) = 0$ graf funkce $x = x(y)$?

co se děje v bodech \mathbf{c} a $\tilde{\mathbf{c}}$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{c}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\mathbf{c}}) = 0$$

Definice 7.1. Nechť $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že $y = y(x)$ je na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ funkcí zadanou implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ (stručněji „implicitní funkcí“) pokud pro $(\forall x \in I)(F(x, y(x)) = 0)$.

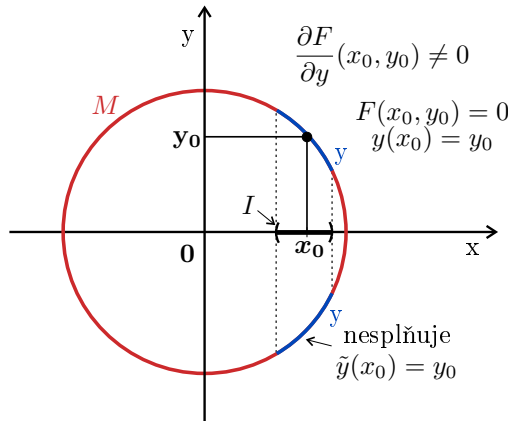
Zásadní otázka: Jaké vlastnosti musí mít F , aby na nějakém intervalu I existovala právě jedna funkce $y = y(x)$ zadaná implicitně?

Věta 7.2. (o implicitní funkci) Buď $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : F(x_0, y_0) = 0$. Nechť na jistém okolí bodu (x_0, y_0) má funkce $F(x, y)$ spojitě parciální derivace, přičemž platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Potom na jistém okolí bodu x_0 existuje jediná spojitá funkce $y = y(x)$, která je implicitně zadaná rovnicí $F(x, y) = 0$ a vyhovuje podmínce $y_0 = y(x_0)$. Navíc má tato funkce na okolí bodu x_0 spojitou derivaci s hodnotou

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \dots \text{funkce proměnných } (x, y) \rightarrow \text{nutno vyjádřit } (x, y(x)) \quad (12)$$

Poznámka 7.3. Věta nedává předpis $y = y(x)$! Říká jen, že taková funkce existuje. Ostatně y nemusí být ani vyjádřitelná v termínech elementárních funkcí, třebaže F je složená funkce elementárních funkcí dvou proměnných. Např.: $F(x, y) = y + e^y + x = 0$.

Důkaz. Nejtěžší část je ukázat, že existuje nějaká $y = y(x)$ s požadovanými vlastnostmi. Tu přeskočíme.



Obr. 16: Funkce zadaná implicitně.

Dokážeme si jen vzoreček pro derivaci $y'(x)$ a jednoznačnost.

→ vzorec pro derivaci:

$\exists y = y(x) : F(x, y(x)) = 0 \wedge y(x_0) = y_0 \rightarrow$ zderivujeme obě strany $F(x, y(x)) = 0$ podle x

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 0 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \text{ kde } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \text{ dle předpokladů Věty 7.2.}$$

→ jednoznačnost:

$$F(x, y(x)) = 0 \wedge F(x, \tilde{y}(x)) = 0 \tag{13}$$

\wedge

$$y(x_0) = y_0 = \tilde{y}(x_0) \tag{14}$$

Podle bodu výše máme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x, y(x)) \quad \text{a} \quad \frac{d\tilde{y}}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x, \tilde{y}(x)),$$

tj. y a \tilde{y} řeší stejnou diferenciální rovnici prvního řádu se stejnou počáteční podmínkou (14).

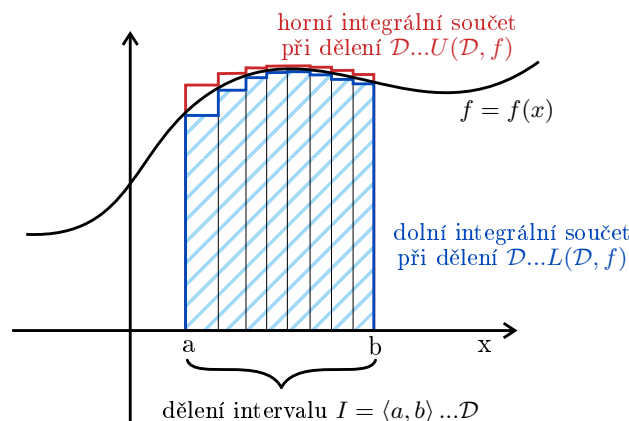
Dostáváme $y(x) = \tilde{y}(x)$ na nějakém okolí bodu x_0 . \square

Pozorování: Vztah (12) nám říká, jak spočítat $y'(x)$, aniž bychom znali $y = y(x)$! Nicméně při dosazování konkrétního bodu je stále nutno pracovat s implicitním předpisem. Uvažte například opět funkci $F(x, y) = y + e^y + x = 0$, pro kterou $y'(x) = -1/(1 + e^{y(x)})$.

Poznámka 7.4. Věta 7.2 lze zobecnit i pro $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 2$) dokonce i pro $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ ($s < n$).

8 Riemannův integrál v \mathbb{R}^n

Zavede se podobně jako v \mathbb{R}^1 :



Obr. 17: Riemannův integrál v \mathbb{R}^1 .

f je na I Riemannovsky integrabilní $\Leftrightarrow \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, f)$, kde supremum a infimum bereme přes všechna možná dělení intervalu $I \rightarrow$ pokud rovnost platí, společnou hodnotu označíme jako $\int_I f(x) dx$.

Zobecnění provedeme speciálně pro $n = 2$, promyslete si následující pojmy i pro $n > 2$. Nejprve zavedeme pojmy dvourozměrného intervalu a jeho dělení.

Definice 8.1. *Budte $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \subset \mathbb{R}$ jednorozměrné intervaly. Potom dvourozměrným intervalem rozumíme obdélník $I := \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$.*

Definice 8.2. *Dělením jednorozměrného intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ rozumíme každou konečnou posloupnost čísel x_0, x_1, \dots, x_n takovou, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.*

Definice 8.3. *Bud' $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ dvojrozměrný interval. Nechť dále x_0, x_1, \dots, x_n je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a y_0, y_1, \dots, y_m je dělení intervalu $\langle c, d \rangle$. Potom dělením intervalu I rozumíme množinu všech intervalů tvaru $S_{ij} := \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle$, kde $i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$. Tuto množinu značíme $\mathcal{D} := \{S_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}$. Dále zavádíme míru intervalu $S_{ij}, \mu(S_{ij})$, jako $\mu(S_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.*

Dolní a horní integrální součty se zavedou naprosto analogicky jako v 1D.

Definice 8.4. *Bud' $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce definovaná alespoň na intervalu $I (= \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle)$. Nechť $\mathcal{D} = \{S_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}$ je dělení intervalu I . Pro $i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$ označme $v_{ij} := \inf_{x \in S_{ij}} f(x)$, $V_{ij} := \sup_{x \in S_{ij}} f(x)$. Dolním integrálním součtem $L(\mathcal{D}, f)$, resp. horním integrálním součtem $U(\mathcal{D}, f)$ funkce f při dělení \mathcal{D} rozumíme $L(\mathcal{D}, f) := \sum_{i,j=1}^{n,m} v_{ij} \mu(S_{ij})$, resp. $U(\mathcal{D}, f) := \sum_{i,j=1}^{n,m} V_{ij} \mu(S_{ij})$.*

Poznámka 8.5.

- f je omezená $\Rightarrow |v_{ij}|, |V_{ij}| < +\infty \Rightarrow |L(\mathcal{D}, f)|, |U(\mathcal{D}, f)| < +\infty$
- je-li f spojitá na $I \Rightarrow f$ je spojitá i na $S_{ij} \Rightarrow$ v definici v_{ij}, V_{ij} lze nahradit \inf , resp. \sup , \min , resp. \max , neboť spojitá funkce na kompaktní (=uzavřené a omezené) podmnožině \mathbb{R}^n nabývá svého infima i suprema

Podíváme se, co se děje s $L(\mathcal{D}, f)$ a $U(\mathcal{D}, f)$ při změně dělení a na to, v jakém vztahu jsou L a U pro navzájem různá dělení. (Tipněte si!)

Definice 8.6. Řekneme, že dělení \mathcal{D}' je zjemněním dělení \mathcal{D} , jestliže pro každé $S'_{rs} \in \mathcal{D}'$ existuje $S_{ij} \in \mathcal{D}$ tak, že $S'_{rs} \subset S_{ij}$.

Lemma 8.7. Necht f je omezená funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}^2$, \mathcal{D} dělením I a \mathcal{D}' zjemněním \mathcal{D} . Potom platí $L(\mathcal{D}, f) \leq L(\mathcal{D}', f) \leq U(\mathcal{D}', f) \leq U(\mathcal{D}, f)$.

Důkaz. 2. nerovnost je zřejmá (porovnejte definice L a U), 1. a 3. nerovnost se dokazují podobně, zkusíme tedy 1., 3. ponecháme čtenáři:

$$\rightarrow \mathcal{D} = \{S_{ij}\}, \mathcal{D}' = \{S'_{rs}\}$$

\rightarrow pro $(S'_{rs} \in \mathcal{D}') (\exists S_{ij} \in \mathcal{D}) (S'_{rs} \subset S_{ij}) \Rightarrow v'_{rs} := \inf_{x \in S'_{rs}} f(x) \geq v_{ij} = \inf_{x \in S_{ij}} f(x)$ neboť na pravé straně hledáme infimum přes nadmnožinu

$$\rightarrow \text{dále každé } S_{ij} \in \mathcal{D} \text{ lze zapsat jako } S_{ij} = \bigcup_{S'_{rs} \subset S_{ij}} S'_{rs} \Rightarrow \mu(S_{ij}) = \sum_{S'_{rs} \subset S_{ij}} \mu(S'_{rs})$$

\rightarrow z těchto pozorování nakonec dostaneme:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{D}', f) &= \sum_{S'_{rs} \in \mathcal{D}'} v'_{rs} \mu(S'_{rs}) = \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} \sum_{S'_{rs} \subset S_{ij}} v'_{rs} \mu(S'_{rs}) \geq \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} v_{ij} \sum_{S'_{rs} \subset S_{ij}} \mu(S'_{rs}) = \\ &= \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} v_{ij} \mu(S_{ij}) = L(\mathcal{D}, f) \end{aligned}$$

□

Věta 8.8. Budte f omezená funkce na intervalu $I \in \mathbb{R}^2$, \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 libovolná dělení I . Potom $L(\mathcal{D}_1, f) \leq U(\mathcal{D}_2, f)$.

Důkaz. $\rightarrow \mathcal{D}'$ zavedeme jako společné zjemnění \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 (Rozmyslete, jak by se takové \mathcal{D}' explicitně našlo!)

\rightarrow podle Lemmatu 8.7, kde za \mathcal{D} bereme postupně \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 dostáváme:

$$L(\mathcal{D}_1, f) \leq L(\mathcal{D}', f) \leq U(\mathcal{D}', f) \leq U(\mathcal{D}_2, f)$$

□

Závěr: Zjemňováním dělení nezměníme L a nevětšíme U , současně $L \leq U$, i když k výpočtu integrálních součtů použijeme navzájem různá dělení.

Definice Riemannova integrálu je zcela analogická 1D případu.

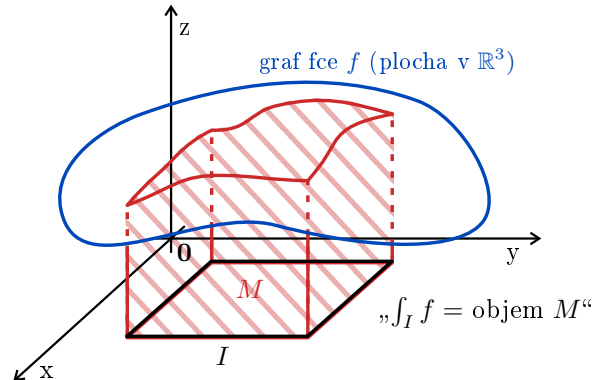
Definice 8.9. Bud f omezená funkce na $I \subset \mathbb{R}^2$. Potom definujeme Riemannův dolní $L(f)$, resp. horní $U(f)$ integrál jako $L(f) := \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f)$, resp. $U(f) := \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, f)$, kde \sup a \inf uvažujeme přes všechna dělení intervalu I . Pokud $L(f) = U(f)$, řekneme, že f má na I Riemannův integrál. Společnou hodnotu $L(f)$ a $U(f)$ značíme jako $\int_I f \equiv \int_I f(x, y) dx dy$ ($= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$).

Poznámka 8.10.

- definice $\int_I f$ dává dobrý smysl, ale k analytickým výpočtům je prakticky nepoužitelná
- pro numerické výpočty lze postupně počítat $L(\mathcal{D}, f), U(\mathcal{D}, f)$ pro zjemňující se dělení \rightarrow hodnota integrálu potom leží někde mezi těmito dvěma čísly

- numericky je pracné hledat v_{ij} a V_{ij} pro každý obdélníček S_{ij} a je to dokonce zbytečné, ukazuje se, že pro dobrou aproximaci stačí libovolnou hodnotu funkce f na S_{ij} (např. ve středu obdélníčku S_{ij} či v jednom z jeho vrcholů), případně průměrnou hodnotu ve vrcholech S_{ij} → viz animace ve Wolfram Mathematica

Poznámka 8.11. (Geometrický význam Riemannova integrálu) Buď $f \geq 0$ na I a $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in I \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Potom $\int_I f$ dává **objem** tělesa M .



Obr. 18: Geometrický význam Riemannova integrálu.

→ zobecnění:

$$\left. \begin{array}{l} f, g \text{ funkce na } I : (\forall \mathbf{x} \in I)(f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})) \\ M' := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in I \wedge g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\} \end{array} \right\} \text{potom objem } M' = \int_I (f - g)$$

Pro jaké funkce integrál existuje?

Věta 8.12. Buď f spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}^2$. Potom Riemannův integrál $\int_I f$ existuje. Navíc lze spočítat následovně: $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{D}_n, f) (= \lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{D}_n, f))$, kde $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost dělení splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} (\max_{S_{ij} \in \mathcal{D}_n} \text{diam}(S_{ij})) = 0$. (Zde diam značí průměr = **diametr** množiny S_{ij} , tj. velikost úhlopříčky obdélníka S_{ij} .)

Jak vypočítat **plochu** obecnější množiny v \mathbb{R}^3 než je interval?

Definice 8.13. $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom charakteristickou funkcí množiny M rozumíme χ_M definovanou na celém \mathbb{R}^n následovně:

$$\chi_M(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 \dots \mathbf{x} \in M \\ 0 \dots \mathbf{x} \notin M. \end{cases}$$

Definice 8.14. Buď $I \subset \mathbb{R}^2$ interval a $M \subset I$. Řekneme, že M má Jordanův-Peanův objem $\mu(M) \Leftrightarrow$ existuje-li $\int_I \chi_M$. V kladném případě klademe $\mu(M) := \int_I \chi_M$.

Poznámka 8.15. Toto je matematická definice plochy! (Souhrně se všemu říká objem bez ohledu na dimenzi)

Jak integrovat funkce přes obecnější množiny než intervaly? Klade se $\int_M f := \int_I \chi_M \cdot f$, kde I je nějaký interval obsahující M .

Poznámka 8.16. $\chi_M \cdot f$ **není** typicky spojitá, nemáme tak na základě věty 8.12 obecně zaručenou existenci Riemannova integrálu!

8.1 Vlastnosti vícerozměrného Riemannova integrálu

Věta 8.17. (Linearita): *Bud' $c \in \mathbb{R}$. Existují-li integrály $\int_M f$ a $\int_M g$, potom existují i integrály $\int_M(f + g)$ a $\int_M(cf)$ a platí $\int_M(f + g) = \int_M f + \int_M g$, $\int_M(cf) = c \int_M f$.*

Důkaz.

- vychází z odhadů pro odpovídající horní a dolní integrální součty
- přímočarý je pro homogenitu integrálu (tu si zde dokážeme):

1. $c \geq 0$:

$$\rightarrow L(\mathcal{D}, cf) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \inf_{x \in S_{ij}} (cf(x)) \mu(S_{ij}) = c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \inf_{x \in S_{ij}} f(x) \mu(S_{ij}) = cL(\mathcal{D}, f)$$

$$\rightarrow \text{podobně } U(\mathcal{D}, cf) = cU(\mathcal{D}, f)$$

$$\rightarrow \int_M f \text{ existuje}$$

$$\Rightarrow \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, f) = \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f) \left(= \int_M f \right)$$

$$\Rightarrow (c \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, f) =) \inf_{\mathcal{D}} cU(\mathcal{D}, f) = \sup_{\mathcal{D}} cL(\mathcal{D}, f) (= c \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f))$$

$$\Rightarrow \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, cf) = \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, cf)$$

$$\Rightarrow \int_M (cf) \text{ existuje a } \int_M (cf) = \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, cf) = c \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f) = c \int_M f$$

2. $c < 0$: zkuste sami!

□

Věta 8.18. (Monotonie): $\forall (x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq g(x, y)$, potom $\int_M f \leq \int_M g$.

Důkaz se opět provede pomocí odhadů v horních a dolních integrálních součtech.

Věta 8.19. (Odhad absolutní hodnotou): $|\int_M f| \leq \int_M |f|$.

Věta 8.20. (Aditivita): $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^2 : M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Existují-li integrály $\int_{M_1} f$ a $\int_{M_2} f$, potom existuje i integrál $\int_{M_1 \cup M_2} f$ a platí $\int_{M_1 \cup M_2} f = \int_{M_1} f + \int_{M_2} f$.

8.2 Výpočet Riemannova vícerozměrného integrálu

8.2.1 Fubiniho věta

Motivace

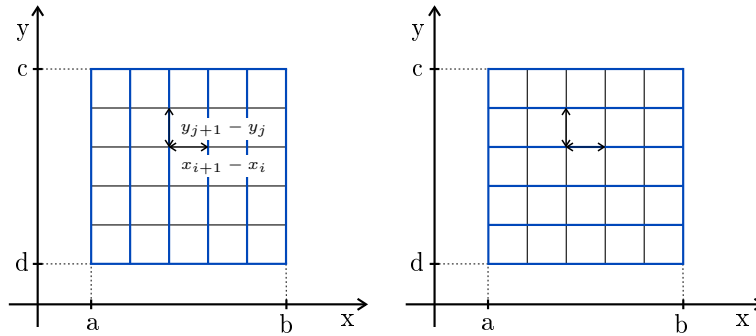
$I \dots$ dvourozměrný interval $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$

$\mathcal{D} \dots$ jeho dělení $\mathcal{D} = \{S_{ij} \equiv \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle\}_{i,j=1}^{n,m}$

$v_{ij} = \inf_{\mathbf{x} \in S_{ij}} f(\mathbf{x})$

$\rightarrow L(\mathcal{D}, f) = \sum_{i,j} v_{ij} \mu(S_{ij})$

$$\sum_i \left(\sum_j v_{ij} (y_{j+1} - y_j) \right) (x_{i+1} - x_i) = \sum_j \left(\sum_i v_{ij} (x_{i+1} - x_i) \right) (y_{j+1} - y_j) \quad (15)$$



Obr. 19: Fubiniho věta (motivace). Na levé straně (15) provádíme nejprve součty v rámci jednotlivých sloupců a potom sumujeme přes sloupce, na pravé straně je princip stejný, akorát zaměníme sloupce za řádky.

Věta 8.21. (Fubini): *Bud' $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ interval a $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na I . Pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$, resp. $\forall y \in \langle c, d \rangle$ položme $f_1(x) := \int_c^d f(x, y) dy$, $f_2(y) := \int_a^b f(x, y) dx$. Potom f_1 je spojitá na $\langle a, b \rangle$, f_2 je spojitá na $\langle c, d \rangle$ a platí $\int_I f \equiv \iint_I f(x, y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx = \int_c^d f_2(y) dy$, tj.*

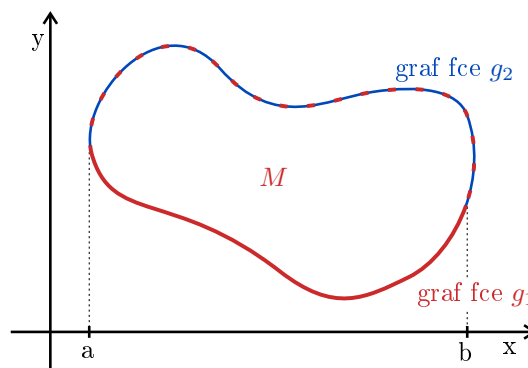
$$\int_I f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Bez důkazu.

Jak ale počítat integrály přes obecnější množiny, než intervaly? Uvažujme konkrétně množiny tvaru

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}, \quad (16)$$

kde g_1, g_2 jsou funkce spojitě na $\langle a, b \rangle$ (tedy jedné proměnné) takové, že $\forall x \in \langle a, b \rangle : g_1(x) \leq g_2(x)$.



Obr. 20: Plocha popsaná vztahem (16)

Potom máme:

Věta 8.22. (Obecnější Fubini): *Bud' f spojitá funkce spojitá na M , kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je popsána*

výše. Potom f je na M Riemannovsky integrovatelná a platí

$$\int_M f \equiv \iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

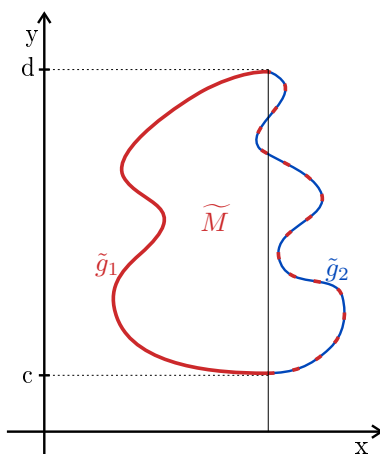
Poznámka 8.23. Plocha na Obr. 21 nelze popsat jako (16), ale lze nalézt dvojici funkcí \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 na intervalu $\langle c, d \rangle$ tak, že

$$\widetilde{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle c, d \rangle \wedge \tilde{g}_1(y) \leq x \leq \tilde{g}_2(y)\}. \quad (17)$$

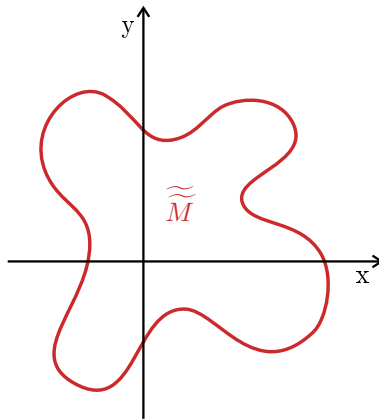
Samozřejmě existují plochy, které nelze popsat jako (16) ani jako (17), např. plocha na Obr. 22. Zkuste ale \widetilde{M} rozdělit na podmnožiny tvaru (16) a/nebo (17)!

Integrál $\int_{\widetilde{M}} f$ se spočte jako $\int_{\widetilde{M}} f = \int_c^d \left(\int_{\tilde{g}_1(y)}^{\tilde{g}_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$.

Integrál $\int_{\widetilde{M}} f$ se spočte pomocí vlastnosti aditivity, $\int_{\widetilde{M}} f = \sum_i \int_{M_i} f$, kde M_i jsou již tvaru (16) či (17), jsou vzájemně disjunktní (až na případnou hranici) a $\widetilde{M} = \bigcup_i M_i$.



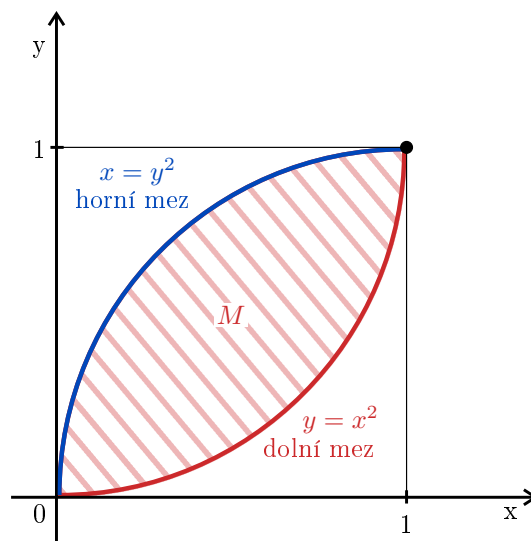
Obr. 21: Plocha popsaná vztahem (17)



Obr. 22: Plocha, kterou nelze jednoduše popsat vztahem (16) nebo (17)

Příklad 8.1. *Bud' $f(x, y) = xy^2, M \dots$ oblast vymezená křivkami $y = x^2, x = y^2$. Spočítejte $\int_M f(x, y) dx dy$.*

- *načrtnutí M*



Obr. 23: Fubiniho věta - příklad

souřadnice průsečíků ohraničujících křivek:

$$\begin{aligned}
 y = x^2 \wedge x = y^2 \\
 y = y^4 \\
 y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 1 \Rightarrow x = 1
 \end{aligned}$$

- $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\} \dots$ oblast typu (*)

→ Fubini:

$$\begin{aligned} \int_M f &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x \frac{1}{3} (x^{\frac{3}{2}} - x^6) = \frac{3}{56} \end{aligned}$$

- M lze ale současně zapsat jako oblast typu (17): $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle 0, 1 \rangle \wedge y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$ → opět Fubini (musí vyjít stejný výsledek!)

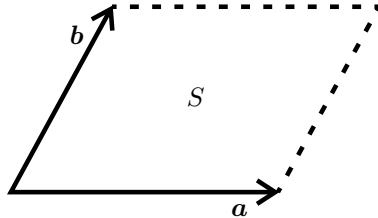
8.2.2 Věta o substituci

Motivace:

1. jednodimenzionální verze: $\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f \circ \phi(t) \phi'(t) dt$, kde $\phi : \phi'(t) > 0$ nebo $\phi'(t) < 0$ ($\Rightarrow \phi$ je ostře monotónní \Rightarrow je to bijekce)
 \Rightarrow starou proměnnou x jsme zapsali pomocí nové t jako $x = \phi(t)$, „element délky“ se potom transformoval jako $dx \rightarrow \phi'(t) dt$

2. trocha alchymie s měřením objemů (speciálně opět ve 2D):

- mějme $\mathbf{a} = (a_x, a_y), \mathbf{b} = (b_x, b_y) \in \mathbb{R}^2$
- jak spočítat „orientovanou“ (tj. bude záviset na pořadí hran) plochu S rovnoběžníku s hranami \mathbf{a}, \mathbf{b} ?



Obr. 24: Rovnoběžník s hranami \mathbf{a}, \mathbf{b}

$$S = a_x b_y - b_x a_y = \det \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} =: dx \wedge dy(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \text{ zde } dx \wedge dy \text{ je z definice bilineární antisymetrická forma (tj. } dx \wedge dy(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -dx \wedge dy(\mathbf{b}, \mathbf{a}))$$

- obecná souřadnice (u, v) na $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ opět zkonstruujeme formu $du \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \det \begin{pmatrix} [\mathbf{a}]_{uv} & [\mathbf{b}]_{uv} \end{pmatrix}$

→ rozmyslete si: $\forall(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

- (a) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\alpha du) \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(du \wedge dv)(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- (b) $(du + d\tilde{u}) \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = du \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d\tilde{u} \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- (c) $du \wedge du(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$

- jelikož $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ a $dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$ (formální aplikace řetězového pravidla pro derivaci funkcí $x = x(u, v), y = y(u, v)$), dostáváme s pomocí (a)-(c) následující

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} \underbrace{du \wedge du}_{=0} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du \wedge dv + \\ &+ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \underbrace{dv \wedge du}_{=-du \wedge dv} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \underbrace{dv \wedge dv}_{=0} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv = \\ &= \det \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}_{\text{Jacobiho matice}} du \wedge dv \end{aligned}$$

- „element plochy“ v kartézských souřadnicích tak zapíšeme jako násobek „elementu plochy“ v nových souřadnicích

Notace: $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorová funkce o složkách (F_1, F_2, \dots, F_n) , $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelné, potom

$$\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}} = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \vdots \\ \nabla F_n \end{pmatrix} \dots \text{Jacobiho matice}$$

$\det \frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}} \dots \text{jakobián}$

Definice 8.24. Zobrazení $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme regulárním na $M \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

1. M je otevřená množina
2. \mathbf{F} má spojitou Jacobiho matici na M (tj. všechny prvky matice jsou spojité)
3. $(\forall \mathbf{x} \in M)(\det \frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \neq 0)$.

Poznámka 8.25. Co intuitivně znamená regularita zobrazení \mathbf{F} ?

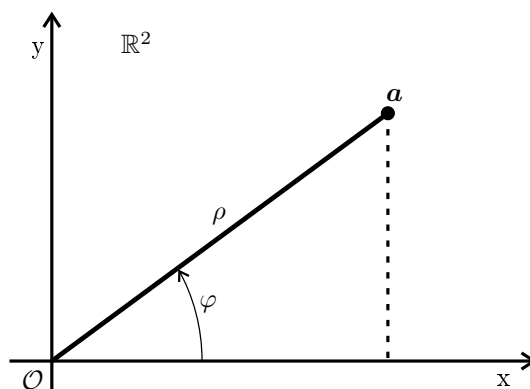
- $\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{a})$ je lineární aproximace v Taylorově rozvoji \mathbf{F} v bodě \mathbf{a}
- podmínka $\det \frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \neq 0$ říká, že tato aproximace je regulární (invertovatelné lineární zobrazení)
- lze ukázat, že to má za následek **lokální** invertovatelnost zobrazení \mathbf{F}

Věta 8.26. (O substituci:) Bud' $\vec{\phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$, prosté regulární zobrazení otevřené množiny $P \subset \mathbb{R}^n$ na množinu $Q \subset \mathbb{R}^n$. Potom pro libovolnou množinu $M \subset Q$ a funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (takové, že integrál níže existuje), platí

$$\int_M f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\vec{\phi}^{-1}(M)} f \circ \vec{\phi}(\vec{\xi}) \left| \det \frac{D\vec{\phi}}{D\vec{\xi}} \right| d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

9 Významné substituce

9.1 Polární souřadnice



Obr. 25: Polární souřadnice.

Pro přechod mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \geq 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

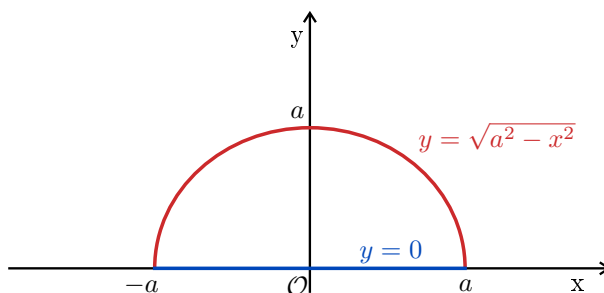
Poznámka 9.1. Počátku \mathcal{O} odpovídá $\rho = 0$ a libovolný úhel φ ! (Substituce v \mathcal{O} není regulární).

$$\det \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} = \rho \neq 0 \text{ pro } \rho \neq 0 \Rightarrow \left| \det \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} \right| = \rho$$

$\Rightarrow \rho d\rho d\varphi$ „plošný element“ v polárních souřadnicích

Příklad 9.1. Buď $a > 0$ a V omezená oblast ohraničená křivkami $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ a $y = 0$. Vypočtěte $\int_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

- načrtneme V



Obr. 26: Polární souřadnice - příklad.

- *zapišeme integrál v kartézských souřadnicích:*

$$\int_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_{-a}^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \right) dx \dots \text{poměrně složitá integrace}$$

→ zkuste si to!

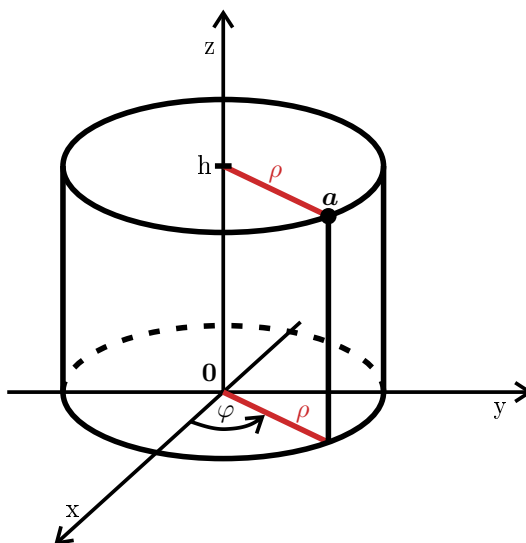
- *zapišeme integrál v polárních souřadnicích pomocí věty o substituci 8.26:*

$$\int_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^\pi \int_0^a \underbrace{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}}_\rho \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^\pi \int_0^a \rho^2 \, d\rho \, d\varphi =$$

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^a \rho^2 \, d\rho = \pi \frac{a^3}{3}$$

→ polární souřadnice využijeme v případě, že integrand nebo/a integrační obor mají rotační symetrii

9.2 Cylindrické souřadnice



Obr. 27: Cylindrické souřadnice.

Pro přechod mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi platí

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= h, \end{aligned}$$

kde $\rho \geq 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $h \in \mathbb{R}$.

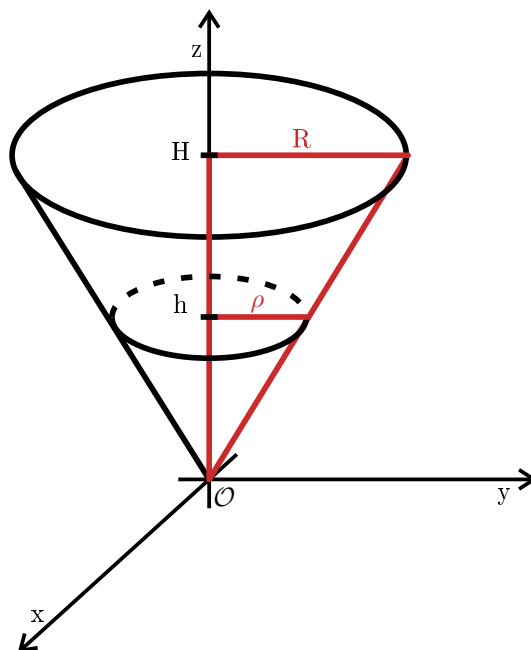
Poznámka 9.2. Jedná se v podstatě o polární souřadnice v každém řezu $z = \text{konst.}$

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi, h)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left| \det \frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi, h)} \right| = \rho$$

$\Rightarrow \rho d\rho d\varphi dh \dots$ „plošný element“ v cylindrických souřadnicích

Příklad 9.2. Spočítejte objem jehlanu výšky $H > 0$ s poloměrem základny $R > 0$.

- pro výpočet objemu si můžeme jehlan orientovat libovolně, nabízí se jeho osu identifikovat s nějakou ze souřadných os:



Obr. 28: Cylindrické souřadnice - příklad.

z podobnosti trojúhelníků máme: $\frac{R}{H} = \frac{\rho}{h}$ a tedy $h = \frac{H}{R}\rho$

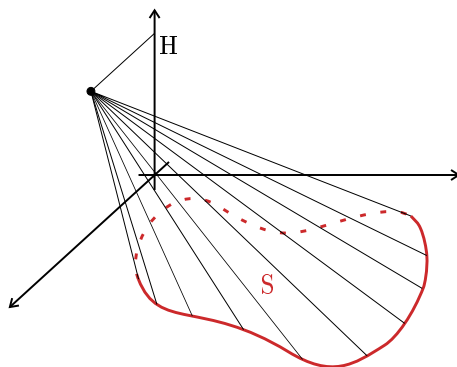
- objem se spočte jako integrál z funkce $f \equiv 1$ přes oblast, jejíž objem hledáme
- tento integrál zapíšeme v cylindrických souřadnicích jako

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(\int_{\frac{H}{R}\rho}^H \rho dh \right) d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \left(H - \frac{H}{R}\rho \right) d\rho = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

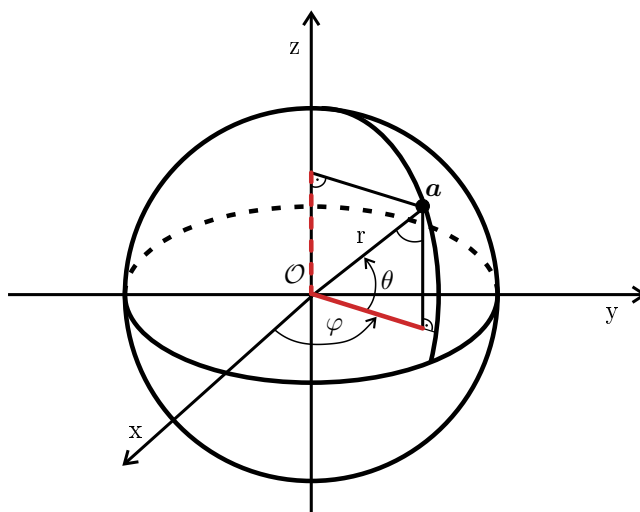
- pro objem tedy máme $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
- toto dokonce platí pro obecné jehlany! ($V = \frac{1}{3}SH$, kde S je plocha základny, viz Obr. 29)

Úloha 15. Zapište integrál pro objem z Příkladem 9.2 i v kartézských souřadnicích!

9.3 Sférické souřadnice



Obr. 29: Obecný jehlan.



Obr. 30: Sférické souřadnice.

Pro přechod mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi platí

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \cos \varphi \\y &= r \cos \theta \sin \varphi \\z &= r \sin \theta,\end{aligned}$$

kde $r \geq 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Poznámka 9.3. Počátku O odpovídá $r = 0$ a θ a φ libovolná, na „pólech“ je $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ a φ libovolné!

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \det \frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(r, \theta, \varphi)} \right| = | -r^2 \cos \theta | = r^2 |\cos \theta|$$

$\Rightarrow r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \dots$ „plošný element“ ve sférických souřadnicích

$$r^2 \cos \theta = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

Příklad 9.3. Vypočtěte objem V koule o poloměru R .

- budeme integrovat jedničku přes oblast tvaru koule poloměru R
- ve sférických souřadnicích tak dostaneme:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_0^R r^2 \, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Úloha 16. Zapište integrál pro objem z Příkladu 9.3 i v kartézských souřadnicích!

10 Ukázky aplikací integrálu

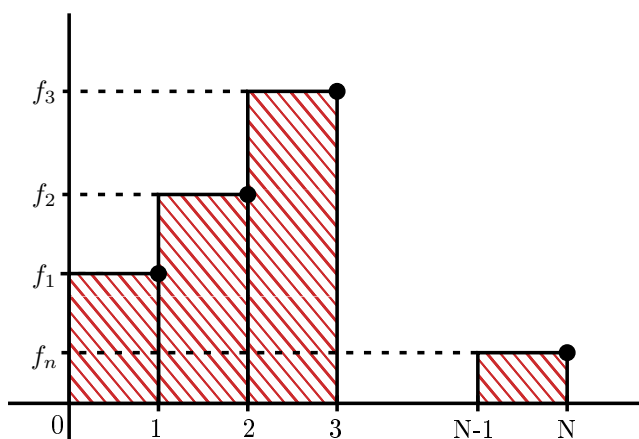
10.1 Výpočet ploch a objemů

Viz kapitola 9

10.2 Výpočet „průměru“ hodnot funkce na množině, tj. střední hodnoty funkce

Motivace (diskrétní případ): $f_1, f_2, \dots, f_N \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$

→ aritmetický průměr $\bar{f} := \frac{\sum_{i=1}^N f_i}{N}$



Obr. 31: Výpočet „průměru“ hodnot funkce.

→ pro funkci $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ se tedy střední hodnota nabízí definovat jako:

$$\bar{f} := \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\mu(\langle a, b \rangle)} = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\int_a^b 1 \, dx}$$

→ pro funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $S \subset \mathbb{R}^n$ tak analogicky klademe

$$\bar{f} := \frac{\int_S f(\mathbf{x}) \, dx_1 \, dx_2 \dots \, dx_n}{\mu(S)} = \frac{\int_S f(\mathbf{x}) \, dx_1 \, dx_2 \dots \, dx_n}{\int_S 1 \, dx_1 \, dx_2 \dots \, dx_n}$$

10.3 Výpočet složek těžiště

Motivace (soustava „hmotných bodů“): hmotné body o hmotnostech m_i se nachází v \mathbf{x}_i
 → potom těžiště soustavy nalezneme jako

$$\mathbf{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

→ uvažujme nyní těleso tvaru $V \subset \mathbb{R}^3$ (případně nekonečně tenkou desku $S \subset \mathbb{R}^2$) s obecně nekonzstantní hustotou $\rho = \rho(\mathbf{x})$

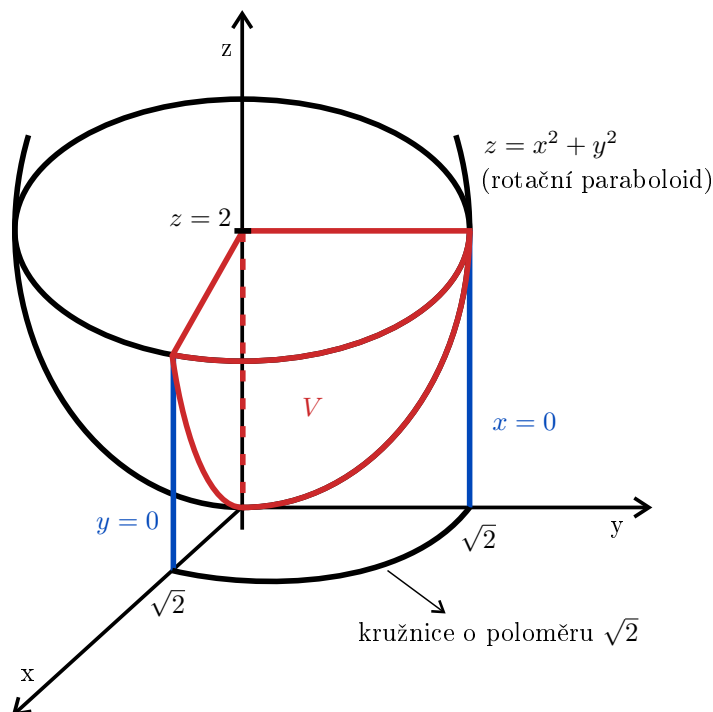
→ potom objem $d\mathbf{x}$ (= $dx dy dz$ v \mathbb{R}^3 , resp. $dx dy$ v \mathbb{R}^2) má hmotnost $\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

→ složky těžiště \mathbf{x}_T tedy nalezneme jako

$$\mathbf{x}_T = \frac{\int_{V(S)} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{V(S)} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (\text{vektorová rovnost})$$

Příklad 10.1. Nalezněte x -ovou složku těžiště homogenního tělesa, které je omezeno rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ a plochou $z = x^2 + y^2$.

- homogenní těleso → konstantní hustota → pro účely těžiště lze hustotu zvolit jako $\rho \equiv 1$ (rozmyslete si proč!)
- oblast si načrtneme, abychom snáze odvodili integrační meze:



Obr. 32: Příklad - hledání těžiště.

$$\mathbf{x}_T = \frac{\int_V x \, dx \, dy \, dz}{\int_V dx \, dy \, dz}$$

$$\int_V dx \, dy \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 dx \, dy \, dz = \dots \text{zkusit za DC}$$

→ přejdeme do cylindrických souřadnic: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = h$

$$\left. \begin{aligned} \int_V dx \, dy \, dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{h}} \rho \, d\rho \, dh \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \frac{h}{2} \, dh = \frac{\pi}{2} \\ \int_V x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{h}} \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, dh \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^2 \frac{h^{\frac{3}{2}}}{3} \, dh = \frac{8\sqrt{2}}{15} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{x}_T = \frac{16\sqrt{2}}{15\pi}$$

Úloha 17. *Dopočítejte i ostatní složky těžiště v Příkladu 10.1!*