

Poznámky k předmětu
Matematika 4
(verze 4)

Bára Jiříčková, **Jana Kozáková**, **Kamila Ooppelová**, Matěj Tušek

LS 2021, Praha

Abstrakt

Tento text je v podstatě přepisem mých ručně psaných poznámek, které vznikly během čínské chřipky. Pokrývá celou přednášku k předmětu *Matematika 4*. Za pečlivé sepsání děkuji Janě Kozákové (kapitoly 1 a 2 včetně ilustrací) a Kamile Ooppelové (kapitoly 3–10), díky za perfektní ilustrace v kapitolách 3–10 potom patří Báře Jiříčkové.

Matěj Tušek

Obsah

1	Obyčejné diferenciální rovnice	4
1.1	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	6
1.2	Separovatelné rovnice	8
1.3	Lineární diferenciální rovnice řádu n	9
1.4	Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty . . .	12
1.5	Lineární diferenciální rovnice s pravou stranou	15
2	Funkce více proměnných-základní pojmy, spojitost a limita	18
2.1	Spojitosť funkce více proměnných	20
2.2	Limita funkce více proměnných	21
2.3	Vztah mezi limitou a spojitostí	21
3	Parciální a směrové derivace	21
3.1	Parciální derivace	21
3.2	Směrová derivace	23
3.3	Vektorové funkce	25
3.4	Derivace složené funkce	26
4	Kvadratické formy	27
5	Lokální extrémy funkce více proměnných	29
6	Vázané extrémy funkce více proměnných	32
6.1	Nutná podmínka pro více vazeb	37
7	Funkce zadaná implicitně	38
8	Riemannův integrál v \mathbb{R}^n	40
8.1	Vlastnosti vícerozměrného Riemannova integrálu	44
8.2	Výpočet Riemannova vícerozměrného integrálu	45
8.2.1	Fubiniho věta	45
8.2.2	Věta o substituci	48
9	Významné substituce	50
9.1	Polární souřadnice	50
9.2	Cylindrické souřadnice	51
9.3	Sférické souřadnice	53
10	Ukázky aplikací integrálu	55
10.1	Výpočet ploch a objemů	55
10.2	Výpočet „průměru“ hodnot funkce na množině, tj. střední hodnoty funkce . . .	55
10.3	Výpočet složek těžiště	56

Notace

\mathbf{x}	prvek \mathbb{R}^n
$\ \mathbf{x}\ $	eukleidovská norma vektoru \mathbf{x}
$C^n(I)$	prostor funkcí, které mají na intervalu I spojitě derivace do řádu n
$f^{(n)}$	derivace funkce f řádu n
$\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x_0)$	Wronského determinant funkcí f_1, \dots, f_n v bodě x_0

1 Obyčejné diferenciální rovnice

Motivace

1. Volný pád

Těleso padá v homogenním tíhovém poli, budeme uvažovat jednorozměrný případ pádu podél osy x . Na těleso působí pouze tíhová síla $F_g = mg$, kterou je těleso přitahováno k zemi.
2. Newtonův pohybový zákon nám dává závislost $x = x(t)$ pro danou sílu F .

$$F(x, t) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Určíme počáteční podmínky. Na počátku pádu v čase $t = 0$ je těleso v poloze $x(0) = 0$ a je v klidu, tedy $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$.

Sestavíme diferenciální rovnici:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= mg \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= g, \text{ kde } g = \textit{konst.} \end{aligned}$$

Řešíme integrací, konstanty určíme z počátečních podmínek:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \int g dt = gt + C_1, \text{ z poč. p. } 0 = \frac{dx}{dt}(0) = g \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ x(t) &= \int gt dt = \frac{1}{2}gt^2 + C_2, \text{ z poč. p. } 0 = x(0) = \frac{g \cdot 0^2}{2} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \\ x(t) &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Úloha 1. *Jak se změní řešení diferenciální rovnice $\frac{d^2x}{dt^2} = g$, změníme-li počáteční podmínky?*

2. Radioaktivní rozpad

Radioaktivní rozpad je stochastický proces. V látce je v nějakém čase t N jader radionuklidů, které neprošly přeměnou. Zajímá nás počet nezměněných jader radionuklidů v látce v závislosti na čase t , tj. hledáme funkci $N = N(t)$.

Sestavíme rovnici na základě předpokladu, že rychlost přeměny je úměrná počtu zatím nerozpadlých jader:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad \lambda > 0 \dots \text{přeměnová konst., char. rychlost přeměny radionuklidu} \quad (1)$$

Formální úpravou dostaneme:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Řešíme integrací obou stran rovnice (později si ukážeme, že korektní způsob vede ke stejnému výsledku):

$$\begin{aligned} \ln N &= -\lambda t + C \quad / \exp() \\ N &= Ke^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Konstantu K určíme z počáteční podmínky $N(0) = N_0$. Celkem máme:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Definice 1.1. *Bud' F funkce $(n + 2)$ proměnných, kde $n \in \mathbb{N}$, tj. $F : \text{Dom}(F) \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$, která je nekonzstantní v poslední proměnné. Potom symbol*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (2)$$

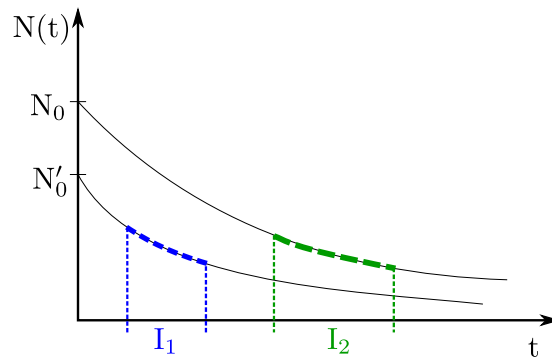
nazýváme obyčejnou diferenciální rovnicí řádu n . Řešením rovnice rozumíme takovou funkci $y = y(x)$ na otevřeném intervalu I , která splňuje následující:

1. $(\forall x \in I)((x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \text{Dom}(F))$,
2. $(\forall x \in I)F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$.

Poznámka 1.2. *Obyčejné diferenciální rovnice uvedené v Motivaci můžeme zapsat v podobě podle (2).*

$$\begin{array}{ll} \frac{d^2x}{dt^2} - g = 0 & F = F(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_4 - g = 0 \\ \frac{dN}{dt} + \lambda N = 0 & F = F(b_1, b_2, b_3) = b_3 + \lambda b_2 = 0 \end{array}$$

Poznámka 1.3. *Proč uvažujeme řešení rovnice $y = y(x)$ na otevřeném intervalu I ? V případě uzavřeného intervalu by bylo třeba uvažovat i jednostranné derivace v krajních bodech intervalu. Zejména ale máme-li sjednocení dvou intervalů $I_1 \cup I_2$, nedostali bychom jednoznačnost pro nějakou zvolenou počáteční podmínku.*



Obr. 1: Řešení rovnice (1) na otevřených intervalech I_1 a I_2 .

Definice 1.4. *Je-li funkce $y = y(x)$ řešením obyčejné diferenciální rovnice (2) na intervalu I a $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ je řešením (2) na intervalu \tilde{I} , přičemž $I \subset \tilde{I}$ a současně platí $(\forall x \in I)(y(x) = \tilde{y}(x))$, potom \tilde{y} se nazývá rozšířením y a y se nazývá zúžením \tilde{y} . Řešení, které již nelze dále rozšířit, se nazývá maximální.*

Definice 1.5. Lze-li (2) přepsat jako $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, kde f je funkce $(n+1)$ proměnných, potom říkáme, že obyčejná diferenciální rovnice je vyřešena vůči nejvyšší derivaci.

Věta 1.6 (Peanova). Pokud je funkce f spojitá na podmnožině $\Omega \in \mathbb{R}^{(n+2)}$, potom pro libovolný bod $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Omega$ existuje alespoň jedno řešení rovnice $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ procházející tímto bodem.

Bez důkazu.

1.1 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Obecný tvar lineární diferenciální rovnice 1. řádu:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad (3)$$

Předpokládáme, že funkce $p(x)$ a $q(x)$ jsou spojité na intervalu $I \in \mathbb{R}$. Naším úkolem je najít řešení $y = y(x)$.

Pro případ, kdy $p(x) = 0$ se LDR 1. řádu zjednoduší a řešení $y = y(x)$ hledáme integrací obou stran rovnice

$$\begin{aligned} y'(x) &= q(x) \\ y(x) &= Q(x) + C, \text{ kde } Q(x) \text{ je primitivní funkce } q(x) \end{aligned}$$

Pro případ, kdy $p(x) \neq 0$ hledáme řešení LDR 1. řádu přenásobením vhodným faktorem a integrací, tedy zavádíme tzv. *integrační faktor*.

Integrační faktor:

$$e^{\int p(x) dx} \equiv e^{P(x)}$$

Integrační faktorem vynásobíme LDR 1. řádu v obecném tvaru (3)

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x)y(x) &= q(x) \quad / e^{P(x)} \\ e^{P(x)}y'(x) + \underbrace{p(x)e^{P(x)}}_{\frac{d}{dx}e^{P(x)}}y(x) &= q(x)e^{P(x)} \end{aligned}$$

Dále opačně aplikujeme pravidlo derivace součinu funkcí a výsledný vztah zintegrujeme:

$$\begin{aligned} \left(e^{P(x)}y(x) \right)' &= q(x)e^{P(x)} \quad / \int dx \\ e^{P(x)}y(x) &= \int q(x)e^{P(x)} dx + C \\ y(x) &= e^{-P(x)} \left(\int q(x)e^{P(x)} dx + C \right) \end{aligned}$$

Definičním oborem řešení je $D_y \equiv \text{Dom}(y) = I$.

Poznámka 1.7. Konstantu C určíme z počáteční podmínky.

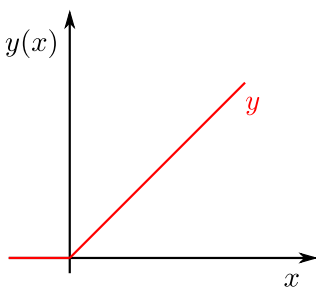
Příklad 1.1 (Neexistence řešení). Mějme rovnici

$$y'(x) = \Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$$

kde $\Theta(x)$ je tzv. Heavisideova theta funkce, s počáteční podmínkou $y(0) = 0$. Rovnice budeme dále řešit na dvou intervalech

$$\begin{aligned} x < 0 \quad y'(x) = 0 &\Leftrightarrow 0 = y(0) = C \Rightarrow C = 0, \\ x > 0 \quad y'(x) = 1 &\Leftrightarrow 0 = y(0) = x + q, \Rightarrow q = 0. \end{aligned}$$

Chceme-li složit řešení rovnic, abychom získali řešení pro bod $(0,0)$, dojdeme k závěru, že výsledná funkce není diferencovatelná v bodě $x = 0$. Znovu si tedy prohlédneme zadanou Heavisideovu funkci, ta není spojitá v $x = 0$, tedy nesplňuje předpoklady Peanovy věty – existence řešení tak není nutně zaručena.



Obr. 2: Řešení rovnice $y'(x) = \Theta(x)$.

Věta 1.8 (Picardova). Nechť diferenciální rovnice 1. řádu je vyřešena vůči nejvyšší derivaci, tj. $y' = f(x, y(x))$. Funkce f buď spojitá v 1. proměnné a Lipschitzovsky spojitá v 2. proměnné na okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom na nějakém okolí bodu x_0 existuje právě jedno řešení procházející bodem (x_0, y_0) , tj. splňující $y(x_0) = y_0$.

Poznámka 1.9 (Lipschitzovská spojitost). Funkce f je v 2. proměnné Lipschitzovsky spojitá na I , existuje-li konstanta K tak, že

$$(\forall y_1, y_2 \in I) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Úloha 2. Uvedte příklad Lipschitzovsky spojitě funkce.

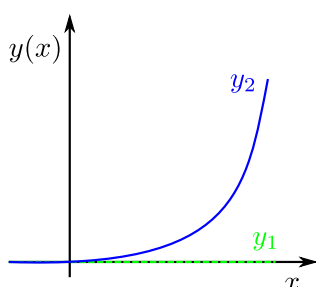
Příklad 1.2. Mějme rovnici $y'(x) = y^{\frac{2}{3}}$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$. Té vyhovují dvě řešení

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \\ y_2 &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{3}\right)^3 & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nemůžou být tedy splněny předpoklady Picardovy věty. Skutečně funkce $y \mapsto y^{\frac{2}{3}}$ není Lipschitzovsky spojitá na žádném okolí $y = 0$. Neexistuje totiž konstanta K taková, aby byla Lipschitzovská spojitost splněna. Pokud by existovala, potom

$$\begin{aligned} |y_1^{\frac{2}{3}} - y_2^{\frac{2}{3}}| &\leq K|y_1 - y_2| \\ |y_1^{\frac{2}{3}}| &\leq K|y_1| \quad \text{pro } y_2 = 0 \\ |y_1^{-\frac{1}{3}}| &\leq K, \end{aligned}$$

což nemůže platit na okolí nuly.



Obr. 3: Řešení rovnice $y'(x) = y^{\frac{2}{3}}$.

1.2 Separovatelné rovnice

Obecný tvar separovatelné diferenciální rovnice

$$f(x) = g(y)y' \tag{4}$$

Pro jednoduchost předpokládáme, že funkce $f(x), g(y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a jsou na celém \mathbb{R} spojitě. Naším úkolem je najít řešení $y = y(x)$.

Motivace

Máme separovatelnou diferenciální rovnici v obecném tvaru a hledáme řešení. Derivaci y' rozepíšeme do tvaru zlomku $\frac{dy}{dx}$, jmenovatelem dx přenásobíme rovnici a poté ji integrujeme.

$$\begin{aligned} f(x) = g(y)y' &= g(y) \frac{dy}{dx} \quad / \, dx \\ f(x) \, dx &= g(y) \, dy \quad / \, \int \\ F(x) &= G(y) + C, \end{aligned}$$

kde $F(x) = \int f(x) \, dx$, $G(y) = \int g(y) \, dy$ a $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Získali jsme takto řešení v implicitním tvaru. Tento postup však není matematicky zcela správně (k derivaci se nelze chovat jako ke zlomku).

Rigorózní postup

Obecný tvar separovatelné rovnice upravíme do tvaru

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Předpokládáme, že $f(x)$ a $g(y)$ jsou spojité a $g(y) \neq 0$. Z Peanovy věty vyplývá, že existuje řešení diferenciální rovnice $y = y(x)$ procházející bodem (x_0, y_0) .

$$\begin{aligned} f(x) &= g(y(x))y'(x) \quad / \int dx \\ F(x) &= \int g(y(x))y'(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ y = y(x) \\ \frac{dy}{dx} = y'(x) \\ dy = y'(x) dx \end{array} \right. \\ F(x) &= \int g(y) dy \\ F(x) &= G(y(x)) + C \\ y(x) &= G^{-1}(F(x) - C) \end{aligned}$$

Funkce $F(x)$ a $G(y)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$ a $g(y)$ a $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Funkce $G^{-1}(y)$ existuje, protože $G(y)$ je ostře monotónní, neboť $G'(y) = g(y) \neq 0$ a zároveň je $g(y)$ spojitá. Ostře monotónní funkce je prostá, a tedy i invertibilní.

Příklad 1.3. Najděte řešení rovnice $y' - 1 = y^2$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' = y^2 + 1 \\ \frac{dy}{y^2 + 1} &= dx \\ \int \frac{dy}{y^2 + 1} &= \int dx \\ \arctan y &= x + C \\ y &= \tan(x + C), \end{aligned}$$

Definiční obor funkce tangens je

$$\text{Dom}(\tan(x)) = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z},$$

potom definiční obor funkce y vychází

$$\text{Dom}(y_k) = \left(-\frac{\pi}{2} - C + k\pi, \frac{\pi}{2} - C + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

1.3 Lineární diferenciální rovnice řádu n

Obecný tvar lineární diferenciální rovnice řádu n

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + p_1y' + p_0y = q \quad (5)$$

Předpokládáme, že funkce p_i a q jsou spojité na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Při řešení těchto diferenciálních rovnic budeme postupovat ve dvou fázích: 1. hledáme řešení homogenní LDR řádu n (tedy s nulovou pravou stranou), 2. hledáme partikulární řešení.

Homogenní diferenciální rovnice řádu n

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + p_1y' + p_0y = 0 \quad (6)$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme lineární diferenciální operátor na vektorovém prostoru funkcí $C^{(n)}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f, f', \dots, f^{(n)} \text{ spojité na } I\}$

$$\mathcal{L} := \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_1 \frac{d}{dx} + p_0.$$

Diferenciální rovnici (5) zapíšeme ve tvaru $\mathcal{L}y = q$ a rovnici (6) zapíšeme jako $\mathcal{L}y = 0$.

Definice 1.10. Soubor funkcí $\{f_i\}_{i=1}^n \subset C^{(n)}(I)$ je lineárně nezávislý na intervalu I právě tehdy, když $(\forall x \in I)(\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0) \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(c_i = 0)$.

Věta 1.11. Množina všech řešení homogenní rovnice (6) je lineární podprostor $C^{(n)}$ dimenze n .

Důkaz. 1. Ukážeme, že množina všech řešení rovnice (6) je podprostor, tj. množina uzavřená vůči lineárním kombinacím. Nechť

$$f, g \in C^{(n)}(I) : \mathcal{L}f = 0, \mathcal{L}g = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$\mathcal{L}(\alpha f + g) = 0 : \mathcal{L} \text{ je lineární} \Rightarrow \mathcal{L}(\alpha f + g) = \alpha \mathcal{L}f + \mathcal{L}g = \alpha \cdot 0 + 0 = 0.$$

2. Ukážeme, že podprostor z 1. bodu je dimenze n . Zkonstruujeme bázi tohoto podprostoru.

$y_i = y_i(x), i \in \hat{n}$, volím jako řešení $\mathcal{L}y_i = 0$ vyhovující podmínce $y_i^{(k)}(x_0) = \delta_{i,k+1}; k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

kde x_0 je libovolný bod z I .

2a. Množina $\{y_i\}_{i=1}^n$ je lineárně nezávislá:

$$(\forall x \in I) \left(\sum_{i=1}^n c_i y_i(x) = 0 \right) \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^n c_i y_i(x_0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Obě strany zderivujeme.

$$(\forall x \in I) \left(\sum_{i=1}^n c_i y_i'(x) = 0 \right) \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^n c_i y_i'(x_0) = c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Podobně postupujeme s derivacemi až do řádu $n - 1$. Dostaneme tak, že $(\forall i \in \hat{n})(c_i = 0)$.

2b. Množina $\{y_i\}_{i=1}^n$ generuje celý podprostor:

y je řešením (6), tj. $\mathcal{L}y = 0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Ukážeme, že

$$(\forall x \in I) \left(y(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x) \right) = (\star).$$

Dosazením $x = x_0$ do (\star) dostaneme kandidáta na konstantu α_1 :

$$y_0 = y(x_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x_0) = \alpha_1 \cdot 1 = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = y_0$$

Derivací (\star) dostaneme další konstanty α_i :

$$\alpha_2 = y'_0, \dots, \alpha_n = y_0^{(n-1)}$$

S touto volbou konstant jsou levá i pravá strana (\star) řešením téže diferenciální rovnice se shodnou počáteční podmínkou. Z věty o jednoznačnosti řešení platí (\star) skutečně na celém I . \square

Definice 1.12. *Bázi prostoru všech řešení homogenní rovnice (6) na intervalu I nazýváme fundamentální systém řešení rovnice.*

Důsledek 1.13. *K nalezení libovolného řešení homogenní rovnice (6) postačuje nalézt nějaký její fundamentální systém.*

Věta 1.14. *Nechť u je jedno řešení diferenciální rovnice (5). Potom libovolné další řešení y rovnice (5) je $y = u + v$, kde v řeší (6).*

Důkaz.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = q, \mathcal{L}y = q &\stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{L}(y - u) = 0 : \\ \mathcal{L}(y - u) = \mathcal{L}y - \mathcal{L}u = q - q = 0 \end{aligned}$$

\square

Vsuvka – Lineární závislost a nezávislost funkcí

Funkce f_1, \dots, f_n jsou lineárně nezávislé (LN) na otevřeném intervalu I právě tehdy, když

$$(\forall x \in I) \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0 \right) \Rightarrow (\forall i \in \hat{n}) c_i = 0.$$

Definice 1.15. *Systém funkcí $\{y_i\}_{i=1}^n$ je lineárně závislý (LZ) na intervalu I právě tehdy, pokud není lineárně nezávislý na intervalu I .*

Příklad 1.4. *Rozhodněte, zda jsou funkce f_1 a f_2 lineárně nezávislé.*

$$f_1 = \sin x, f_2 = \cos x, I \in \mathbb{R}$$

Pokud by byly funkce f_1 a f_2 lineárně závislé, pak by existovala konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$ taková, že $f_1 = \alpha f_2$, tedy $\sin x = \alpha \cos x$. Taková konstanta neexistuje. Funkce jsou lineárně nezávislé.

Definice 1.16 (Wronského determinant). *Buď $\{f_i\}_{i=1}^n \subset C^{(n-1)}(I)$. Potom determinant matice*

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) & \dots & f_n(x_0) \\ f'_1(x_0) & \dots & f'_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

nazýváme Wronského determinant (wronskián) funkcí f_1, \dots, f_n v bodě x_0 . Značíme ho $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x_0)$.

Věta 1.17. Jsou-li funkce $(f_1, \dots, f_n) \in C^{(n-1)}(I)$ lineárně závislé na intervalu I , potom $(\forall x \in I) \mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x) = 0$.

Důkaz. Jsou-li funkce LZ, pak existuje alespoň jedna nenulová konstanta c_i tak, že

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0 \quad (\forall x \in I).$$

Derivujeme dle x :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i f_i'(x) &= 0 \quad (\forall x \in I) & / \frac{d}{dx} \\ \sum_{i=1}^n c_i f_i''(x) &= 0 \quad (\forall x \in I) & / \frac{d}{dx} \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n c_i f_i^{(n-1)}(x) &= 0 \quad (\forall x \in I) \end{aligned}$$

Součty derivovaných funkcí zapíšeme do matice.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)}(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abychom dostali nulovou pravou stranu pro nenulový vektor (c_1, \dots, c_n) , musí být $\det \mathcal{W}$ nulový v každém bodě, tedy $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x) = 0 \quad (\forall x \in I)$. \square

Důsledek 1.18. *Odměněná implikace předchozí věty:* $(\exists x \in I)(\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x) \neq 0) \Rightarrow (f_1, \dots, f_n)$ je lineárně nezávislá na I .

Věta 1.19. Je-li pro nějaké $x_0 \in I$: $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x_0) = 0$ a navíc jsou-li f_1, \dots, f_n řešením téže homogenní LDR, potom je systém (f_1, \dots, f_n) lineárně závislý na I a navíc $(\forall x \in I) \mathcal{W}(f_1, \dots, f_n)(x) = 0$.

Bez důkazu.

1.4 Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Obecný tvar homogenní LDR

$$\tilde{\mathcal{L}}y := a_n y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (7)$$

kde $a_n, \dots, a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_n \neq 0$. Uvažujeme tedy řešení rovnic pouze s konstantními koeficienty.

Motivace

Hledáme řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{\lambda x}, & \lambda \in \mathbb{C} \\y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\&\vdots \\y^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x}\end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice (7).

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \quad (\forall x \in I)$$

Rovnici můžeme vydělit $e^{\lambda x}$, čímž dostaneme charakteristický polynom v proměnné λ .

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, obecně $m \leq n$. Rovnici (7) řeší (obecně komplexní) exponenciála $e^{\lambda_i x}$.

Vsuvka – Komplexní exponenciála

Mějme komplexní číslo z definované jako $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je komplexní jednotka, $i^2 = -1$. Exponenciálu komplexního čísla e^z můžeme definovat pomocí Taylorova polynomu

$$e^z := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Komplexně sdružené číslo k číslo z je $\bar{z} = a - bi$. Pro komplexně sdruženou exponenciálu platí $\overline{e^{ib}} = e^{-ib}$, $e^{ib} = \cos b - i \sin b = \cos(-b) + i \sin(-b) = e^{-ib}$. Absolutní hodnota ryze komplexní exponenciály je dána jako $|e^{ib}| = \sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$.

Vsuvka – O kořenech polynomů

Základní věta algebry: Polynom stupně n s reálnými nebo komplexními koeficienty má právě n kořenů z \mathbb{C} , počítáme-li jejich násobnosti.

Polynom stupně n lze tedy rozložit následujícím způsobem

$$p_n(\lambda) = a_m \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j)^{k_j}; \quad \sum_{j=1}^m k_j = n,$$

kde k_j je algebraická násobnost kořene λ_j .

Pozorování: Komplexně sdružené číslo ke kořenu λ je rovněž kořenem polynomu $p_n(\lambda)$ s reálnými koeficienty a_i . Komplexně sdružený polynom $\overline{p_n(\lambda)}$ lze zapsat ve tvaru

$$\overline{p_n(\lambda)} = \overline{\sum_{j=1}^n a_j \lambda^j}$$

Komplexně sdružený součet je součtem komplexně sdružených sčítanců. Koeficienty a_i jsou reálné, tedy platí $\overline{a_i} = a_i$.

$$\overline{p_n(\lambda)} = \overline{\sum_{j=1}^n a_j \lambda^j} = \sum_{j=1}^n \overline{a_j \lambda^j} = \sum_{j=1}^n \overline{a_j} \overline{\lambda^j} = \sum_{j=1}^n a_j \overline{\lambda^j} = p_n(\overline{\lambda}) = 0$$

Věta 1.20. *Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, ($m \leq n$) jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristického polynomu rovnice (7), tj. $\sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^j = 0$ ($\forall i \in \hat{m}$) s násobnostmi k_1, \dots, k_m , $\sum_{j=1}^m k_j = n$, potom rovnice (7) má následující fundamentální systém:*

$$\left. \begin{array}{l} e^{\lambda_1 x} \quad x e^{\lambda_1 x} \quad \dots \quad x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x} \quad x e^{\lambda_2 x} \quad \dots \quad x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ e^{\lambda_m x} \quad x e^{\lambda_m x} \quad \dots \quad x^{k_m-1} e^{\lambda_m x} \end{array} \right\} n \text{ LN funkcí.}$$

Bez důkazu.

Příklad 1.5. *Nalezněte fundamentální systém rovnice $y^{(4)} - y = 0$. Sestavíme charakteristický polynom a spočteme jeho kořeny.*

$$\begin{aligned} \lambda^4 - 1 &= 0 \\ (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) &= 0 \\ \text{kořeny: } \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -i \quad \lambda_4 = i \end{aligned}$$

Sestavíme fundamentální systém $\tilde{F}S : \{e^x, e^{-x}, e^{-ix}, e^{ix}\}$.

Lineární kombinací prvků $\tilde{F}S$ získáme FS s reálnými funkcemi, $FS : \{e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x\}$, který rovněž řeší (7).

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

Poznámka 1.21 (Přechod k \mathbb{R} fundamentálnímu systému). $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ je kořenem charakteristického polynomu s reálnými koeficienty, potom $\bar{\lambda}$ je také kořenem charakteristického polynomu $\rightarrow 2$ řešení

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x) &:= e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax+ibx} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \\ \tilde{y}_2(x) &:= e^{\bar{\lambda} x} = e^{(a-bi)x} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx) \end{aligned}$$

$\rightarrow 2$ reálná řešení

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)}{2} = e^{ax} \cos(bx) \\ y_2(x) &= \frac{\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_2(x)}{2i} = e^{ax} \sin(bx) \end{aligned}$$

Poznámka 1.22 (Obecné řešení).

$$y(x) = \underbrace{y_p(x)}_{\substack{\text{partikulární řešení} \\ \text{tj. lib. řešení (5)}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i y_i(x)}_{\substack{\text{prvky FS = báze podprostoru} \\ \text{pro všechna řešení (6)}}$$

$C_i \in \mathbb{R}$ se dopočtou z počáteční podmínky (předepsaných reálných hodnot):

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \tilde{y}_0, \\ y'(x_0) &= \tilde{y}_1, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= \tilde{y}_n. \end{aligned}$$

1.5 Lineární diferenciální rovnice s pravou stranou

Obecný tvar

$$\mathcal{L}y = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = q \quad (8)$$

Předpokládáme, že funkce p_i, q jsou spojité na $I \subset \mathbb{R}$.

Ansatz¹ – Variace konstant

Odhadujeme, že řešení rovnice s pravou stranou je

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i,$$

kde c_i jsou zatím neznámé funkce na intervalu I . Poté dosadíme do rovnice (5).

Na každý sčítanec aplikujeme Leibnizovo pravidlo a naložíme dodatečné podm. na funkce c_i

$$y' = \sum_{i=1}^n c_i y_i' + \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i' y_i}_{\substack{\doteq 0 \text{ na } I}}$$

¹edukovaný odhad

$$\begin{aligned}
y'' &= \sum_{i=1}^n c_i y_i'' + \underbrace{\sum_{i=1}^n c'_i y_i'}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ na } I} \\
&\vdots \\
y^{(k)} &= \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(k)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(k-1)}}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ na } I} \\
y^{(n)} &= \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Dosadíme do (8).

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(n-1)} + p_{n-1} \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n-1)} + \dots + p_0 \sum_{i=1}^n c_i y_i &= q \\
\sum_{i=1}^n c_i \underbrace{\mathcal{L}y_i}_{= 0 \text{ na } I} + \underbrace{\sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(n-1)}}_{\text{požadujeme, aby platilo na } I} &= q
\end{aligned}$$

Řešení jsme takto redukovali na to, zda zvládneme najít c_i , pro které máme n podmínek, které lze zapsat do matice.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q \end{pmatrix}$$

Soustava rovnic je řešitelná právě tehdy, když je matice soustavy regulární, tj. právě tehdy, když je determinant matice nulový. To ale platí, protože se jedná o Wronského matici FS.

Poznámka 1.23 (Cramerovo pravidlo). Zavedeme determinanty $\Delta = \mathcal{W}(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ a Δ_i definovaný jako

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & 0 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & 0 & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & q & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

kde za i -tý sloupec dosadíme pravou stranu řešené rovnice $(0, 0, \dots, q)^T$. Získáme c_i' jako podíl Δ_i a Δ ,

$$c_i' = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

c_i získáme integrací c_i' .

$$c_i = \int c_i' + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

Dosadíme zpět do řešení $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$

$$y = \sum_{i=1}^n \left(\int c'_i + K \right) y_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\int c'_i \right) y_i}_{\text{partikulární řeš.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n K_i y_i}_{\text{homogenní řeš.}}$$

Poznámka 1.24. Nevýhoda variace konstant je výpočetní náročnost, zejména integrace. Ve speciálních případech pravé strany diferenciální rovnice lze řešit jednodušeji ansatzem.

Speciální pravé strany

Příklad 1.6. Najděte partikulární řešení rovnice $y''' - 3y'' + 4y = x^2 + 2x$.

Rovnice má speciální pravou stranu – polynom stupně 2. Odhadneme partikulární řešení jako polynom druhého stupně $y_p = ax^2 + bx + c$, přičemž budeme hledat hodnoty konstant $a, b, c \in \mathbb{R}$. V řešené LDR se vyskytují derivace do 3. stupně. Postupně tedy budeme y_p derivovat.

$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 + bx + c \\ y'_p &= 2ax + b \\ y''_p &= 2a \\ y'''_p &= 0 \end{aligned}$$

Tyto mezivýsledky dosadíme do levé strany řešené LDR.

$$-6a + 4ax^2 + 4bx + 4c = x^2 + 2x \quad (\forall x \in I)$$

Nyní přejdeme k výpočtu konstant a, b, c . Rozepíšeme rovnici podle mocniny x na soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} x^2 : \quad & 4a = 1 \\ x^1 : \quad & 4b = 2 \\ x^0 : \quad & -6a + 4c = 0 \end{aligned}$$

Získali jsme hodnoty konstant $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{8}$. Partikulární řešení rovnice tedy vychází

$$y_p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}, \quad \text{Dom}(y_p) = \mathbb{R}.$$

Příklad 1.7. Najděte partikulární řešení rovnice $y'' + y' = x^2$.

Tato rovnice má také speciální pravou stranu – polynom stupně 2. Odhadneme tedy partikulární řešení opět obecný polynom stupně 2 – $y_p = ax^2 + bx + c$. Postupujeme obdobně jako u předchozího příkladu. Obecný polynom dvakrát zderivujeme a dosadíme do levé strany řešené rovnice.

$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 + bx + c \\ y'_p &= 2ax + b \\ y''_p &= 2a \\ 2a + b + 2ax &= x^2 \end{aligned}$$

Rozepíšeme podle mocniny x na soustavu rovnic. Hned u x^2 narazíme na problém, protože vychází rovnost $x^2 : 0 = 1$, kterou nelze splnit. Odhadované řešení y_p tedy není správné a je nutné provést lepší odhad partikulárního řešení.

Provedeme nový odhad řešení $y_r = x(ax^2 + bx + c)$. Postupujeme obdobně. Derivujeme a zapíšeme do levé strany LDR.

$$\begin{aligned}y_r &= ax^3 + bx^2 + cx \\y_r' &= 3ax^2 + 2bx + c \\y_r'' &= 6ax + 2b \\6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c &= x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 : \quad 3a &= 1 \\x^1 : \quad 2b + 6a &= 0 \\x^0 : \quad c + 2b &= 0\end{aligned}$$

Řešením soustavy získáme hodnoty $a = \frac{1}{3}, b = -1, c = 2$. Partikulární řešení rovnice vychází

$$y_r = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x, \text{ Dom}(y_r) = \mathbb{R}.$$

Obecně lze speciální pravé strany (PS) rozdělit na dvě skupiny, které mají své typické tvary odhadu partikulárního řešení (ansatzu).

1. $PS = P(x)e^{\mu x}$, kde $P(x)$ je polynom stupně m a μ je ρ -násobný kořen char. polynomu
→ ansatz: $y_p(x) = x^\rho Q(x)e^{\mu x}$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n
2. $PS = e^{\alpha x}(P(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x))$, kde $P(x)$ a $R(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m a $\alpha + \beta i$ je ρ -násobný kořen char. polynomu
→ ansatz: $y_p(x) = x^\rho(Q(x) \cos(\beta x) + S(x) \sin(\beta x))e^{\alpha x}$, kde $Q(x)$ a $S(x)$ jsou polynomy stupně m

2 Funkce více proměnných-základní pojmy, spojitost a limita

Funkcí více proměnných rozumíme zobrazení f otevřené podmnožiny $\text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$:

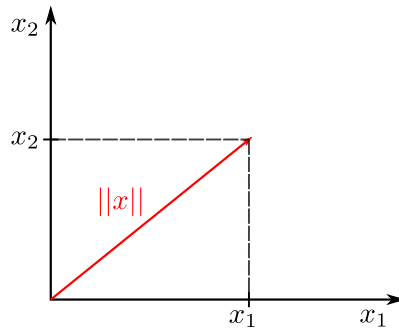
$$f : \text{Dom}(f) (\in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} (\in \text{Dom}(f)) \longmapsto f(\mathbf{x}).$$

Dále si zadefinujeme základní pojmy, které budeme dále používat, jsou to norma, skalární součin a metrika.

Norma

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Na prostoru \mathbb{R}^n definujeme Eukleidovskou normu vektoru \mathbf{x} : $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Platí následující vztahy: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$



Obr. 4: Norma vektoru \mathbf{x} .

1. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$
2. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$... trojúhelníková nerovnost
3. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Vlastnosti 1., 2., 3. lze uvažovat za axiomy a získat tak další normy.

Skalární součin

Dva vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} svírají úhel α . Platí následující vztah:

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|},$$

kde jsme zavedli standardní skalární součin vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} jako

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Skalární součin generuje normu vektoru:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

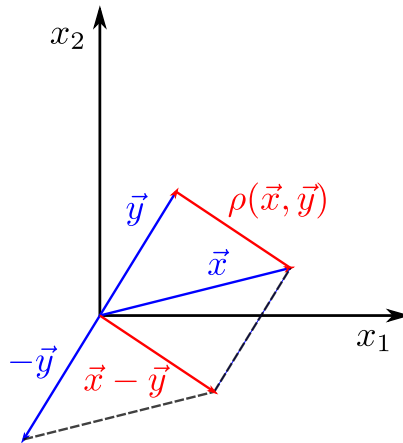
Platí následující vztahy: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1. $\langle \alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Metrika

Metriku $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definujeme jako normu rozdílu vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} ,

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$



Obr. 5: Grafické znázornění metriky $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ generované eukleidovskou normou.

Platí následující vztahy: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$

1. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
2. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$
3. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$

Vztahy 1., 2., a 3. lze považovat za axiomy a získat tak například následující metriku.

Příklad 2.1 (Triviální metrika). *Mějme množinu studentů M , $M = \{S : S \text{ je student MAT}_4\}$, $\rho : M \times M \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$. Můžeme zavést metriku, která vyhovuje axiomům*

$$\rho(S_1, S_2) := \begin{cases} 1 & S_1 \neq S_2 \\ 0 & S_1 = S_2 \end{cases}.$$

2.1 Spojitost funkce více proměnných

Motivace

Funkce jedné proměnné: Funkce $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta) (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

Funkce n proměnných

Funkce $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) (|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon)$.

Definice 2.1. ε -okolím bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, kde $\varepsilon > 0$, rozumíme množinu $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\}$.

Definice 2.2. Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkce definovaná na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n (\in \text{Dom} f)$. Potom funkce f je spojitá, právě když $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_\delta(\mathbf{a}) (|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon))$.

2.2 Limita funkce více proměnných

Definice 2.3. Redukovaným okolím bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu $\mathcal{U}_\varepsilon^*(\mathbf{a}) := \mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\}$.

Definice 2.4. Buď $f : \text{Dom} f (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ funkce definovaná na nějakém redukovaném okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Potom funkce f má v bodě \mathbf{a} limitu $c \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\mathbf{a}) (|f(\mathbf{x}) - c| < \varepsilon))$.

2.3 Vztah mezi limitou a spojitostí

Pozorování: Je-li funkce f v bodě \mathbf{a} spojitá, pak platí $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Pozorování: Lze dosáhnout opačné implikace? Existuje-li v bodě \mathbf{a} limita, pak lze funkci f dodefinovat na \hat{f} , která již bude spojitá v bodě \mathbf{a} .

$$\hat{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \dots \mathbf{x} \in \text{Dom}(f) \setminus \{\mathbf{a}\} \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) & \dots \mathbf{x} = \mathbf{a} \end{cases}$$

3 Parciální a směrové derivace

3.1 Parciální derivace

Definice 3.1. Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \text{Dom}(f)$. Parciální derivací funkce f podle proměnné x_i v bodě \mathbf{a} nazýváme vlastní limitu (existuje-li)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

Poznámka 3.2. Zavedeme-li $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako $\psi_i(x) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$, potom

$$\frac{d\psi_i}{dx}(a_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_i(a_i + h) - \psi_i(a_i)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

\Rightarrow výpočet parciální derivace podle x_i : zafixujeme všechna $x_j, j \neq i$, a funkci f derivujeme stejně jako bychom derivovali funkci jedné proměnné x_i .

Poznámka 3.3. Parciální derivaci podle x_i lze počítat ve všech bodech, kde existuje, a na výsledek lze nahlížet jako novou funkci $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tzn. lze potom opět derivovat podle proměnné $x_j, j \in \hat{n}$. Klademe:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right)(\mathbf{a})$$

Terminologie.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \dots \text{druhá parciální derivace podle } x_i$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \dots \text{(smíšená) parciální derivace podle } x_i \text{ a } x_j$$

POZOR! V případě smíšených derivací obecně **závisí** na pořadí derivování!

Příklad 3.1. Nalezněte druhé smíšené parciální derivace funkce $f(x, y) = |x| + y$ v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$.

1.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = 0 \quad (\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2)$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{neexistuje} & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{neexistuje } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

Podobně lze zavést i k -tou parciální derivaci podle $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, kde $i_1, i_2, \dots, i_k \in \hat{n}$, jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \Big|_{\mathbf{a}} := \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}} \right) \right) \Big|_{\mathbf{a}}$$

Definice 3.4. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na jistém okolí bodu \mathbf{a} a necht' $\forall i \in \hat{n}$ existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$. Potom gradientem funkce f v bodě \mathbf{a} rozumíme vektor

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) \equiv \nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Příklad 3.2. Spočítejte gradient funkce $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ v bodě $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) = -24$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) = 8 \ln 2$$

$$\Rightarrow \nabla f(\mathbf{a}) = (12, -24, 8 \ln 2)$$

Aritmetika parciálních derivací: stejná jako u obyčejných derivací, tj.:

Mají-li f, g v \mathbf{a} parciální derivaci podle x_i , $\lambda \in \mathbb{R}$, potom:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \dots \text{Leibnitzovo pravidlo} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{f}{g}\right)(\mathbf{a}) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2} \text{ pokud } g(\mathbf{a}) \neq 0.\end{aligned}$$

Věta 3.5. Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a necht' na jistém okolí bodu \mathbf{a} existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je v bodě \mathbf{a} spojitá. Potom existuje i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ a platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Bez důkazu.

3.2 Směrová derivace

Motivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(\mathbf{a})}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}, \text{ kde } (\mathbf{e}_i)_j := \delta_{i,j}, \text{ tedy } \|\mathbf{e}_i\| = 1 \\ &\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \text{ "měří" míru změny hodnot funkce } f, \text{ posuneme-li se z } \mathbf{a} \text{ ve směru } \mathbf{e}_i \\ &\rightarrow \text{ proč se nepodívat na změnu v libovolném směru:}\end{aligned}$$

Definice 3.6. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definována na nějakém okolí bodu \mathbf{a} , $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Derivací funkce f ve směru \mathbf{s} v bodě \mathbf{a} rozumíme vlastní limitu (existuje-li):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a})$$

Poznámka 3.7. Hodnota směrové derivace nezávisí na velikosti \mathbf{s} . Vezmeme-li totiž libovolné $\alpha > 0$ a položíme-li $\mathbf{r} := \alpha\mathbf{s}$, dostáváme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{1}{\alpha\|\mathbf{s}\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\alpha\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{h} = \left/ \tilde{h} := \alpha h \right/ = \\ &= \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \frac{f(\mathbf{a} + \tilde{h}\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{\tilde{h}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a})\end{aligned}$$

Poznámka 3.8.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}), \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \frac{d\varphi}{dt}(0) = \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h}\end{aligned}$$

Poznámka 3.9. Někteří autoři v definici $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a})$ nenásobí faktorem $\frac{1}{\|\mathbf{s}\|}$. Derivace potom závisí na velikosti \mathbf{s} (lineárně). Jiní zase fixují $\|\mathbf{s}\| = 1$, což souhlasí s naší definicí.

Výpočet směrové derivace

1. Z definice či jednodušeji z Poznámky 3.8
2. Pro dostatečně hladké funkce je směrová derivace jen odpovídající lineární kombinace parciálních derivací:

Věta 3.10. Necht $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v \mathbf{a} spojité parciální derivace. Potom f má v \mathbf{a} i derivaci v libovolném směru $\mathbf{s} \neq 0$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Příklad 3.3. Vypočítejte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ ve směru $\mathbf{s} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ v bodě $\mathbf{a} = (1, 1)$.

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Zkusíme oba postupy

1.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) = \left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 \\ \varphi'(t) &= 2\left(1 + \frac{1}{2}t\right)\frac{1}{2} - 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi'(0) &= 1 - \sqrt{3} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(1, 1) \end{aligned}$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \Rightarrow \text{grad } f(\mathbf{a}) = (2, -2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \left\langle (2, -2), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = 1 - \sqrt{3}$$

→ výhodnější postup; zejména měníme-li \mathbf{s} a/nebo \mathbf{a}

Geometrická interpretace gradientu

Mějme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in \text{Dom}(f)$ pevně zvolené a hledejme $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{s}\| = 1$ tak, aby se funkce f ve směru \mathbf{s} nejvíce měnila.

Řešení: Necht f má spojité parciální derivace \Rightarrow

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle = \|\text{grad } f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{s}\| \cos \alpha \dots \cos \alpha - \text{úhel svíraný mezi } \text{grad } f(\mathbf{a}) \text{ a } \mathbf{s}$$

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a})$ je – **maximální** pro $\alpha = 0$ (resp. $\alpha = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$), tj. $\Leftrightarrow \mathbf{s}$ je rovnoběžné s $\text{grad } f(\mathbf{a})$

a má stejnou orientaci

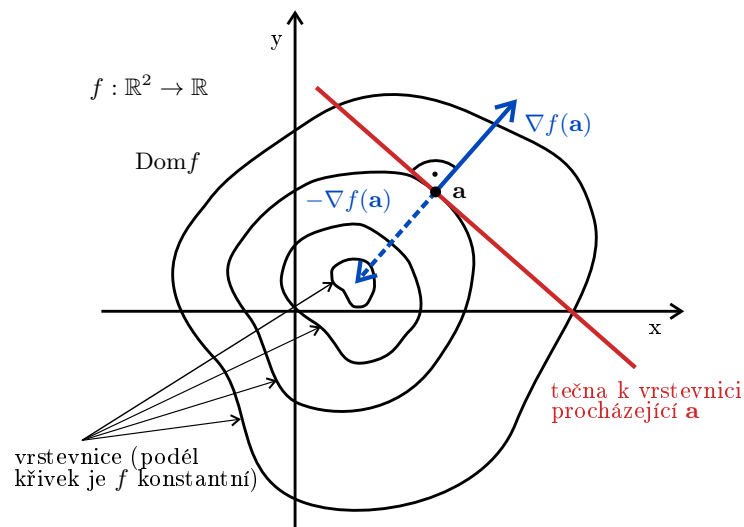
– **minimální** pro $\alpha = \pi$ (resp. $\alpha = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$), tj. $\Leftrightarrow \mathbf{s}$ je rovnoběžné s $\text{grad } f(\mathbf{a})$

a má opačnou orientaci

– **nulová** pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (resp. $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$), tj. $\Leftrightarrow \mathbf{a}$ je kolmá k $\text{grad } f(\mathbf{a})$

Poznámka 3.11. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) = 0$ ($\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), pokud $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$. Tento případ v příkladě výše neuvažujeme, pojem rovnoběžnosti, resp. kolmosti, s nulovým vektorem nedává smysl. Později uvidíme, že podmínka $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$ je nutná podmínka lokálního extrému funkce f v bodě \mathbf{a} .

Závěr: $\text{grad } f(\mathbf{a})$ udává **směr největšího růstu** funkce f v bodě \mathbf{a} . ($-\text{grad } f(\mathbf{a})$) potom udává **směr největšího poklesu** funkce f v bodě \mathbf{a} . Ve směru kolmém ke $\text{grad } f(\mathbf{a})$ se funkce f v "prvním přiblížení" nemění. Jedná se o "směr tečny k vrstevnici v definičním oboru funkce f ".



Obr. 6: Gradient funkce f v \mathbf{a} .

3.3 Vektorové funkce

jsou zobrazení $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$; $n, r \in \mathbb{N}$ (obecně různé)

Příklad 3.4. Intenzita elektrického pole $\mathbf{E} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ každému času a bodu prostoru přiřazuje vektor.

Poznámka 3.12. \mathbf{F} lze chápat jako r -tici funkcí $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in \hat{r}, \mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, \dots, F_r)$.

Pokud $n = r = 3$, tak zavádíme operátor **rotace**, který z jedné vektorové funkce $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3)$ udělá novou vektorovou funkci:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Obecně se ale zavádí **divergence** vektorové funkce $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jako

$$\text{div } \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i},$$

výsledkem je skalární funkce.

Úloha 3. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mající záměnné druhé smíšené derivace. Ukažte, že

1. $\text{rot grad } f = 0$
2. $\text{div rot } \mathbf{F} = 0$
3. $\text{div grad } f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (:= \Delta \dots \text{ Laplaceův operátor})$
4. $\text{rot rot } \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F}$
5. $\text{div}(f \cdot \mathbf{F}) = f \text{ div } \mathbf{F} + \langle \mathbf{F}, \text{grad } f \rangle$

3.4 Derivace složené funkce

Motivace

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

platí $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Zobecnění pravidla (bez důkazu):

$$\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s, \text{ zde } F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$$

\rightarrow složená funkce $g \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lze parciálně derivovat a platí:

$$\frac{\partial (g \circ \mathbf{F})}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial g}{\partial y_j}(\mathbf{F}(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \dots \text{řetězové pravidlo}$$

Příklad 3.5. $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{F}_1(x, y, z) = 2xy, \mathbf{F}_2(x, y, z) = x + y + z, g(u, v) = u^2 + v^2$. Nalezněte $\frac{\partial g \circ \mathbf{F}}{\partial x}, \frac{\partial g \circ \mathbf{F}}{\partial y}, \frac{\partial g \circ \mathbf{F}}{\partial z}$. Vypočteme parciální derivaci podle x , zbylé ponecháváme čtenáři jako cvičení.

1. řetězové pravidlo

$$\begin{aligned} \frac{\partial g \circ \mathbf{F}}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial g}{\partial u}(\mathbf{F}(x, y, z)) \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial v}(\mathbf{F}(x, y, z)) \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = \\ &= 2F_1(x, y, z) \cdot 2y + 2F_2(x, y, z) \cdot 1 = 8xy^2 + 2(x + y + z) \end{aligned}$$

2. dosazení

$$\begin{aligned}(g \circ \mathbf{F})(x, y, z) &= (2xy)^2 + (x + y + z)^2 = \\ &= \frac{\partial g \circ \mathbf{F}}{\partial x}(x, y, z) = 4xy \cdot 2y + 2(x + y + z) = 8xy^2 + 2(x + y + z)\end{aligned}$$

→ vidíme, že pro konkrétní dvojice funkcí \mathbf{F}, g bývá výhodnější nejprve spočítat $g \circ \mathbf{F}$ a poté teprve derivovat, pro práci s obecnými funkcemi je ale řetězové pravidlo nepostradatelné.

4 Kvadratické formy

Definice 4.1. Buď $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ symetrická matice $n \times n$. Symetrickou bilineární formou v \mathbb{R}^n nazýváme zobrazení $qq : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem $qq(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbb{A}\mathbf{y}^T =$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j.$$

Matice \mathbb{A} nazýváme maticí bilineární formy qq .

Definice 4.2. Kvadratickou formou rozumíme zobrazení $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem $q(\mathbf{x}) := qq(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$.

Úloha 4. 1. Ukažte, že qq je skutečně bilineární, tj. lineární v obou proměnných, tj. platí např. $qq(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha qq(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + qq(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

2. Ukažte, že qq je skutečně symetrická, tj. $qq(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = qq(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

3. Ukažte, že $qq(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = qq(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = 0$

Obecně q zobrazuje do \mathbb{R} , ale může zobrazovat i jen do $\langle 0, +\infty \rangle$ či $(-\infty, 0)$. Dále $q(\mathbf{0}) = qq(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$, ale pro některé formy se žádný další vektor na nulu nezobrazí. To nás vede k definici:

Definice 4.3. Buď q kvadratická forma. Říkáme, že q je

1. **Pozitivně, resp. negativně definitní** $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : q(\mathbf{x}) > 0$, resp. $q(\mathbf{x}) < 0$.
2. **Pozitivně, resp. negativně semidefinitní** $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : q(\mathbf{x}) \geq 0$, resp. $q(\mathbf{x}) \leq 0$ a současně $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : q(\mathbf{x}) = 0$.
3. **Indefinitní** $\Leftrightarrow \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : q(\mathbf{x}) < 0 \wedge q(\mathbf{y}) > 0$.

Příklad 4.1. $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1.

$$\begin{aligned}q(x, y) &= x^2 + y^2 \left(= (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \geq 0 \dots \text{suma kvadrátů s kladnými koeficienty} \\ &\wedge q(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = \mathbf{0} \Rightarrow \text{pozitivně definitní forma (PD)}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 q(x, y) &= -2x^2 + 2xy - 3y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
 &= -2 \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}y^2 \leq 0 \wedge q(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{y}{2} = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (x, y) = 0 \\
 &\Rightarrow \text{negativně definitní forma (ND)}
 \end{aligned}$$

Doplnění na čtverec \rightarrow chceme zahrnout všechny členy, obsahující vybranou proměnnou, zde x , tj. $-2x^2 + 2xy$

3.

$$q(x, y) = 10x^2 \geq 0 \wedge q(0, y) = 0; \exists \mathbf{x} \neq 0 : q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \text{pozitivně semidefinitní forma (PSD)}$$

4.

$$\begin{aligned}
 q(x, y) &= -x^2 + 2xy - y^2 = -(x-y)^2 \leq 0 \wedge q(x, x) = 0 (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}), \text{ tj. } \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ např. } \mathbf{x} = (1, 1) \\
 q(\mathbf{x}) &= 0 \Rightarrow \text{negativně semidefinitní forma (NSD)}
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 q(x, y) &= xy = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots \text{trik: substituce } x = u + v, y = u - v \\
 q(x, y) &= (u + v)(u - v) = u^2 - v^2 = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 \dots \text{nabývá klad. i zápor hodnot, např.} \\
 q(1, 1) &= 1 \geq 0, q(1, -1) = -1 \leq 0 \Rightarrow \text{indefinitní forma (IND)}
 \end{aligned}$$

Úloha 5. Rozmyslete si, že

$$\begin{aligned}
 q \text{ je ND} &\Leftrightarrow (-q) \text{ je PS,} \\
 q \text{ je NSD} &\Leftrightarrow (-q) \text{ je PSD.}
 \end{aligned}$$

Pozorování (bez důkazu): Formu q lze vždy doplnit na čtverce, (v případě, kdy máme jen smíšené členy, pomocí triku jako v bodě 5 Příkladu 4.1), čtverců je nejvýše n (pro $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Pokud v každém kroku vtáhneme do čtverce všechny výskyty některé z proměnných, lze odvodit následující:

$$\begin{aligned}
 q(\mathbf{x}) &= a_1(?)^2 + a_2(?)^2 + \dots + a_l(?)^2, \text{ kde } a_i \in \mathbb{R} \setminus 0 \text{ a } l \leq n \\
 l = n &\begin{cases} (\forall i \in \hat{n})(a_i > 0) \dots q \text{ je PD} \\ (\forall i \in \hat{n})(a_i < 0) \dots q \text{ je ND} \end{cases} \\
 l < n &\begin{cases} (\forall i \in \hat{l})(a_i > 0) \dots q \text{ je PSD} \\ (\forall i \in \hat{l})(a_i < 0) \dots q \text{ je NSD} \end{cases} \\
 &\exists a_i > 0 \wedge \exists a_j < 0 \dots q \text{ je IND}
 \end{aligned}$$

Úloha 6. Promyslete: Obsahuje-li diagonála matice \mathbb{A} kladné i záporné prvky, potom asociovaná forma q je vždy IND.

Úloha 7. Promyslete: Jak snadno určíme typ formy, je-li \mathbb{A} diagonální, (tj. $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$)?

Úloha 8. Promyslete (bonus): Jak určíme typ formy ze znalosti vlastních čísel matice \mathbb{A} ?

Sylvestrovo kritérium (pouze pro určení PD a ND!)

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbb{A}\mathbf{x}^T$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Spočítejme subdeterminanty (hlavní minory) matice \mathbb{A} , tedy

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{11} \\ \Delta_2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \det \mathbb{A} \end{aligned}$$

Platí:

1. q je PD $\Leftrightarrow (\forall i \in \hat{n})(\Delta_i > 0)$
2. q je ND $\Leftrightarrow (\forall i \in \hat{n})((-1)^i \Delta_i > 0)$

5 Lokální extrémů funkce více proměnných

Definice 5.1. Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f má v \mathbf{a} (ostré) lokální minimum, resp. (ostré) lokální maximum \Leftrightarrow existuje-li redukované okolí $U^*(\mathbf{a})$ tak, že $\forall x \in U^*(\mathbf{a}) : (f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})) f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$, resp. $(f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})) f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$. (Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme (ostrými) lokálními extrémů.

Příklad 5.1. Pomocí definice nalezněte lokální extrémů funkcí

1.

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} : 1 = f(\mathbf{0}) > f(x, y) \Rightarrow f \text{ má v } \mathbf{0} \text{ ostré lokální maximum}$$

2.

$$g(x, y) = 1 - x^2 y^2$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} : 1 = g(\mathbf{0}) \geq g(x, y) \wedge g(0, y) = g(x, 0) = g(\mathbf{0}) = 1$$

$$\Rightarrow g \text{ má v } \mathbf{0} \text{ neostré lokální maximum, stejně tak ho má v } (0, y), y \in \mathbb{R} \text{ a } (x, 0), x \in \mathbb{R}$$

V úlohách výše jsme lokální extrémů uhodli. Jak si poradit v ne tak jasných případech? →

Věta 5.2. (Nutná podmínka lokálního extrému) *Bud' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Má-li f v bodě \mathbf{a} lokální extrém a má-li v něm derivaci podle i -té proměnné, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$*

Důkaz. Necht' f má v \mathbf{a} např. lokální minimum, tj. $(\exists U^*(\mathbf{a}))(\forall \mathbf{x} \in U^*(\mathbf{a}))(f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}))$. Máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h} = c \in \mathbb{R} \text{ a chceme ukázat, že } c = 0$$

Důkaz provedeme sporem. Kdyby $c \neq 0$, např. $c > 0$, potom

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} = \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h} > 0$$

⇒ $f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) < f(\mathbf{a})$ pro $\forall h : |h|$ dost malá, tj. i pro nějaká $\mathbf{x} = \mathbf{a} + h\mathbf{e}_i$ ležící v $U^*(\mathbf{a})$, kde ale platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ ⇒ **spor.** (Podobně pro maximum $\forall c > 0$) □

Úloha 9. *Porovnejte Větu 5.2 s nutnou podmínkou lokálního extrému funkce funkce jedné proměnné!*

POZOR: Stejně jako v 1D, nulovost derivací **neimplikuje** lokální extrém. Viz sedlový bod. Nicméně nám podmínka nulovosti derivace dává tzv. body „podezřelé z extrému“, tzv. *stacionární body* funkce $f \Leftrightarrow \text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$. Jak tedy rozhodnout, zda stacionární bod \mathbf{a} je bodem lokálního extrému funkce f ? Jak určit typ extrému? Podobně jako v 1D nám pomůže 2. derivace a podobně jako v 1D nám ani ta neposkytne vždy odpověď.

Taylorův rozvoj funkce více proměnných/kvadratická aproximace

Odvodíme: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, f „dostatečně pěkná“. Potom

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle + (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T d^2 f_{\mathbf{a}} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \text{„relativně malý zbytek“}$$

zde $d^2 f_{\mathbf{a}}$ je matice druhých parciálních derivací f v \mathbf{a} , tj.

$$(d^2 f_{\mathbf{a}})_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \dots \text{ Hessova matice}$$

→ příslušná kvadratická forma se nazývá *druhý diferenciál* funkce f v bodě \mathbf{a} . (Ta může být PD, ND, PSD, NSD či IND)

Důkaz. $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{s}\| = 1$ zatím libovolné.

- zavedeme pomocnou funkci $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako $\phi(h) := f(\mathbf{a} + h\mathbf{s})$ na nějakém otevřeném intervalu I , který obsahuje bod $h = 0$
- pro ϕ máme běžný Taylorův rozvoj (je-li $\phi \in C^2(I)$ a existuje-li ϕ''' na I) v $h = 0$:

$$\phi(h) = \phi(0) + \phi'(0)h + \frac{1}{2}\phi''(0)h^2 + \frac{1}{6}\phi'''(\xi)h^3, \quad (9)$$

zde $\xi = \xi(h) \in I$.

Poznámka 5.3. Je-li $\phi''' \in C(\bar{I})$, můžeme na I zbytek odhadnout jako $\left| \frac{1}{6} \phi'''(\xi) h^3 \right| \leq M|h|^3$, kde M je nějaká konstanta. Píšeme $\frac{1}{6} \phi'''(\xi) h^3 = \mathcal{O}(h^3)$.

- nyní vyjádříme členy na pravé straně (9) v termínech f

$$\begin{aligned}\phi(0) &= f(\mathbf{a}) \\ \phi'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle \\ \phi''(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi'(t) - \phi'(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{a})}{t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} f \right) (\mathbf{a})\end{aligned}$$

- máme tedy:

$$f(\mathbf{a} + h\mathbf{s}) = f(\mathbf{a}) + \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle h + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} f \right) (\mathbf{a}) h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

- upravíme ještě:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \right) (\mathbf{a}) &= \left\langle \left(\text{grad } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \right) (\mathbf{a}), \mathbf{s} \right\rangle = \langle \text{grad} \langle \text{grad } f, \mathbf{s} \rangle (\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{a}) s_i s_j = \\ &= \mathbf{s} d^2 f_{\mathbf{a}} \mathbf{s}^T\end{aligned}$$

- nyní položíme:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}, \quad h = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

a dostáváme:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) d^2 f_{\mathbf{a}} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3)$$

□

Věta 5.4. (Postačující podmínka lokálního extrému): *Bud' \mathbf{a} stacionární bod funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť má tato funkce na nějakém okolí bodu \mathbf{a} spojité parciální derivace do 3. řádu. Je-li 2. diferenciál funkce f v bodě \mathbf{a}*

$$\left. \begin{array}{l} PD \\ ND \\ ND \end{array} \right\} \text{potom} \left\{ \begin{array}{l} \text{má } f \text{ v } \mathbf{a} \text{ ostré lokální minimum} \\ \text{má } f \text{ v } \mathbf{a} \text{ ostré lokální maximum} \\ f \text{ nemá v } \mathbf{a} \text{ lokální extrém, } \mathbf{a} \text{ je tzv. sedlový bod.} \end{array} \right.$$

Poznámka 5.5. Je-li $d^2 f_{\mathbf{a}}$ PSD či NSD, tak nelze na základě 2. derivací o lokálním extrému rozhodnout! (Srovnejte s 1D případem!)

Důkaz. $\mathbf{a} \dots$ bod, tj. $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow$ Taylorův rozvoj v \mathbf{a} :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) d^2 f_{\mathbf{a}} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T}_{(*)} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3)$$

zanedbáme-li zbytek, tak $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$:

1. $(*) > 0$ pro $d^2 f_{\mathbf{a}}$ PD
2. $(*) < 0$ pro $d^2 f_{\mathbf{a}}$ ND
3. $(*)$ mění znaménko pro $d^2 f_{\mathbf{a}}$ IND

→ zbytek je vůči $(*)$ zanedbatelný jen pro $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ malé, tj. na nějakém okolí bodu \mathbf{a} , na něm potom platí $(\mathbf{x} \neq \mathbf{a})$:

1. $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}) \Rightarrow$ OL minimum
2. $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) \Rightarrow$ OL maximum
3. pro nějaká \mathbf{x} : $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$ a jiná \mathbf{y} : $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{a}) \Rightarrow$ v \mathbf{a} není lokální extrém

□

Úloha 10. Co v důkazu selže pro $d^2 f_{\mathbf{a}}$ semidefinitní?

POZOR: Jedná se o podmínku postačující! Tj. funkce může mít např. OL minimum i v bodech, kde $d^2 f_{\mathbf{a}}$ je PSD viz Příklad 5.2.

Příklad 5.2. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^4$.

$\text{grad } f(x, y) = (2x, 4y^3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) = \mathbf{a} \dots$ jediný stacionární bod

$$d^2 f_{\mathbf{a}} = ? : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\Rightarrow d^2 f_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ čili } d^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = 2h_1^2 \geq 0 \wedge d^2 f_{\mathbf{a}}((0, 1)) = 0$$

$\Rightarrow d^2 f_{\mathbf{a}}$ je PSD

\Rightarrow Větu 5.4 nelze použít, ale přesto: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{a}\}$

$0 = f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{0}) < f(x, y)$, tj. v \mathbf{a} je ostré lokální minimum.

6 Vázané extrémy funkce více proměnných

Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n : \dim M < n$ (např. M je křivka v rovině či 3D prostoru nebo M je plocha v 3D prostoru), $\mathbf{a} \in M$.

Definice 6.1. Říkáme, že f nabývá v \mathbf{a} (ostrého) lokálního minima vzhledem k $M \Leftrightarrow (\exists U_{\mathbf{a}}^*)(\forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}^* \cap M)(f(\mathbf{x})(>) \geq f(\mathbf{a}))$.

Poznámka 6.2. Analogicky definujeme další typy extrémů vzhledem k M . Zkuste sami!

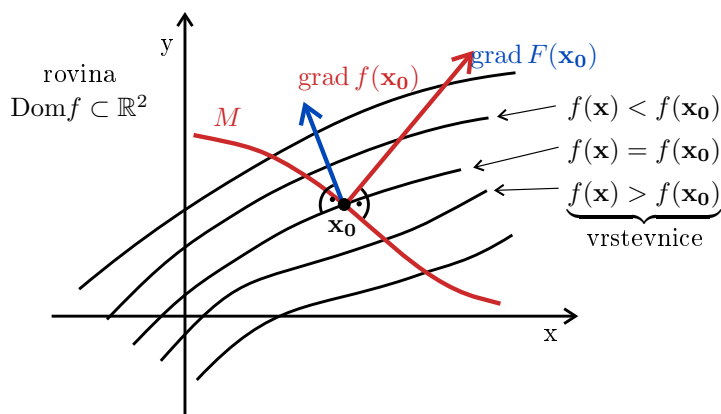
Budeme uvažovat jen množiny zadané vazbami tvaru:

$$F_i(\mathbf{x}) = C_i, i \in \hat{l}, l < n; \text{ kde } C_i \text{ jsou konstanty} - \text{ BÚNO je lze volit nulové}$$

tj. $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\forall i \in \hat{l})(F_i(\mathbf{x}) = C_i)\}$. V takovém případě se lokální extrémy vzhledem k M nazývají rovněž **vázané extrémy**

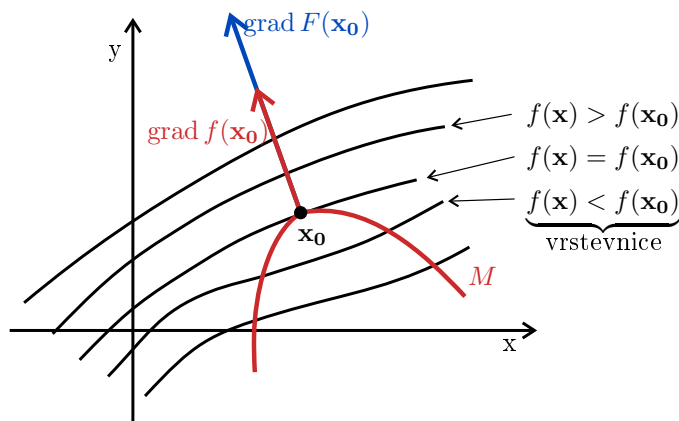
Začneme s nejjednodušším případem, kdy $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : F(\mathbf{x}) = C\}$, kde f, F budou mít tolik derivací, kolik budeme potřebovat. Níže $\mathbf{x}_0 \in M$.

- oba gradienty $\text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ a $\text{grad } F(\mathbf{x}_0)$ jsou kolmé k tečnám příslušných „vrstevnic“, kde vrstevnicí funkce F je samotná množina M , protože dle definice je na ní F konstantní.
 - pohybujeme-li se po vazbě (červené křivce), protínáme vrstevnici funkce f pro hodnoty menší i větší než $f(\mathbf{x}_0) \Rightarrow$ v situaci zachycené na Obr. 7 tedy nemá v \mathbf{x}_0 vázaný lokální extrém (extrém vzhledem k M)



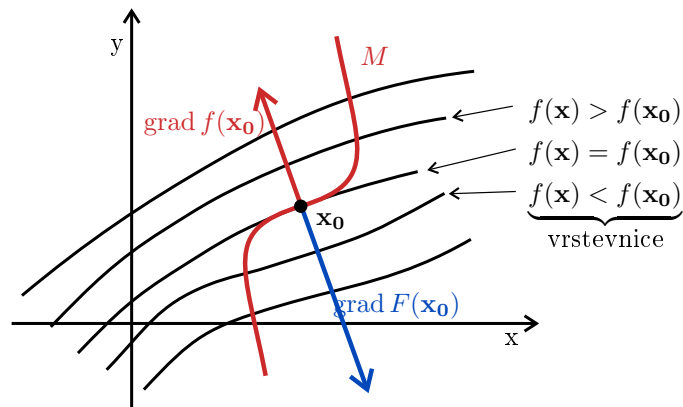
Obr. 7: Hledání vázaného extrému na M ve zvoleném bodě \mathbf{x}_0 , kde M jsou body splňující $F(\mathbf{x}) = C$. Platí $F(\mathbf{x}_0) = C$, neboť $\mathbf{x}_0 \in M$.

- na Obr. 8 je v \mathbf{x}_0 nabýváno ostrého lokálního maxima vzhledem k M
 - POZOROVÁNÍ: $\text{grad } F(\mathbf{x}_0) \parallel \text{grad } f(\mathbf{x}_0)$



Obr. 8: Hledání vázaného extrému na M ve zvoleném bodě \mathbf{x}_0 , kde M jsou body splňující $F(\mathbf{x}) = C$.

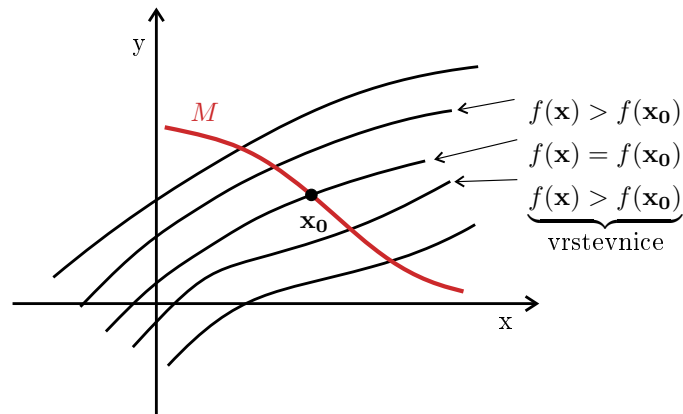
- $\text{grad } F(\mathbf{x}_0) \parallel \text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ ale není postačující podmínka pro vázaný extrém, viz Obr. 9.
 - zde $\text{grad } F(\mathbf{x}_0) \parallel \text{grad } f(\mathbf{x}_0)$, ale f nenabývá v \mathbf{x}_0 vázaného extrému



Obr. 9: Hledání vázaného extrému na M ve zvoleném bodě \mathbf{x}_0 , kde M jsou body splňující $F(\mathbf{x}) = C$.

4. • na Obr. 10 je v \mathbf{x}_0 *neostré* lokální minimum f (bez vazby), tím pádem i s libovolnou vazbou.

Úloha 11. (ke 4. bodu) *Může být ostré i neostré dle konkrétního druhu vazby?*



Obr. 10: Hledání vázaného extrému na M ve zvoleném bodě \mathbf{x}_0 , kde M jsou body splňující $F(\mathbf{x}) = C$.

\Rightarrow Z 1. - 4. lze vypočítat, že **nutná** podmínka pro vázaný lokální extrém zní

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \parallel \text{grad } F(\mathbf{x}_0)$$

to lze přepsat: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ (tzv. *Lagrangeův multiplikátor*):

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \lambda \text{grad } F(\mathbf{x}_0)$$

$$\text{grad } \mathcal{L}(\mathbf{x}_0; \lambda) = 0; \text{ kde } \mathcal{L} := f - \lambda F \dots \text{Lagrangeova funkce}$$

Úloha 12. *Jaké situaci odpovídá $\lambda = 0$?*

Definice 6.3. Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ omezená a uzavřená, f definovaná a spojitá na U . Potom hodnoty $\max_{\mathbf{x} \in U} f(\mathbf{x})$, resp. $\min_{\mathbf{x} \in U} f(\mathbf{x})$ nazýváme globální maximum, resp. globální minimum funkce f na U .

Poznámka 6.4. Maxima a minima v Definici 6.3 jsou skutečně nabývána díky spojitosti f na kompaktní (=omezená a uzavřená) podmnožině \mathbb{R}^n .

Příklad 6.1. Koronapříklad

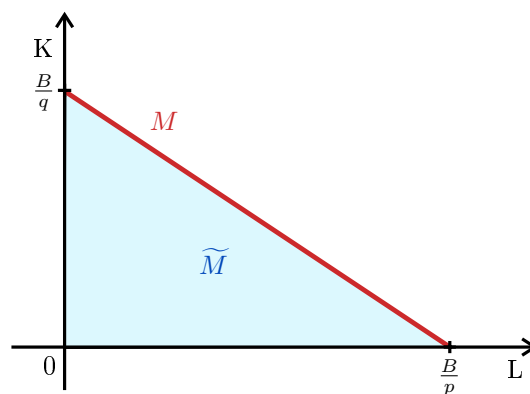
- uvažujme továrnu produkující nějaký výrobek (roušky) v množství $Q = f(K, L)$, kde f je zatím nespécifikovaná funkce,
 $K \dots$ množství kapitálových investic (šicí stroje)
 $L \dots$ množství pracovní síly (šičky)
- buď dále cena za stroj q a mzda šičky p jüanů (CNY)
- celkový rozpočet továrny je B CNY
- jak rozpočet rozdělit mezi stroje a zaměstnance, aby byl zisk úměrný produkci Q maximální?
- předpokládejme, že

$$f(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad (10)$$

kde $0 < \alpha < 1$ je volný parametr modelu

Poznámka 6.5. (10) \dots „Cobb-Douglas production function“; zkuste navrhnout jinou výstižnější funkci a poté maximalizovat Q !

Řešení: Hledáme (dokonce globální) maximum funkce $f = f(K, L)$ na množině $\widetilde{M} := \{(K, L) : K \geq 0, L \geq 0, \underbrace{qK + pL}_{\text{náklady}} \leq \underbrace{B}_{\text{rozpočet}}\}$



Obr. 11: Hledání vázaného extrému na množině \widetilde{M} . Podél úsečky M investujeme celý rozpočet \rightarrow očekáváme na ní maximální produkci.

- Lagrangeova funkce $\mathcal{L} = f(K, L) - \lambda F(K, L) = K^\alpha L^{\alpha-1} - \lambda(qK + pL)$

-

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= \alpha K^{\alpha-1} L^{\alpha-1} - \lambda q = 0 & (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} - \lambda p = 0 & (2) \end{aligned} \right\} 2 \text{ rovnice, } 3 \text{ neznámé } K, L, \lambda + \text{ vazba: } qK + pL = B \quad (3)$$

- nejprve se zbavíme parametru λ :

$$\begin{aligned} \alpha p K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - (1-\alpha) q K^\alpha L^{-\alpha} &= 0 \\ \alpha p L &= (1-\alpha) q K \\ L &= \frac{(1-\alpha) q}{\alpha p} K \end{aligned}$$

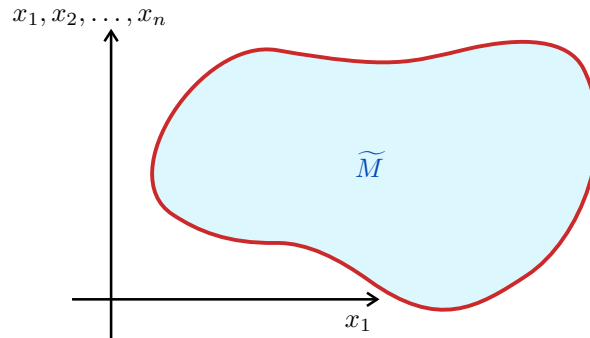
dosazením do (3) máme

$$\begin{aligned} K \left(q + \frac{(1-\alpha) q}{\alpha} \right) &= B \Rightarrow K_0 = \frac{\alpha B}{q}, L_0 = \frac{(1-\alpha) B}{p} \\ f(K_0, L_0) &= K_0^\alpha L_0^{1-\alpha} > 0 \end{aligned}$$

- současně na krajích úsečky $f\left(0, \frac{B}{p}\right) = 0$ a $f\left(\frac{B}{q}, 0\right) = 0 \Rightarrow v(K_0, L_0)$ je globální extrém vzhledem k M

Úloha 13. Vyšetřete lokální extrémy f uvnitř \widetilde{M} , tj. postupujte jako pro běžné lokální extrémy bez vazby a poté jen vyberte stacionární body uvnitř M .
(Řešení: Uvnitř M žádné lokální extrémy nejsou.)

Z příkladu je poměrně jasné, jak hledat globální extrémy na množině $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^n : \dim \widetilde{M} = n$:



Obr. 12: Hledání vázaného extrému na množině \widetilde{M} .

1. běžné lokální extrémy uvnitř \widetilde{M} (není nutno zkoumat jejich typ, stačí dokonce jen najít všechny stacionární body)
2. vázané lokální extrémy na hranici \widetilde{M} (opět stačí najít stacionární body dané Lagrangeovy funkce)
 - funkci f vyčíslíme ve všech bodech získaných v 1) a 2)
 - největší hodnota dává **globální maximum**, nejmenší **globální minimum**

6.1 Nutná podmínka pro více vazeb

Nyní si bez důkazu ukážeme, jak postupovat v případě více vazeb typu $F_i(\mathbf{x}) = 0$, $i \in \hat{l}$, kde $i \leq l < n$.

Definice 6.6. *Bud' $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ vektorová funkce o složkách (F_1, F_2, \dots, F_l) , $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Bud'te dále F_i diferencovatelné v $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Potom Jacobiho maticí funkce f v bodě \mathbf{a} rozumíme matici $l \times n$:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_l}{\partial x_1} & \frac{\partial F_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_l}{\partial x_n} \end{pmatrix}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \text{grad } F_1(\mathbf{a}) \\ \text{grad } F_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \text{grad } F_l(\mathbf{a}) \end{pmatrix} := \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \equiv \frac{D(F_1, \dots, F_l)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$$

Poznámka 6.7. *Jacobiho matice je lineární aproximace zobrazení \mathbf{F} v bodě \mathbf{a} .*

Věta 6.8. *Nechť $f, F_1, \dots, F_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mají spojité parciální derivace. Označme $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\forall i \in \hat{l})(F_i(\mathbf{x}) = 0)\}$. Nechť dále matice $\frac{D(F_1, \dots, F_l)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x})$ má hodnotu l pro každé $\mathbf{x} \in M$. Má-li f v bodě $\mathbf{a} \in M$ lokální extrém vzhledem k M , potom existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ taková, že $\text{grad } \mathcal{L}(\mathbf{a}; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) = 0$, kde $\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) := f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^l \lambda_i F_i(\mathbf{x})$.*

Poznámka 6.9. *Podmínka na maximální hodnotu Jacobiho matice zajišťuje, že vazby jsou „nezávislé“.*

Poznámka 6.10. (postačující podmínka pro vázaný lokální extrém): $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vazba $F(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = 0\}$

- $\mathcal{L} = f(\mathbf{x}) - \lambda F(\mathbf{x}) \dots$ Lagrangeova funkce

•

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L} = 0 \\ F(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \right\} \text{stacionární body; vezměme jeden, řekněme } \mathbf{a} \text{ (existuje-li)} \quad (11)$$

otázka: *Nabývá f v \mathbf{a} lokálního extrému vzhledem k M nebo se jedná o sedlový bod?*

- bez vazby: *V některých případech pomůže druhá derivace f v \mathbf{a} .*
- s vazbou: *Nabízí se spočítat druhou derivaci \mathcal{L} v $(\mathbf{a}; \lambda)$, kde λ je příslušná hodnota Lagrangeova multiplikátoru, tj. $(\mathbf{a}; \lambda)$ řeší systém (11).*

Připomeňme, že druhá derivace ve stacionárním bodě dává míru změny dané funkce na okolí daného bodu (viz Taylorův rozvoj). Nás ale zajímá jen míra změny „podél vazby“.
 \Rightarrow *Kvadratickou formou druhé derivace je nutno zúžit na přírůstky argumentů „podél vazby“, tj. na tečný prostor k M v \mathbf{a} .*

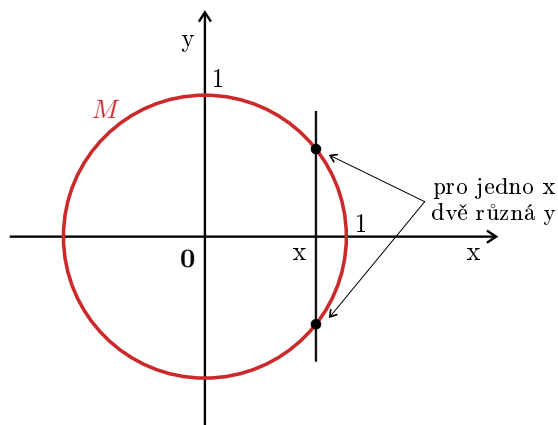
Tečný prostor k M : $F(\mathbf{x}) = 0 \dots$ rozvineme do Taylora: $F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + \langle \text{grad } F(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2)$, kde \mathbf{h} tvoří malý přírůstek argumentu, $F(\mathbf{a}) = 0, \|\langle \text{grad } F(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle\|$ minimalizujeme a $\mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2)$ zanedbáme v lineární aproximaci, tj. tečný prostor je tvořen vektory \mathbf{h} , které splňují $\langle \text{grad } F(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle = 0$.

Pozorování: *Je-li již nezúžená forma $d^2\mathcal{L}$ pozitivně či negativně definitní, můžeme si zúžení odpustit!*

7 Funkce zadaná implicitně

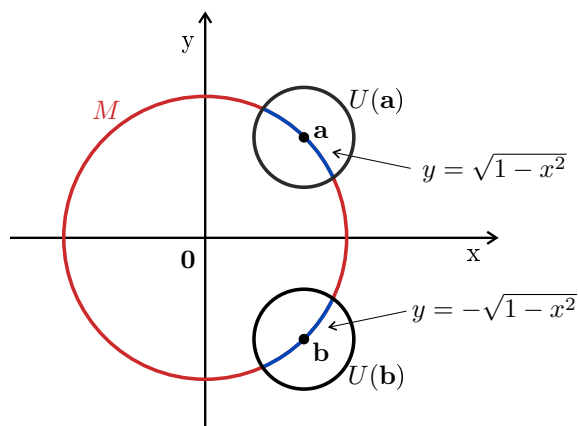
Motivace: $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$, tj. M tvoří body roviny splňující vztah $x^2 + y^2 = 1$ (kružnice se středem v počátku o poloměru 1) $\Rightarrow M$ není zjevně graf funkce $y = y(x)$:



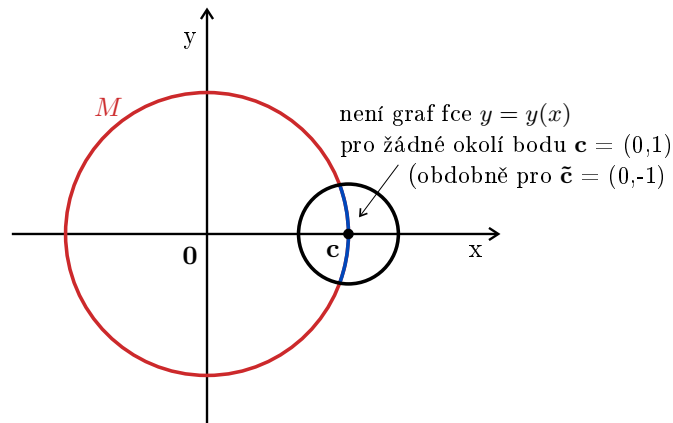
Obr. 13: Funkce zadaná implicitně

nicméně, vyjma speciálních případů, které rozebereme za okamžik, platí následující: pro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 : F(\mathbf{a}) = 0$ existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že $M \cap U(\mathbf{a})$ je již grafem funkce $y = y(x)$



Obr. 14: Funkce zadané implicitně.

jak vypadají zmíněné speciální případy:



Obr. 15: Funkce zadaná implicitně.

Úloha 14. Na okolí jakých bodů zadává rovnost $F(x, y) = 0$ graf funkce $x = x(y)$?

co se děje v bodech \mathbf{c} a $\tilde{\mathbf{c}}$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{c}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\mathbf{c}}) = 0$$

Definice 7.1. Nechť $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že $y = y(x)$ je na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ funkcí zadanou implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ (stručněji „implicitní funkcí“ pokud pro $(\forall x \in I)(F(x, y(x)) = 0)$).

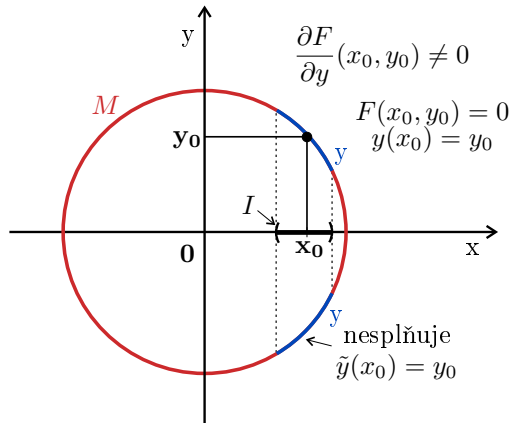
Zásadní otázka: Jaké vlastnosti musí mít F , aby na nějakém intervalu I existovala právě jedna funkce $y = y(x)$ zadaná implicitně?

Věta 7.2. (o implicitní funkci) Buď $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : F(x_0, y_0) = 0$. Nechť na jistém okolí bodu (x_0, y_0) má funkce $F(x, y)$ spojité parciální derivace, přičemž platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Potom na jistém okolí bodu x_0 existuje jediná spojitá funkce $y = y(x)$, která je implicitně zadaná rovnicí $F(x, y) = 0$ a vyhovuje podmínce $y_0 = y(x_0)$. Navíc má tato funkce na okolí bodu x_0 spojitou derivaci s hodnotou

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \dots \text{funkce proměnných } (x, y) \rightarrow \text{nutno vyjádřit } (x, y(x)) \quad (12)$$

Poznámka 7.3. Věta nedává předpis $y = y(x)$! Říká jen, že taková funkce existuje. Ostatně y nemusí být ani vyjádřitelná v termínech elementárních funkcí, třebaže F je složená funkce elementárních funkcí dvou proměnných. Např.: $F(x, y) = y + e^y + x = 0$.

Důkaz. Nejtěžší část je ukázat, že existuje nějaká $y = y(x)$ s požadovanými vlastnostmi. Tu přeskočíme.



Obr. 16: Funkce zadaná implicitně.

Dokážeme si jen vzoreček pro derivaci $y'(x)$ a jednoznačnost.

→ vzorec pro derivaci:

$\exists y = y(x) : F(x, y(x)) = 0 \wedge y(x_0) = y_0 \rightarrow$ zderivujeme obě strany $F(x, y(x)) = 0$ podle x

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 0 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \text{ kde } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \text{ dle předpokladů Věty 7.2}$$

→ jednoznačnost:

$$F(x, y(x)) = 0 \wedge F(x, \tilde{y}(x)) = 0 \tag{13}$$

\wedge

$$y(x_0) = y_0 = \tilde{y}(x_0) \tag{14}$$

Podle bodu výše máme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x, y(x)) \quad \text{a} \quad \frac{d\tilde{y}}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x, \tilde{y}(x)),$$

tj. y a \tilde{y} řeší stejnou diferenciální rovnici prvního řádu se stejnou počáteční podmínkou (14).

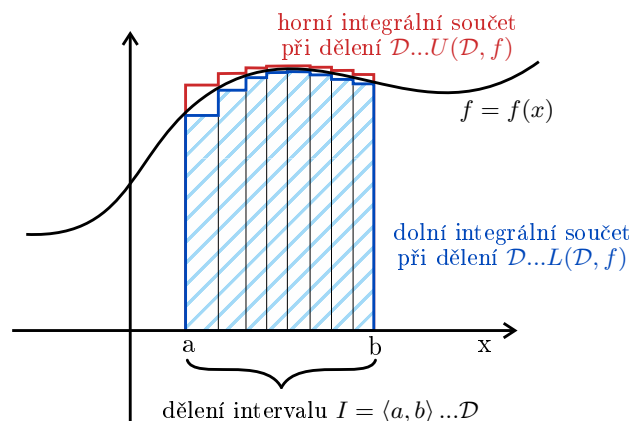
Dostáváme $y(x) = \tilde{y}(x)$ na nějakém okolí bodu x_0 . \square

Pozorování: Vztah (12) nám říká, jak spočítat $y'(x)$, aniž bychom znali $y = y(x)$! Nicméně při dosazování konkrétního bodu je stále nutno pracovat s implicitním předpisem. Uvažte například opět funkci $F(x, y) = y + e^y + x = 0$, pro kterou $y'(x) = -1/(1 + e^{y(x)})$.

Poznámka 7.4. Věta 7.2 lze zobecnit i pro $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 2$) dokonce i pro $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ ($s < n$).

8 Riemannův integrál v \mathbb{R}^n

Zavede se podobně jako v \mathbb{R}^1 :



Obr. 17: Riemannův integrál v \mathbb{R}^1 .

f je na I Riemannovsky integrabilní $\Leftrightarrow \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, f)$, kde supremum a infimum bereme přes všechna možná dělení intervalu $I \rightarrow$ pokud rovnost platí, společnou hodnotu označíme jako $\int_I f(x) dx$.

Zobecnění provedeme speciálně pro $n = 2$, promyslete si následující pojmy i pro $n > 2$. Nejprve zavedeme pojmy dvourozměrného intervalu a jeho dělení.

Definice 8.1. *Buďte $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \subset \mathbb{R}$ jednorozměrné intervaly. Potom dvourozměrným intervalem rozumíme obdélník $I := \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$.*

Definice 8.2. *Dělením jednorozměrného intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ rozumíme každou konečnou posloupnost čísel x_0, x_1, \dots, x_n takovou, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.*

Definice 8.3. *Buď $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ dvojrozměrný interval. Nechť dále x_0, x_1, \dots, x_n je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a y_0, y_1, \dots, y_m je dělení intervalu $\langle c, d \rangle$. Potom dělením intervalu I rozumíme množinu všech intervalů tvaru $S_{ij} := \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle$, kde $i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$. Tuto množinu značíme $\mathcal{D} := \{S_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$. Dále zavádíme míru intervalu $S_{ij}, \mu(S_{ij})$, jako $\mu(S_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Dolní a horní integrální součty se zavedou naprosto analogicky jako v 1D.*

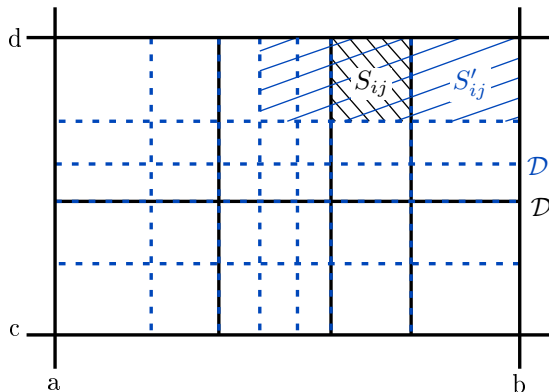
Definice 8.4. *Buď $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce definovaná alespoň na intervalu $I (= \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle)$. Nechť $\mathcal{D} = \{S_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ je dělení intervalu I . Pro $i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$ označme $v_{ij} := \inf_{x \in S_{ij}} f(x)$, $V_{ij} := \sup_{x \in S_{ij}} f(x)$. Dolním integrálním součtem $L(\mathcal{D}, f)$, resp. horním integrálním součtem $U(\mathcal{D}, f)$ funkce f při dělení \mathcal{D} rozumíme $L(\mathcal{D}, f) := \sum_{i,j=1}^{n,m} v_{ij} \mu(S_{ij})$, resp. $U(\mathcal{D}, f) := \sum_{i,j=1}^{n,m} V_{ij} \mu(S_{ij})$.*

Poznámka 8.5.

- f je omezená $\Rightarrow |v_{ij}|, |V_{ij}| < +\infty \Rightarrow |L(\mathcal{D}, f)|, |U(\mathcal{D}, f)| < +\infty$
- je-li f spojitá na $I \Rightarrow f$ je spojitá i na $S_{ij} \Rightarrow$ v definici v_{ij}, V_{ij} lze nahradit inf, resp. sup, min, resp. max, neboť spojitá funkce na kompaktní (=uzavřené a omezené) podmnožině \mathbb{R}^n nabývá svého infima i suprema.

Podíváme se, co se děje s $L(\mathcal{D}, f)$ a $U(\mathcal{D}, f)$ při změně dělení a na to, v jakém vztahu jsou L a U pro navzájem různá dělení. (Tipněte si!)

Definice 8.6. Řekneme, že dělení \mathcal{D}' je zjemněním dělení \mathcal{D} , jestliže pro každé $S'_{rs} \in \mathcal{D}'$ existuje $S_{ij} \in \mathcal{D}$ tak, že $S'_{rs} \subset S_{ij}$.



Obr. 18: \mathcal{D}' (modře) je zjemněním dělení \mathcal{D} (černě).

Lemma 8.7. Nechť f je omezená funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}^2$, \mathcal{D} dělením I a \mathcal{D}' zjemněním \mathcal{D} . Potom platí $L(\mathcal{D}, f) \leq L(\mathcal{D}', f) \leq U(\mathcal{D}', f) \leq U(\mathcal{D}, f)$.

Důkaz. 2. nerovnost je zřejmá (porovnejte definice L a U), 1. a 3. nerovnost se dokazují podobně, zkusíme tedy 1., 3. ponecháme čtenáři:

$$\rightarrow \mathcal{D} = \{S_{ij}\}, \mathcal{D}' = \{S'_{rs}\}$$

\rightarrow pro ($S'_{rs} \in \mathcal{D}$) ($\exists S_{ij} \in \mathcal{D}$) ($S'_{rs} \subset S_{ij}$) $\Rightarrow v'_{rs} := \inf_{x \in S'_{rs}} f(x) \geq v_{ij} = \inf_{x \in S_{ij}} f(x)$ neboť na pravé straně hledáme infimum přes nadmnožinu

$$\rightarrow \text{dále každé } S_{ij} \in \mathcal{D} \text{ lze zapsat jako } S_{ij} = \bigcup_{S'_{rs} \subset S_{ij}} S'_{rs} \Rightarrow \mu(S_{ij}) = \sum_{S'_{rs} \subset S_{ij}} \mu(S'_{rs})$$

\rightarrow z těchto pozorování nakonec dostaneme:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{D}', f) &= \sum_{S'_{rs} \in \mathcal{D}'} v'_{rs} \mu(S'_{rs}) = \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} \sum_{S'_{rs} \subset S_{ij}} v'_{rs} \mu(S'_{rs}) \geq \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} v_{ij} \sum_{S'_{rs} \subset S_{ij}} \mu(S'_{rs}) = \\ &= \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} v_{ij} \mu(S_{ij}) = L(\mathcal{D}, f) \end{aligned}$$

□

Věta 8.8. Buďte f omezená funkce na intervalu $I \in \mathbb{R}^2$, \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 libovolná dělení I . Potom $L(\mathcal{D}_1, f) \leq U(\mathcal{D}_2, f)$.

Důkaz. $\rightarrow \mathcal{D}'$ zavedeme jako společné zjemnění \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 (Rozmyslete, jak by se takové \mathcal{D}' explicitně našlo!)

\rightarrow podle Lemmatu 8.7, kde za \mathcal{D} bereme postupně \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 dostáváme:

$$L(\mathcal{D}_1, f) \leq L(\mathcal{D}', f) \leq U(\mathcal{D}', f) \leq U(\mathcal{D}_2, f)$$

□

Závěr: Zjemňováním dělení nezměníme L a nevětšíme U , současně $L \leq U$, i když k výpočtu integrálních součtů použijeme navzájem různá dělení.

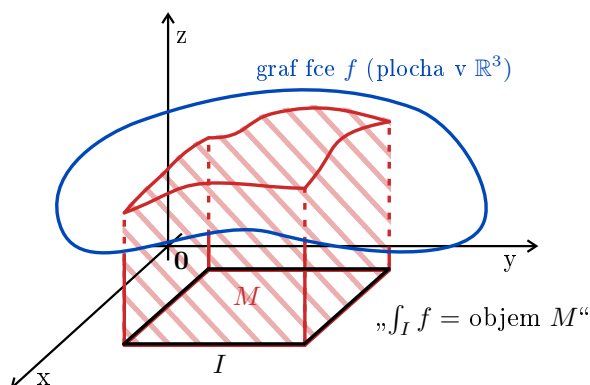
Definice Riemannova integrálu je zcela analogická 1D případu.

Definice 8.9. Buď f omezená funkce na $I \subset \mathbb{R}^2$. Potom definujeme Riemannův dolní $L(f)$, resp. horní $U(f)$ integrál jako $L(f) := \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f)$, resp. $U(f) := \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, f)$, kde \sup a \inf uvažujeme přes všechna dělení intervalu I . Pokud $L(f) = U(f)$, řekneme, že f má na I Riemannův integrál. Společnou hodnotu $L(f)$ a $U(f)$ značíme jako $\int_I f \equiv \int_I f(x, y) dx dy$ ($= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$).

Poznámka 8.10.

- definice $\int_I f$ dává dobrý smysl, ale k analytickým výpočtům je prakticky nepoužitelná
- pro numerické výpočty lze postupně počítat $L(\mathcal{D}, f), U(\mathcal{D}, f)$ pro zjemňující se dělení \rightarrow hodnota integrálu potom leží někde mezi těmito dvěma čísly
- numericky je pracné hledat v_{ij} a V_{ij} pro každý obdélníček S_{ij} a je to dokonce zbytečné, ukazuje se, že pro dobrou aproximaci stačí libovolnou hodnotu funkce f na S_{ij} (např. ve středu obdélníčku S_{ij} či v jednom z jeho vrcholů), případně průměrnou hodnotu ve vrcholech $S_{ij} \rightarrow$ viz animace ve Wolfram Mathematica

Poznámka 8.11. (Geometrický význam Riemannova integrálu) Buď $f \geq 0$ na I a $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in I \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Potom $\int_I f$ dává **objem** tělesa M .



Obr. 19: Geometrický význam Riemannova integrálu.

\rightarrow zobecnění:

$$\left. \begin{array}{l} f, g \text{ funkce na } I : (\forall \mathbf{x} \in I)(f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})) \\ M' := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in I \wedge g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\} \end{array} \right\} \text{potom objem } M' = \int_I (f - g)$$

Pro jaké funkce integrál existuje?

Věta 8.12. Buď f spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}^2$. Potom Riemannův integrál $\int_I f$ existuje. Navíc lze spočítat následovně: $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{D}_n, f) (= \lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{D}_n, f))$, kde $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost dělení splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} (\max_{S_{ij} \in \mathcal{D}_n} \text{diam}(S_{ij})) = 0$. (Zde diam značí průměr = **diametr** množiny S_{ij} , tj. velikost úhlopříčky obdélníka S_{ij} .)

Jak vypočítat **plochu** obecnější množiny v \mathbb{R}^3 než je interval?

Definice 8.13. $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom charakteristickou funkcí množiny M rozumíme χ_M definovanou na celém \mathbb{R}^n následovně:

$$\chi_M(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \dots \mathbf{x} \in M \\ 0 & \dots \mathbf{x} \notin M. \end{cases}$$

Definice 8.14. Bud' $I \subset \mathbb{R}^2$ interval a $M \subset I$. Řekneme, že M má Jordanův-Peanův objem $\mu(M) \Leftrightarrow$ existuje-li $\int_I \chi_M$. V kladném případě klademe $\mu(M) := \int_I \chi_M$.

Poznámka 8.15. Toto je matematická definice plochy! (Souhrně se všemu říká objem bez ohledu na dimenzi)

Jak integrovat funkce přes obecnější množiny než intervaly? Klade se $\int_M f := \int_I \chi_M \cdot f$, kde I je nějaký interval obsahující M .

Poznámka 8.16. $\chi_M \cdot f$ není typicky spojitá, nemáme tak na základě věty 8.12 obecně zaručenou existenci Riemannova integrálu!

8.1 Vlastnosti vícerozměrného Riemannova integrálu

Věta 8.17. (Linearita): Bud' $c \in \mathbb{R}$. Existují-li integrály $\int_M f$ a $\int_M g$, potom existují i integrály $\int_M (f + g)$ a $\int_M (cf)$ a platí $\int_M (f + g) = \int_M f + \int_M g$, $\int_M (cf) = c \int_M f$.

Důkaz.

- vychází z odhadů pro odpovídající horní a dolní integrální součty
- přímočarý je pro homogenitu integrálu (tu si zde dokážeme):

1. $c \geq 0$:

$$\rightarrow L(\mathcal{D}, cf) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \inf_{x \in S_{ij}} (cf(x)) \mu(S_{ij}) = c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \inf_{x \in S_{ij}} f(x) \mu(S_{ij}) = cL(\mathcal{D}, f)$$

$$\rightarrow \text{podobně } U(\mathcal{D}, cf) = cU(\mathcal{D}, f)$$

$$\rightarrow \int_M f \text{ existuje}$$

$$\Rightarrow \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, f) = \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f) \left(= \int_M f \right)$$

$$\Rightarrow (c \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, f) =) \inf_{\mathcal{D}} cU(\mathcal{D}, f) = \sup_{\mathcal{D}} cL(\mathcal{D}, f) (= c \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f))$$

$$\Rightarrow \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, cf) = \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, cf)$$

$$\Rightarrow \int_M (cf) \text{ existuje a } \int_M (cf) = \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, cf) = c \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f) = c \int_M f$$

2. $c < 0$: zkuste sami!

□

Věta 8.18. (Monotonie): $\forall (x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq g(x, y)$, potom $\int_M f \leq \int_M g$.

Důkaz se opět provede pomocí odhadů v horních a dolních integrálních součtech.

Věta 8.19. (Odhad absolutní hodnotou): $|\int_M f| \leq \int_M |f|$.

Věta 8.20. (Aditivita): $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^2 : M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Existují-li integrály $\int_{M_1} f$ a $\int_{M_2} f$, potom existuje i integrál $\int_{M_1 \cup M_2} f$ a platí $\int_{M_1 \cup M_2} f = \int_{M_1} f + \int_{M_2} f$.

8.2 Výpočet Riemannova vícerozměrného integrálu

8.2.1 Fubiniho věta

Motivace

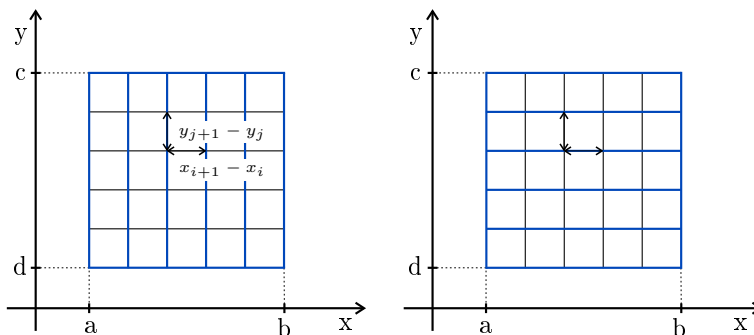
$I \dots$ dvourozměrný interval $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$

$\mathcal{D} \dots$ jeho dělení $\mathcal{D} = \{S_{ij} \equiv \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle\}_{i,j=1}^{n,m}$

$v_{ij} = \inf_{\mathbf{x} \in S_{ij}} f(\mathbf{x})$

$\rightarrow L(\mathcal{D}, f) = \sum_{i,j} v_{ij} \mu(S_{ji})$

$$\sum_i \left(\sum_j v_{ij} (y_{j+1} - y_j) \right) (x_{i+1} - x_i) = \sum_j \left(\sum_i v_{ij} (x_{i+1} - x_i) \right) (y_{j+1} - y_j) \quad (15)$$



Obr. 20: Fubiniho věta (motivace). Na levé straně (15) provádíme nejprve součty v rámci jednotlivých sloupců a potom sumujeme přes sloupce, na pravé straně je princip stejný, akorát zaměníme sloupce za řádky.

Věta 8.21. (Fubini): *Bud' $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ interval a $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na I . Pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$, resp. $\forall y \in \langle c, d \rangle$ položíme $f_1(x) := \int_c^d f(x, y) dy$, $f_2(y) := \int_a^b f(x, y) dx$. Potom f_1 je spojitá na $\langle a, b \rangle$, f_2 je spojitá na $\langle c, d \rangle$ a platí $\int_I f \equiv \iint_I f(x, y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx = \int_c^d f_2(y) dy$, tj.*

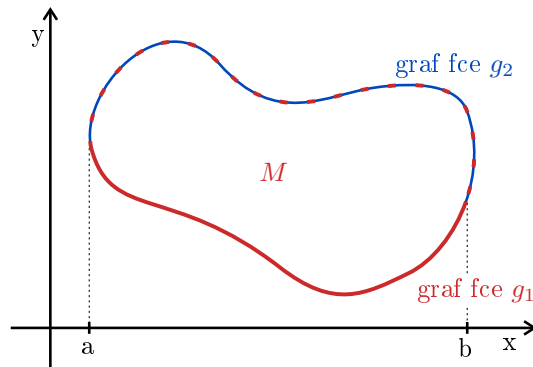
$$\int_I f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Bez důkazu.

Jak ale počítat integrály přes obecnější množiny, než intervaly? Uvažujme konkrétně množiny tvaru

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}, \quad (16)$$

kde g_1, g_2 jsou funkce spojitě na $\langle a, b \rangle$ (tedy jedné proměnné) takové, že $\forall x \in \langle a, b \rangle : g_1(x) \leq g_2(x)$.



Obr. 21: Plocha popsaná vztahem (16)

Potom máme:

Věta 8.22. (Obecnější Fubini): *Bud' f spojitá funkce spojitá na M , kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je popsána výše. Potom f je na M Riemannovsky integrovatelná a platí*

$$\int_M f \equiv \iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

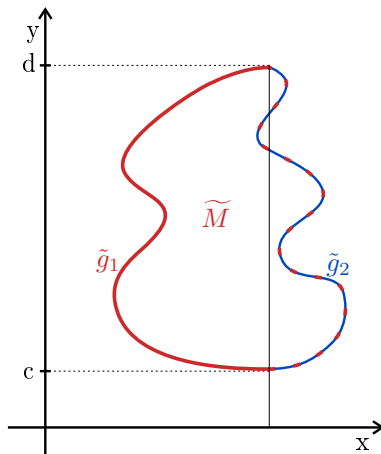
Poznámka 8.23. *Plocha na Obr. 22 nelze popsát jako (16), ale lze nalézt dvojici funkcí \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 na intervalu $\langle c, d \rangle$ tak, že*

$$\tilde{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle c, d \rangle \wedge \tilde{g}_1(y) \leq x \leq \tilde{g}_2(y)\}. \quad (17)$$

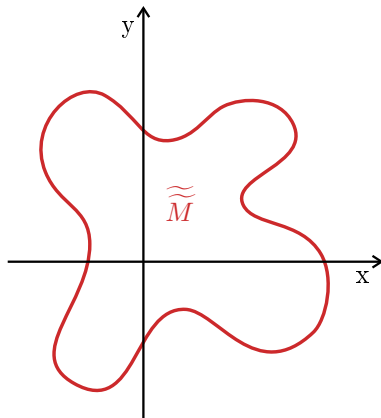
Samozřejmě existují plochy, které nelze popsát jako (16) ani jako (17), např. plocha na Obr. 23. Zkuste ale $\tilde{\tilde{M}}$ rozdělit na podmnožiny tvaru (16) a/nebo (17)!

Integrál $\int_{\tilde{M}} f$ se spočte jako $\int_{\tilde{M}} f = \int_c^d \left(\int_{\tilde{g}_1(y)}^{\tilde{g}_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$.

Integrál $\int_{\tilde{\tilde{M}}} f$ se spočte pomocí vlastnosti aditivity, $\int_{\tilde{\tilde{M}}} f = \sum_i \int_{M_i} f$, kde M_i jsou již tvaru (16) či (17), jsou vzájemně disjunktní (až na případnou hranici) a $\tilde{\tilde{M}} = \bigcup_i M_i$.



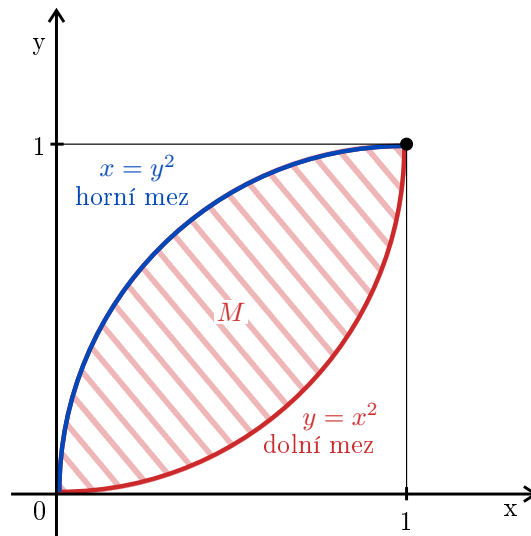
Obr. 22: Plocha popsaná vztahem (17)



Obr. 23: Plocha, kterou nelze jednoduše popsát vztahem (16) nebo (17)

Příklad 8.1. *Bud' $f(x, y) = xy^2$, $M \dots$ oblast vymezená křivkami $y = x^2$, $x = y^2$. Spočítejte $\int_M f(x, y) dx dy$.*

- *načrtnutí M*



Obr. 24: Fubiniho věta - příklad

souřadnice průsečíků ohraničujících křivek:

$$\begin{aligned}
 y = x^2 \wedge x = y^2 \\
 y = y^4 \\
 y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 1 \Rightarrow x = 1
 \end{aligned}$$

- $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\} \dots$ oblast typu (*)
 \rightarrow Fubini:

$$\begin{aligned}
 \int_M f &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 \, dy \right) dx = \\
 &= \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x \frac{1}{3} (x^{\frac{3}{2}} - x^6) = \frac{3}{56}
 \end{aligned}$$

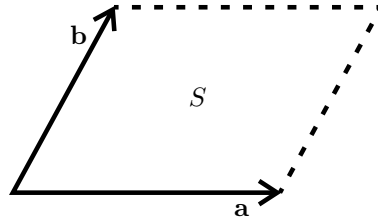
- M lze ale současně zapsat jako oblast typu (17): $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle 0, 1 \rangle \wedge y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\} \rightarrow$ opět Fubini (musí vyjít stejný výsledek!)

8.2.2 Věta o substituci

Motivace:

1. jednodimenzionální verze: $\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f \circ \phi(t) \phi'(t) \, dt$, kde $\phi : \phi'(t) > 0$ nebo $\phi'(t) < 0$ ($\Rightarrow \phi$ je ostře monotónní \Rightarrow je to bijekce)
 \Rightarrow starou proměnnou x jsme zapsali pomocí nové t jako $x = \phi(t)$, „element délky“ se potom transformoval jako $dx \rightarrow \phi'(t) \, dt$
2. trocha alchymie s měřením objemů (speciálně opět ve 2D):
 - mějme $\mathbf{a} = (a_x, a_y), \mathbf{b} = (b_x, b_y) \in \mathbb{R}^2$

- jak spočítat „orientovanou“ (tj. bude záviset na pořadí hran) plochu S rovnoběžníku s hranami \mathbf{a}, \mathbf{b} ?



Obr. 25: Rovnoběžník s hranami \mathbf{a}, \mathbf{b}

$S = a_x b_y - b_x a_y = \det \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} =: dx \wedge dy(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, zde $dx \wedge dy$ je z definice bilineární antisymetrická forma (tj. $dx \wedge dy(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -dx \wedge dy(\mathbf{b}, \mathbf{a})$)

- obecná souřadnice (u, v) na $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ opět zkonstruujeme formu $du \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \det \begin{pmatrix} [\mathbf{a}]_{uv} & [\mathbf{b}]_{uv} \end{pmatrix}$

\rightarrow rozmyslete si: $\forall(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

- $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\alpha du) \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(du \wedge dv)(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- $(du + d\tilde{u}) \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = du \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d\tilde{u} \wedge dv(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- $du \wedge du(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$

- jelikož $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ a $dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$ (formální aplikace řetězového pravidla pro derivaci funkcí $x = x(u, v), y = y(u, v)$), dostáváme s pomocí (a)-(c)
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{= \text{substituce}}$

následující

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} \underbrace{du \wedge du}_{=0} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du \wedge dv + \\ &+ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \underbrace{dv \wedge du}_{=-du \wedge dv} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \underbrace{dv \wedge dv}_{=0} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv = \\ &= \det \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}_{\text{Jacobiho matice}} du \wedge dv \end{aligned}$$

- „element plochy“ v kartézských souřadnicích tak zapíšeme jako násobek „elementu plochy“ v nových souřadnicích

Notace: $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorová funkce o složkách (F_1, F_2, \dots, F_n) , $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelné, potom

$$\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}} = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \vdots \\ \nabla F_n \end{pmatrix} \dots \text{Jacobiho matice}$$

$\det \frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}} \dots \text{jakobián}$

Definice 8.24. Zobrazení $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme regulárním na $M \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

1. M je otevřená množina
2. \mathbf{F} má spojitou Jacobiho matici na M (tj. všechny prvky matice jsou spojité)
3. $(\forall \mathbf{x} \in M)(\det \frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \neq 0)$.

Poznámka 8.25. Co intuitivně znamená regularita zobrazení \mathbf{F} ?

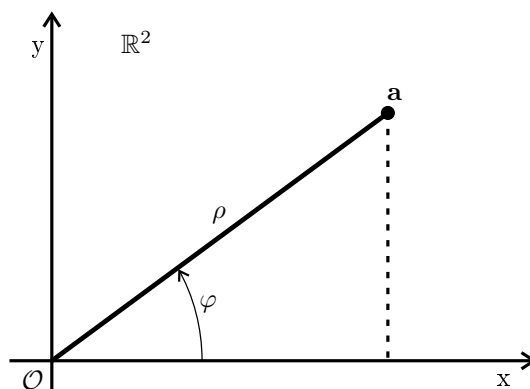
- $\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{a})$ je lineární aproximace v Taylorově rozvoji \mathbf{F} v bodě \mathbf{a}
- podmínka $\det \frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \neq 0$ říká, že tato aproximace je regulární (invertovatelné lineární zobrazení)
- lze ukázat, že to má za následek **lokální** invertovatelnost zobrazení \mathbf{F}

Věta 8.26. (O substituci:) Buď $\vec{\phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$, prosté regulární zobrazení otevřené množiny $P \subset \mathbb{R}^n$ na množinu $Q \subset \mathbb{R}^n$. Potom pro libovolnou množinu $M \in Q$ a funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (takové, že integrál níže existuje), platí

$$\int_M f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\vec{\phi}^{-1}(M)} f \circ \vec{\phi}(\vec{\xi}) \left| \det \frac{D\vec{\phi}}{D\vec{\xi}} \right| d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

9 Významné substituce

9.1 Polární souřadnice



Obr. 26: Polární souřadnice.

Pro přechod mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi, \end{aligned}$$

kde $\rho \geq 0, \varphi \in (0, 2\pi)$.

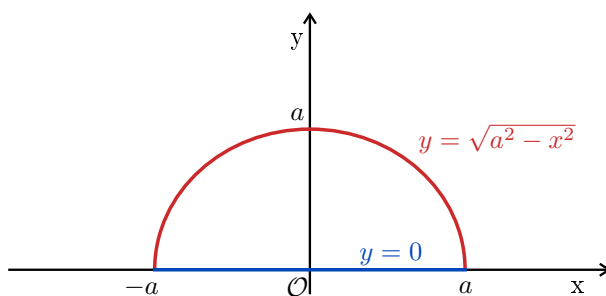
Poznámka 9.1. Počátku \mathcal{O} odpovídá $\rho = 0$ a libovolný úhel φ ! (Substituce v \mathcal{O} není regulární).

$$\det \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} = \rho \neq 0 \text{ pro } \rho \neq 0 \Rightarrow \left| \det \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} \right| = \rho$$

$\Rightarrow \rho d\rho d\varphi$ „plošný element“ v polárních souřadnicích

Příklad 9.1. Buď $a > 0$ a V omezená oblast ohraničená křivkami $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ a $y = 0$. Vypočtěte $\int_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

- načrtneme V



Obr. 27: Polární souřadnice - příklad.

- zapíšeme integrál v kartézských souřadnicích:

$$\int_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_{-a}^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \right) dx \dots \text{poměrně složitá integrace}$$

\rightarrow zkuste si to!

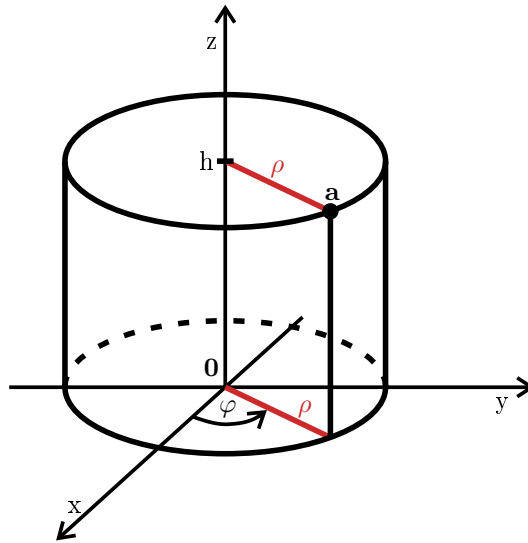
- zapíšeme integrál v polárních souřadnicích pomocí věty o substituci 8.26:

$$\int_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^\pi \int_0^a \underbrace{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}}_\rho \rho d\rho d\varphi = \int_0^\pi \int_0^a \rho^2 d\rho d\varphi =$$

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho = \pi \frac{a^3}{3}$$

\rightarrow polární souřadnice využijeme v případě, že integrand nebo/a integrační obor mají rotační symetrii

9.2 Cylindrické souřadnice



Obr. 28: Cylindrické souřadnice.

Pro přechod mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi platí

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = h,$$

kde $\rho \geq 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $h \in \mathbb{R}$.

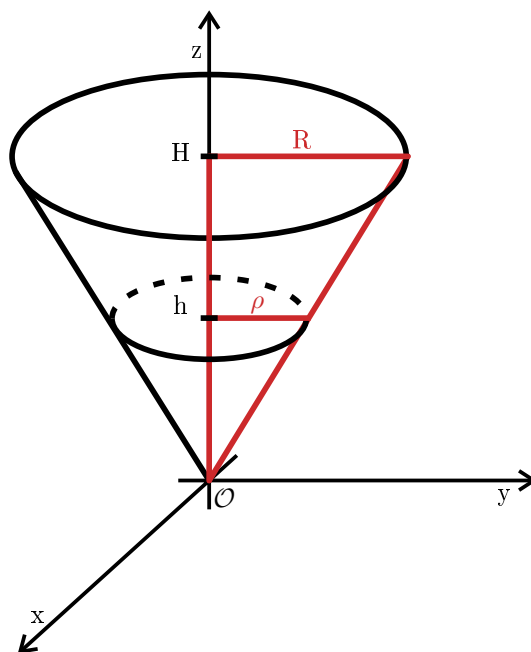
Poznámka 9.2. *Jedná se v podstatě o polární souřadnice v každém řezu $z = \text{konst.}$*

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi, h)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left| \det \frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi, h)} \right| = \rho$$

$\Rightarrow \rho d\rho d\varphi dh \dots$ „plošný element“ v cylindrických souřadnicích

Příklad 9.2. *Spočtěte objem jehlanu výšky $H > 0$ s poloměrem základny $R > 0$.*

- *pro výpočet objemu si můžeme jehlan orientovat libovolně, nabízí se jeho osu identifikovat s nějakou ze souřadných os:*



Obr. 29: Cylindrické souřadnice - příklad.

z podobnosti trojúhelníků máme: $\frac{R}{H} = \frac{\rho}{h}$ a tedy $h = \frac{H}{R}\rho$

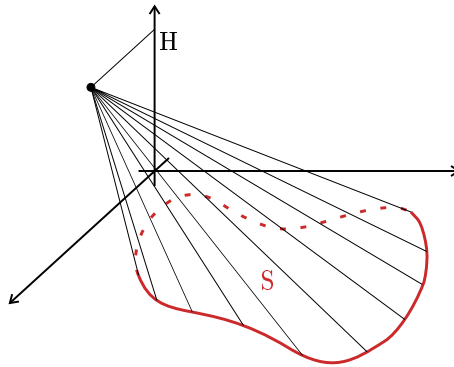
- objem se spočte jako integrál z funkce $f \equiv 1$ přes oblast, jejíž objem hledáme
- tento integrál zapíšeme v cylindrických souřadnicích jako

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(\int_{\frac{H}{R}\rho}^H \rho \, dh \right) d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \left(H - \frac{H}{R}\rho \right) d\rho = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

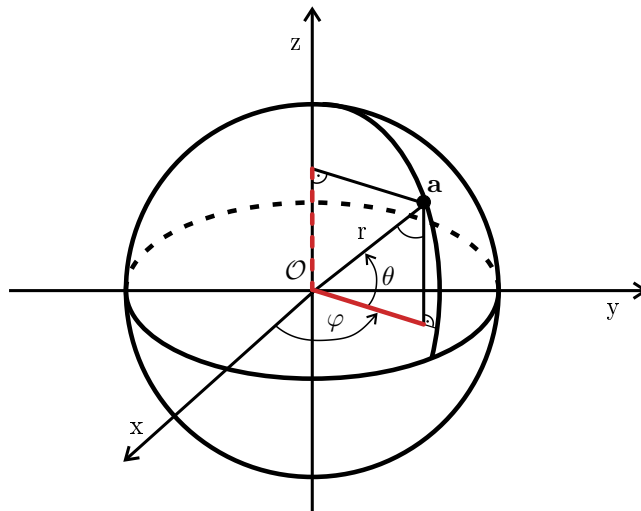
- pro objem tedy máme $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
- toto dokonce platí pro obecné jehlany! ($V = \frac{1}{3}SH$, kde S je plocha základny, viz Obr. 30)

Úloha 15. Zapiště integrál pro objem z Příkladu 9.2 i v kartézských souřadnicích!

9.3 Sférické souřadnice



Obr. 30: Cylindrické souřadnice - objem.



Obr. 31: Sférické souřadnice.

Pro přechod mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi platí

$$x = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$z = r \sin \theta,$$

kde $r \geq 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Poznámka 9.3. Počátku O odpovídá $r = 0$ a θ s φ libovolná, na „pólech“ je $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ a φ libovolné!

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \det \frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(r, \theta, \varphi)} \right| = | -r^2 \cos \theta | = r^2 |\cos \theta|$$

$\Rightarrow r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi \dots$ „plošný element“ ve sférických souřadnicích

$$r^2 \cos \theta = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

Příklad 9.3. Vypočtěte objem V koule o poloměru R .

- budeme integrovat jedničku přes oblast tvaru koule poloměru R
- ve sférických souřadnicích tak dostaneme:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_0^R r^2 \, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Úloha 16. Zapište integrál pro objem z Příkladu 9.3 i v kartézských souřadnicích!

10 Ukázky aplikací integrálu

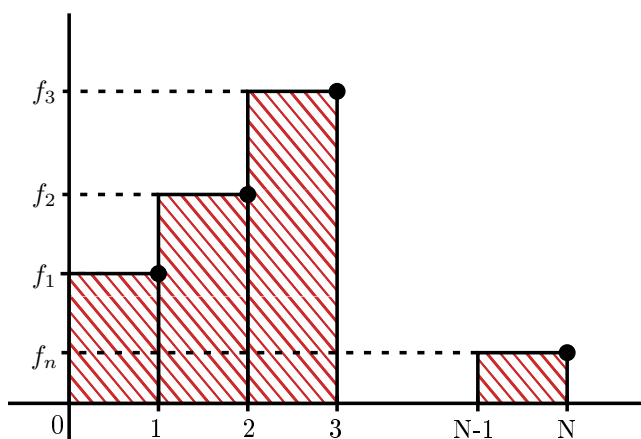
10.1 Výpočet ploch a objemů

Viz kapitola 9

10.2 Výpočet „průměru“ hodnot funkce na množině, tj. střední hodnoty funkce

Motivace (diskrétní případ): $f_1, f_2, \dots, f_N \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$

→ aritmetický průměr $\bar{f} := \frac{\sum_{i=1}^N f_i}{N}$



Obr. 32: Výpočet „průměru“ hodnot funkce.

→ pro funkci $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ se tedy střední hodnota nabízí definovat jako:

$$\bar{f} := \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\mu(\langle a, b \rangle)} = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\int_a^b 1 \, dx}$$

→ pro funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $S \subset \mathbb{R}^n$ tak analogicky klademe

$$\bar{f} := \frac{\int_S f(\mathbf{x}) \, dx_1 \, dx_2 \dots \, dx_n}{\mu(S)} = \frac{\int_S f(\mathbf{x}) \, dx_1 \, dx_2 \dots \, dx_n}{\int_S 1 \, dx_1 \, dx_2 \dots \, dx_n}$$

10.3 Výpočet složek těžiště

Motivace (soustava „hmotných bodů“): hmotné body o hmotnostech m_i se nachází v \mathbf{x}_i
 → potom těžiště soustavy nalezneme jako

$$\mathbf{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

→ uvažujme nyní těleso tvaru $V \subset \mathbb{R}^3$ (případně nekonečně tenkou desku $S \subset \mathbb{R}^2$) s obecně nekonzstantní hustotou $\rho = \rho(\mathbf{x})$

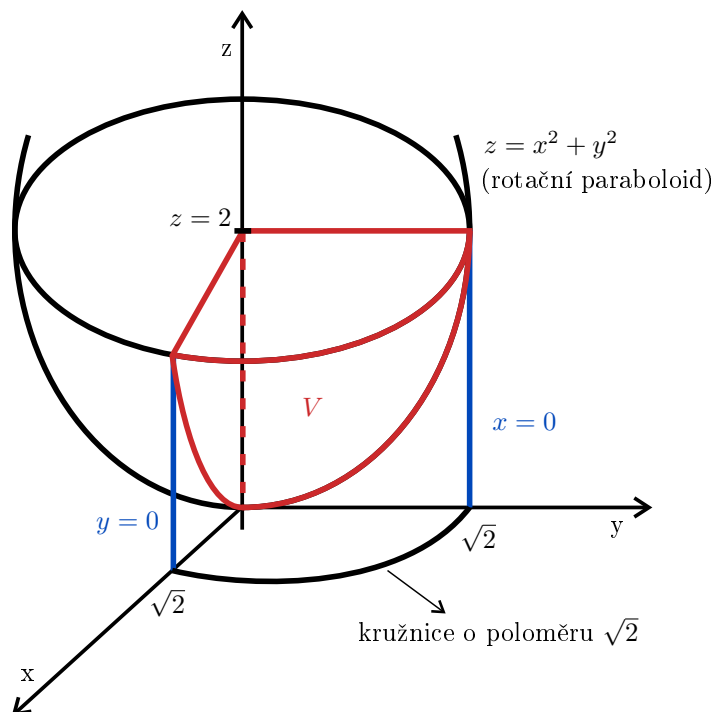
→ potom objem $d\mathbf{x}$ (= $dx dy dz$ v \mathbb{R}^3 , resp. $dx dy$ v \mathbb{R}^2) má hmotnost $\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

→ složky těžiště \mathbf{x}_T tedy nalezneme jako

$$\mathbf{x}_T = \frac{\int_{V(S)} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{V(S)} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (\text{vektorová rovnost})$$

Příklad 10.1. Nalezněte x -ovou složku těžiště homogenního tělesa, které je omezeno rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ a plochou $z = x^2 + y^2$.

- homogenní těleso → konstantní hustota → pro účely těžiště lze hustotu zvolit jako $\rho \equiv 1$ (rozmyslete si proč!)
- oblast si načrtneme, abychom snáze odvodili integrační meze:



Obr. 33: Příklad - hledání těžiště.

$$\mathbf{x}_T = \frac{\int_V x \, dx \, dy \, dz}{\int_V dx \, dy \, dz}$$

$$\int_V dx \, dy \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 dx \, dy \, dz = \dots \text{zkusit za DC}$$

→ přejdeme do cylindrických souřadnic: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = h$

$$\left. \begin{aligned} \int_V dx \, dy \, dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{h}} \rho \, d\rho \, dh \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \frac{h}{2} \, dh = \frac{\pi}{2} \\ \int_V x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{h}} \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, dh \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^2 \frac{h^{\frac{3}{2}}}{3} \, dh = \frac{8\sqrt{2}}{15} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{x}_T = \frac{16\sqrt{2}}{15\pi}$$

Úloha 17. *Dopočítejte i ostatní složky těžiště v Příkladu 10.1!*