Petra Kocábová

Kvantové systémy dvou a více anyonů

REŠERŠNÍ PRÁCE 2004/2005

Katedra matematiky Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT Praha

Obsah

Úvod

Anyony jsou nerozlišitelné částice s konfiguračním prostorem jedné částice R^2. V kvantovém popise identických částic má jejich nerozlišitelnost nemalé fyzikální důsledky. Jejich popis bývá často řešen požadováním symetrizačního postulátu na vlnové funkce i pozorovatelné, který sice dává správný model, ale jeho fyzikální interpretace je nejasná. V této práci ukazuji způsob, jak zvolit konfigurační varietu více anyonů a odstranit tím symetrizační postulát. V případě anyonů se navíc topologické odlišnosti jejich klasického konfiguračního prostoru odraží i ve statistice. Narozdíl od částic v R^3 se nemusí jednat pouze o bosony nebo fermiony, ale anyony můžou nabývat i zlomkových statistik. Jeden ze systémů, kde lze pozorovat anyony i se zlomkovou statiskou, je tzv. "fractional quantum Hall effect".

V první kapitole této práce se seznámíme se základními pojmy z diferenciální geometrie, jako je fundamentální grupa, univerzální nakrývající prostor, fibrovaný prostor, konexe a paralelní přenos. V odstavci 1.5 ukážeme dva možné modely jak vybudovat kvantovou mechaniku na (i nejednoduše souvislé) varietě.

V druhé kapitole se blíže zaměříme na konfigurační prostor více anyonů, předchozí dva modely ilustrujeme na příkladě dvou anyonů a na závěr ukážeme ještě jeden model, který lze použít i pro popis více anyonů a lze při něm použít Schulmanův ansatz, který udává vztah mezi propagátory působících na dvou různých Hilbertových prostorech.

Třetí kapitola je věnována vysvětlení Schulmanova ansatzu a jeho alespoň formální obhajobě. Je zde také uveden jeden z příkladů, kde lze Schulmanův ansatz s úspěchem použít.

V závěrečné kapitole se seznámíme s jevem Ahoronov-Bohma s jedním solenoidem, který byl poprvé publikován v roce 1959 a pomohl pochopit geometrické vlastnosti polí a roli potenciálů v kvantové mechanice.

Kapitola 1

Základní definice a pojmy

1.1 Varieta a tečný prostor

Definice 1 *: Nechť M je množina, $U, V, \ldots$ jsou množiny takové, že $M = U \cup V \cup \ldots$, zobrazení ϕ_U nechť je bijekce U do otevřné podmnožiny R^n. Nechť dále platí, že $\phi_U(U \cap V)$ je otevřená podmnožina R^n a $f_{VU} = \phi_V \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap V) \to R^n$ je diferencovatelná. Potom neprázdnou množinu M nazýváme diferencovatelná varieta, n je dimenze variety M. Varietu o dimenzi n budeme značit M^n. Dvojici (U, ϕ_U) budeme nazývat mapa.*

Každému bodu $p \in U \subset M$, lze pomocí zobrazení ϕ_U přiřadit lokální souřadnice.

Definice 2 *: Nechť M je diferencovatenlá varieta. Řekneme, že M je třídy C^k, pokud f_{VU} z definice 1 je třídy C^k.*

Nechť $F : M^n \to R$ je reálná funkce na varietě M. Řekneme, že F je diferencovatelná, pokud $\forall (U, \phi_U), \quad F \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U) \to R$ je diferencovatelná.

Definice 3 *Tečný vektor $\boldsymbol{X}$, nebo kontravariantní vektor, nebo pouze vektor v bodě $p_0 \in M^n$ je zobrazení, které připisuje každé mapě (U, ϕ_U) obsahující p_0 n-tici reálných čísel*

$$(X_U^i) = (X_U^1, \ldots, X_U^2)$$

takové, že pokud $p_0 \in U \cap V$, pak

$$X_V^i = \sum_j \left[\frac{\partial x_V^i}{\partial x_U^j}(p_0) \right] X_U^j.$$

Mějme realnou funkci f definovanou na M^n. Na jistém okolí bodu p, můžeme k vyjádření použít lokálních souřadnic, tj. $f = f(x^1, \ldots, x^n)$ [1]. Pokud $\mathbf{X}$ je tečný vektor v p, definujeme derivaci funkce f podle vektoru $\mathbf{X}$ vztahem

$$\mathbf{X}_p(f) := D_{\mathbf{X}}(f) := \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(p)X^j.$$

Tato definice nezávisí na volbě lokálních souřadnic. Poznamenejme, že mezi tečnými vektory $\mathbf{X}$ k M^n a diferenciálními operátory prvního řádu[2] existuje 1-1 korespondence ve tvaru

$$\mathbf{X}_p = \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$$

v lokálních souřadnicích (x). Nebudeme tedy dělat rozdíl mezi tečným vektorem a příslušným diferenciálním operátorem.

Definice 4 *Tečný prostor k varietě M^n v bodě $p \in M^n$, označme ho M^n_p je reálný vektorový prostor všech tečných vektorů k M v bodě p. Pokud (x) je lokální systém souřadnic, pak následujících n vektorů*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$$

je bází tohoto n-dimenzionálního vektorového prostoru.

Definice 5 *Nechť M je varieta. Tečný bundle, značíme TM, je sjednocení tečných prostorů přes všechny body variety M, tj. $TM = \bigcup_{p\in M} M_p$ a TM je varieta.*

Definice 6 *Vektorové (hladké) pole na otevřené množině $U \subset M$ je zobrazení, které každému bodu z U přiřadí nějaký tečný vektor v tomto bodě. V lokálních souřadnicích*

$$\boldsymbol{X} = \sum_j X^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

kde X^j jsou (hladké) funkce na M.

[1] Pracujeme vlastně s funkcí $f \circ \phi_U^{-1}$.

[2] Diferenciální oprerátor prvního řádu je lineární zobrazení $f \to \delta(f)$, pro které platí Leibnizovo pravidlo, tj. $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$.

1.2 Fundamentální grupa, univerzální nakrývací prostor

Definice 7 *Nechť γ je uzavřená křivka (smyčka) na souvislé množině M,tj. $\gamma : [0,1] \to M$, γ spojitá a $\gamma(0) = p_0 = \gamma(1)$. Řekneme, že dvě křivky γ_1, γ_2 splňující předešlé předpoklady jsou homotopicky ekvivalentní, $\gamma_1 \sim \gamma_2$, pokud existuje*

$$F : [0,1] \times [0,1] \to M,$$
$$F(0,t) = p_0 = F(1,t), \quad \forall t \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$F(\theta, 0) = \gamma_1(\theta), \quad F(\theta, 1) = \gamma_2(\theta)$$

Řekneme, že γ je triviální, pokud je homotopicky ekvivalentní konstantě, $\gamma \sim p_0$.

Poznamenejme, že se jedná opravdu o relaci ekvivalence. Skládání křivek definujeme následovně:

$$\gamma_1\gamma_2(\theta) := \gamma_1(2\theta), \text{ pro } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

$$:= \gamma_2(\theta), \text{ pro } \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \tag{1.2}$$

Množina tříd homotopicky ekvivalentních smyček na M s operací skládání tvoří grupu, kterou nazýváme fundamentální grupa M, značíme $\pi_1(M; p_0)$. Pokud je M lineárně souvislá, fundamentální grupy $\pi_1(M; p_0)$ a $\pi_1(M; p_1)$, kde p_1,$p_0 \in M$, jsou navzájem izomorfní a můžeme je tedy obecně značit $\pi_1(M)$. M je jednoduše souvislá, pokud všechny smyčky jsou triviální, tj. $\pi_1(M) = \{1\}$.

Definice 8 *Řekneme, že souvislý prostor $\overline{M}$ je nakrytí souvislého prostoru M s projekcí $\pi : \overline{M} \to M$, pokud pro každé $x \in M$ existuje okolí $U \subset M$ takové, že $\pi^{-1}(U) = \{U_\alpha \subset \overline{M}\}$, U_α disjunktní, U_α difeomorfní s U.*

Univerzální nakrývací prostor

Nechť M je souvislá varieta. Univerzální nakrývací varieta $\tilde{M}$ variety M se konstruuje následujícím způsobem: Vyberme bod $p_0 \in M$. Body prostoru $\tilde{M}$ jsou třídy ekvivalence dvojic (p, γ), kde p je bod z M a $\gamma : [0,1] \to M$ je křivka v M začínající v p_0, končící v p a (p_1, γ_1) je ekvivalentní (p_2, γ_2) pokud $p_1 = p_2$ a $\gamma_1 \sim \gamma_2$, tj. $\gamma_1\gamma_2^{-1} \sim 1$.

Popišme ještě strukturu variety $\tilde{M}$. Vezmeme nejdříve jednoduše souvislé okolí U bodu p v M. Bodu $q \in U$ přiřadíme křivku složenou z křivky γ

končící v p a křivky spojující p a q, γ_{pq}. Homotopická třída $\gamma\gamma_{pq}$ je nezávislá na volbě křivky γ_{pq}. Okolí bodu (p,γ), $\tilde{U}$, se bude skládat ze všech křivek $\gamma\gamma_{pq}$ pro $q \in U$. Protože dvojice $(q, \gamma\gamma_{pq})$ je až na homotopii jednoznačně určená bodem q, body z $\tilde{U}$ jsou v 1-1 korespondenci s body z U. Bodu $(q, \gamma\gamma_{pq})$ přiřadíme tedy lokální souřadnice bodu q z M. Navíc zobrazení $\pi : \tilde{U} \to U$ bude difeomorfismus.

Poznámka: Univerzální nakrývací prosor variety M je souvislý prostor $\overline{M}$, který je hlavním fibrovaným bundlem nad M s fiberem $\pi^{-1}(p)$ skládajícím se z diskrétní množiny bodů a se strukturní grupou $\pi_1(M)$ (viz definice 11).

1.3 Vektorový fibrovaný prostor

Definice 9 *Fibrovaným prostorem (bundlem) E nad M rozumíme čtveřici (E, M, π, F), kde E, M, F jsou variety a*

$$\pi : E \to M$$

je diferencovatelné zobrazení takové, že pro $\forall p \in M$ existuje okolí U takové, že $U \times F$ je difeomorfní s částí bundlu nad U $\pi^{-1}(U)$, tj. existují difeomorfismy

$$\Phi_U : U \times F \to \pi^{-1}(U),$$
$$\Phi_U(p, y) \in \pi^{-1}(p)$$

a pro $p \in U \cap V$ je $\Phi_V^{-1} \circ \Phi_U(p, y)$ lineární izomorfismus v proměnné y $\pi^{-1}(p) = E_p$ nazveme fiber. E nazveme (reálný) vektorový fibrovaný prostor nad M pokud F je izomorfní s R^k.

Poznamenejme, že v případě vektorového fibrovaného prostoru je fibre nad p, $\pi^{-1}(p)$, k-dimenzionální vektorový prostor, který ztotožňujeme s R^k pomocí zobrazení ϕ_U, pro U z definice 9, které obsahuje p.

Definice 10 *Nechť (E, M, π, F) je fibrovaný prostor, $\{U_\alpha\}$ je otevřené pokrytí M, ϕ_{U_α} je zobrazení z definice 9. Potom $(U_\alpha, \phi_{U_\alpha})$ nazveme bundle atlas.*

Definice 11 *Hlavní fibrovaný prostor je vektorový fibr. prostor (E, M, π, G), kde G je Liova grupa a navíc platí:*

- *G působí na E volně zprava (pevné body má pouze $e \in G$)*

- *$E/G = M$, tj. $\pi(f.g) = \pi(f)$ pro $\forall f \in E$, $\forall g \in G$ a působí na fibrech tranzitivně*[3] *(tj. $\forall f_1, f_2 \in \pi^{-1}(p)$, $\forall p \in M$ $\exists g \in G$ takové, že $f_1.g = f_2$)*

- *E je lokálně triviální, tj. $\forall p \in M$ existuje okolí U, $\psi(f) = (\pi(f), \varphi(f))$ a $\psi(f.g) = (\pi(f), \varphi(f).g)$*

Příkladem hlavního fibrovaného prostoru je $(\tilde{M}, M, \pi, \pi_1(M))$.

Definice 12 *Nechť (E, M, π, F) je fibrovaný prostor, F_p fiber v bodě p. Zobrazení $S : M \to E$ takové, že $\pi \circ S = id_M$ nazveme řez. V případě fibrovaného vektorového prostoru řekneme, že je triviální, pokud existuje $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$, S_i spojité, tak, že $\forall p \in M$ je $(S_1(p), S_2(p), \ldots, S_k(p))$ báze E_p.*

Příklad: Mějme varietu M^n, TM^n její tečný bundle. Nechť $\pi : TM^n \to M^n$ zobrazuje tečný vektor v bodě p na bod p. TM^n je fibrovaný vektrový prostor nad M^n, $\pi^{-1}(p) = T_pM^n$, tedy fibre je tečný prostor v daném bodě.

1.4 Kovariantní derivace

Definice 13 *Nechť E je vektorový fibrovaný prostor nad M. Nechť operátor ∇ (nazýváme konexe) připisuje vektorovému poli $\mathbf{X} \in \Gamma(TM)$ ($\mathbf{X}(p)$ je tečný vektor v bodě p) a řezu $\mathbf{v}$ definovanému na okolí bodu p řez $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v}$ definovaný také na okolí bodu p pro který platí*

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) &= a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{w}, \\
\nabla_{a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}}\mathbf{v} &= a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v} + b\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{v}, \\
\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{v}) &= \mathbf{X}(f)\mathbf{v} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v}
\end{aligned}$$

pro každý řez $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, funkci f a čísla a, b. Zároveň požadujeme, aby v případě, že $\mathbf{X}$ je hladké vektorové pole, bylo i $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v}$ hladký řez. Toto zobrazení nazveme kovariantní derivace podél vektorového pole $\mathbf{X}$. Pokud $E = TM$ nazveme toto zobrazení afinní konexe.

V případě afinní konexe (tedy ve speciálním případě $E = TM$) platí, že pokud $\mathbf{X} = \sum_i X^i\mathbf{e}_i$, potom $\nabla_{\mathbf{X}} = \sum_i X^i\nabla_{\mathbf{e_i}}$. Pokud $\mathbf{e} = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ je báze v oblasti U, potom $\mathbf{X} = \mathbf{e}_jX^j$ a

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{e}_kv^k) = X^j\mathbf{e}_i\omega^i_{jk}v^k + X^j\mathbf{e}_j(v^k)\mathbf{e}_k,$$

[3]Důsledek: $p \in M$ libovolný, zvolíme $f_0 \in \pi^{-1}(M)$, pak zobrazení $G \to \pi^{-1}(M) : g \to f_0.g$ je difeomorfismus.

kde ω^i_{jk} je definováno vztahem

$$\nabla_{\mathbf{e}_j}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i\omega^i_{jk}.$$

Protože $\mathbf{X}(v^k) = \mathrm{d}v^k(\mathbf{X})$ pak

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v} = \mathbf{e}_i\{\mathrm{d}v^i(\mathbf{X}) + X^j\omega^i_{jk}v^k\}.$$

Čísla ω^i_{jk} se nazývají koeficienty afinní konexe vzhledem k bázi $\mathbf{e}$. Použijeme-li dualní bázi σ, pak dostaneme

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v} = \mathbf{e}_i\{\mathrm{d}v^i + \omega^i_{jk}\sigma^j v^k\}(\mathbf{X}).$$

Použijeme-li bázi $\mathbf{e}_i = (\frac{\partial}{\partial x^i})$ a příslušnou duální bázi $\sigma^i = \mathrm{d}x^i$, pak

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \omega^i_{jk}v^k\right\}\,\mathrm{d}x^j(\mathbf{X}),$$

nebo-li

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v}(\mathbf{p}) = (X.v)(p) + A(p, X(p))v(p),$$

kde $A(p, X)$ závisí na $p \in M$ hladce, na X lineárně, pro p pevné se jedná o 1-formu.

V lokálních souřadnicích i v případě obecného vektorového fibrovaného prostoru je

$$\nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + A(X), \tag{1.3}$$

kde A je 1-forma s hodnotami v lineárních zobrazeních.

Definice 14 *Buďte $\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p$ tečné vektory v bodě p a $\mathbf{v}_p$ je vektor z fibru nad p a nechť $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ a $\mathbf{v}$ jsou libovolná hladká prodloužení těchto vektorů na nějakém okolí U bodu p. Definujeme*

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{v} := \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{v}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v}) - \nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{v}$$

v oblasti U. $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ nazveme Riemannův tenzor.

Poznámka: Hodnota vektorového pole $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{v}$ v bodě p je nezávislá na prodloužení $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ a $\mathbf{v}$. Zobrazení

$$\mathbf{v}_p \to R(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p)\mathbf{v}_p$$

je lineární zobrazení $\pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(p)$, které nazveme křivostí pro řezy $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$.

Paralelní přenos

Mějme vektorový fibrovaný prostor E (fiber značíme E_p) nad M s kovariantní derivací ∇, paralelní přenos podél parametrizované křivky $\gamma = \gamma(t), t \in [a, b]$ na M je unitární zobrazení

$$U(t, s) : E_{\gamma(s)} \to E_{\gamma(t)}, \forall t, s \in [a, b]$$

takové, že pro ψ z množiny hladkých řezů platí

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(U(t, t+h)\psi(\gamma(t+h)) - \psi(\gamma(t))) &= \nabla_{\mathbf{X}}\psi \qquad (1.4) \\ U(0,0) &= I, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{X}(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$. V lokálních souřadnicích platí

$$\nabla_{\mathbf{X}}\psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}U(t, s)\psi(\gamma(s))|_{s=t} = \frac{\partial}{\partial s}U(t, s)|_{s=t}\psi(\gamma(t)) + \mathbf{X}.\psi(\gamma(t)).$$

Pokud $\nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + A(\mathbf{X})$, pak

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t_0, t) = \frac{\partial}{\partial h}U(t_0, t+h)|_{h=0} = U(t_0, t)\frac{\partial}{\partial s}U(t, s)|_{s=t} = U(t_0, t)A(\dot{\gamma}(t)).$$

Tedy U dostaneme jako řešení diferenciální rovnice

$$U(t_0, t)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}U(t_0, t) = A(\dot{\gamma}(t)). \qquad (1.5)$$

V případě $R = 0$ je paralelní přenos nezávislý na homotopicky ekvivalentní křivkách. Pokud dimenze fibru je rovna 1, potom A je skalární 1-forma, $U(t_0, t)$ je skalární funce a (1.5) je obyčejná diferenciální rovnice. Potom

$$U(t_0, t) = \exp(\int_{t_0}^{t} A(\dot{\gamma}(t))\ \mathrm{d}t). \qquad (1.6)$$

1.5 Kvantová mechanika na varietě

Porovnejme dva možné přístupy k vybudování kvantové mechaniky na varietě, která nemusí být jednoduše souvislá:

Model 1

Nechť M je Riemannova varita, $\tilde{M}$ je univerzální nakrytí M. $M = \pi_1(M)\backslash\tilde{M}$, $U(g)$ je unitární reprezentace fundamentální grupy v Hilbertově prostoru $\mathcal{L}$. Hilbertův prostor definujeme vztahem

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \;=\; &\{\psi \text{ měřitelné na } \tilde{M} \text{ s hodnotami v } \mathcal{L}; \forall g \in \pi_1(M), \psi(g.x) = U(g)\psi(x), \\ &\int_M |\psi(x)|^2\ \mathrm{d}\mu < \infty\}. \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Skalární součin na $\mathcal{H}_1$ definujeme vztahem

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_M \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\mathcal{L}} \, \mathrm{d}\mu, \tag{1.8}$$

kde $\mathrm{d}\mu$ je v lokálních souřadnicích rovna $\mathrm{d}\mu = \sqrt{g}\, \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n$. Hamiltonián definujeme vztahem $H_1 = -\Delta_{LB}$, kde Δ_{LB} je Laplace-Beltramův operátor definovaný

$$\Delta_{LB} = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} g^{1/2} \frac{\partial}{\partial x^j}), \tag{1.9}$$

$g = \det g_{ij}$ a g_{ij} je metrický tenzor.

Model 2

V druhém případě mějme Riemannovu varietu M, E nechť je hermitovský vektorový fibrovaný prostor nad M (F je úplný vektorový prostor je se skalárním součinem). $\langle .,. \rangle_E = \int_M \langle .,. \rangle d\mu$. $\mathcal{H}_2$ definujeme vztahem

$$\mathcal{H}_2 = \{\psi \text{ řezy } E; \int_M \|\psi(x)\|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty\}. \tag{1.10}$$

Nechť kovariantní derivace ∇_X : hladké řezy $E \to$ hladké řezy E, kde $X \in \Gamma(TM)$, splňuje podmínku[4] (aby byla konexe hermitovská)

$$X\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \nabla_X \psi_1, \psi_2 \rangle + \langle \psi_1, \nabla_X \psi_2 \rangle. \tag{1.11}$$

Hamiltonián definujeme vztahem

$$H_2 = -g^{-1/2} D_i (g^{ij} g^{1/2} D_j), \tag{1.12}$$

kde $D_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$ a g_{ij} je metrický tenzor. Pokud neuvažujeme dodatečné vnější pole, požadujeme nulovou křivost konexe ∇.

Ekvivalence

pull-back: Nechť $\pi : \tilde{M} \to M$. Definujeme $\pi^* : C^\infty(M) \to C^\infty(\tilde{M})$ následujícím způsobem:

$$\pi^* F = F \circ \pi, \tag{1.13}$$

[4] $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle(x)$ je funkce na M, tedy rovnice má smysl.

π^* se nazývá pull-back, $\pi^* F$ se nazývá lift F z M do $\tilde{M}$. Zvednout lze vektorový fibrovaný prostor i s konexí:

$$\tilde{E} = \pi^* E, \tag{1.14}$$

$$\tilde{E}_q = E_{\pi(q)}, \quad \forall q \in \tilde{M}. \tag{1.15}$$

Konexe se zvedne tak, že paralelní přenos $\tilde{T}$ v $\tilde{E}$ je dán

$$\tilde{T}(\gamma) = T(\pi \circ \gamma), \tag{1.16}$$

kde γ je křivka v $\tilde{M}$, T je paralelní přenos v E. Je-li $R = 0$, pak je i $\tilde{R} = 0$. Protože $\tilde{M}$ je jednoduše souvislá, je $\tilde{E}$ triviální[5]. Buď $q_0 \in M$ opěrný bod, $\tilde{q}_0 = [(q_0, 1)]$, tj. třída ekvivalence křivek končící v q_0, 1 je triviální křivka. Protože $\tilde{M}$ je jednoduše souvislá a $\tilde{R} = 0$, závisí $\tilde{T}(\gamma)$ pouze na homotopické třídě γ, tedy pouze na koncovém bodě a pro γ z $\tilde{q}_0$ do q můžeme položit

$$\tilde{T}(\gamma) =: \tilde{T}(q). \tag{1.17}$$

Při dané definici skládání křivek platí $T(\gamma_1\gamma_2) = T(\gamma_2)T(\gamma_1)$. Nechť $x = [(q, \gamma)] \in \tilde{M}$, kde $q \in M$, γ je křivka v M z q_0 do q. Ke křivce γ v M existuje právě jedna nakrývající křivka $\tilde{\gamma}$ v $\tilde{M}$ s počátečním bodem $\tilde{q}_0$. Koncový bod $\tilde{\gamma}$ je x a tedy $\tilde{T}(x) = T(\gamma)$.

Buď $g = [\gamma_1] \in \pi_1(M)$, pak $g.x = [(q, \gamma_1\gamma)]$ a

$$\tilde{T}(g.x) = T(\gamma_1\gamma) = T(\gamma)T(\gamma_1) = T(\gamma)U(g)^{-1}, \tag{1.18}$$

kde $U(g) := T(\gamma_1)^{-1}$ pro $\forall g = [\gamma_1] \in \pi_1(M)$. Protože $R = 0$ závisí $T(\gamma_1)$ pouze na třídě ekvivalence křivky. U je tedy unitární reprezentace $\pi_1(M)$ v $\mathcal{L} = E_{q_0}$. $\tilde{E}$ je triviální vektorový fibrovaný prostor, $\nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + A(\mathbf{X})$ a lze definovat

$$\tilde{A}(q, X(q)) := (\pi^* A)(q, X(q)) = A(\pi(q), \mathrm{d}\pi(q)(X(q))), \tag{1.19}$$

pro $q \in \tilde{M}$ a $X \in T\tilde{M}$.

od 2. modelu k 1. modelu Při ekvivalenci vyjdeme nejdříve z 2. modelu:

V předchozích odstavcích jsme nalezli unitární reprezentaci U grupy $\pi_1(M)$ v $\mathcal{L} = E_{q_0}$. Pomocí U zkonstruujeme kvantový systém podle modelu 1. Buď $\psi \in \mathcal{H}_1$ ekvivariantní vektorová funkce, $q \in M$, $x \in \pi^{-1}(q) \in \tilde{M}$, potom $x =$

[5] V jednom bodě $\tilde{M}$ zvolíme bázi řezů, kterou pomocí paralelního přenosu přeneseme i do ostatních bodů. Protože $\tilde{M}$ je jednoduše souvislá a $\tilde{R} = 0$ nebude přenos záviset na volbě křivky.

$[(q,\gamma)]$, kde γ je křivka v M spojující q_0 a q. Položme $(\mathcal{U}\psi)(q) = T(\gamma)\psi(x)$. Protože $T(\gamma) : E_{q_0} \to E_q$ a $\psi(x) \in \mathcal{L} = E_{q_0}$, leží hodnoty $\mathcal{U}\psi$ v E_q. Aby bylo $\mathcal{U}$ dobře definované unitární zobrazení z $\mathcal{H}_1$ do $\mathcal{H}_2$, musí být $\mathcal{U}\psi$ nezávislé na volbě x: Je-li $g = [\gamma_1] \in \pi_1(M)$, $x' = g.x \in \pi^{-1}(q)$, potom $x = [(q,\gamma')]$, kde $\gamma' = \gamma_1\gamma$ a platí

$$T\gamma'\psi(x') = T(\gamma_1\gamma)\psi(g.x) = T(\gamma)U(g)^{-1}U(g)\psi(x) = T(\gamma)\psi(x). \tag{1.20}$$

od 1.modelu k 2.modelu Vyjdeme z 1. modelu:

Je dána reprezentace U. Pomocí U lze hlavnímu fibrovanému prostoru $\tilde{M}$ přiřadit vektorový fibrovaný prostor E nad M: Body E jsou třídy ekvivalence bodů $(x,v) \in \tilde{M} \times \mathcal{L}$

$$(x,v) \sim (x',v') \Leftrightarrow x' = g.x, v' = U(g)v \text{ pro nějaké } g \in \pi_1(M). \tag{1.21}$$

Touto konstrukcí je dán jednoznačný vztah mezi řezy v E a ekvivariantními vektorovými funkcemi na $\tilde{M}$.

Na hlavním fibrovaném prostoru $\tilde{M}$ nad M je dána jediná konexe ($dimM = dim\tilde{M}$), která se přenese na konexi ∇ v E s nulovou křivostí. Paralelní přenos $T(\gamma)$ definujeme následujícím způsobem: Buď γ křivka v M z q_0 do q, $\tilde{\gamma}$ nakrývající křivka v $\tilde{M}$ z $\tilde{q}_0$ do x, $\pi(x) = q$. Buď $V \in E_{q_0}$, $V = [(\tilde{q}_0, v)]$, potom $T(\gamma)V := [(x,v)]$. Je-li γ uzavřená, pak $x = g.\tilde{q}_0$, kde $g = [\gamma_1] \in \pi_1(M)$,

$$T(\gamma)V = [(g.\tilde{q}_0, v)] = [(\tilde{q}_0, U(g^{-1})v)] =: U(g)^{-1}V. \tag{1.22}$$

Je tedy dáno zobrazení $\mathcal{U}^{-1} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$.

Příklad Nechť $\tilde{M} = R$, $M = R/2\pi Z = S^1$ (kružnice), $\pi_1(M) = Z$. Akci grupy $\pi_1(M)$ na prvky z $\tilde{M}$ definujeme

$$n.x = x + 2\pi n.$$

Dále definujeme

$$U(n) = \exp(2\pi i\alpha n),$$

kde $\alpha \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \{\psi(x+2\pi n) = \exp(2\pi i\alpha n)\psi(x)\}, \\ H_1 &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}. \end{aligned}$$

Za E volíme $E = S^1 \times C$ a

$$H_2 = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + i\alpha\right)^2.$$

Nechť $\gamma : [0,1] \to S^1$, potom z předchozího výkladu vyplývá, že paralelní přenos podél křivky γ je dán

$$T(\gamma) = \exp(-i\alpha \int_0^1 \dot{\gamma}(t)\ \mathrm{d}t) = \exp(-i\alpha(\gamma(1) - \gamma(0))).$$

Pro $n \in Z$ je $\gamma_n(t) = 2\pi nt$, $t \in [0,1]$ a

$$T(\gamma_n) = U(n)^{-1} = \exp(-i\alpha 2\pi n).$$

Buď $q \in S^1$, tj. $q = [x]$, kde $x \in R$, $\gamma(t) = xt$. Potom

$$(\mathcal{U}\psi)(q) = T(\gamma)\psi(x) = \exp(-i\alpha x)\psi(x),$$

kde $\psi \in \mathcal{H}_1$, $\mathcal{U}\psi$ je řez E, tj. funce na S^1, tedy 2π-periodická funkce na R.

Kapitola 2

Konfigurační varieta dvou a více anyonů

2.1 Teorie nerozlišitelných částic

V kvantovém popisu systému identických částic má jejich nerozlišitelnost hluboké důsledky, které ovlivňují jejich fyzikální chování. Nejčastěji se nerozlišitelnost vyjadřuje požadováním symetrizační podmínky na stavovou funkci a pozorovatelné. Pro stavovou funkci n částic musí platit

$$|\psi(x_1, \ldots, x_n)|^2 = |\psi(p(x_1, \ldots, x_n))|^2,$$

kde p značí libovolnou záměnu částic (stavová funkce je buď symetrická, nebo antisymetrická) a všechny pozorovatelné musí být invariantní vůči záměně dvou libovolných částic. Výrazy uvedené v předešlé rovnici nemají rozdílný fyzikální význam, jedná se pouze o jiný popis té samé fyzikální situace. Tuto nejednoznačnost lze lehce odstranit, pokud od počátku uvažujeme klasický konfigurační prostor identických částic. Tento prostor je definován takovým způsobem, aby od začátku nerozlišitelnost částic uvažoval.

Klasický konfigurační prostor n identických částic má lokální vlastnosti shodné s X^n (pokud jednotlivé částice mají konfigurační prostor X), globální topologické vlastnosti jsou však odlišné. V následujících odstavcích se budeme zabývat právě tímto prostorem, a to pro případ dvou, resp. tří anyonů, tedy částic jejichž konfigurační prostor je R^2.

2.1.1 Konfigurační prostor

Nechť konfigurační prostor jedné částice je X. Možné konfigurace n-částicového systému bývají často popisovány jako body v X^n. Jsou-li částice identické, není žadný rozdíl mezi body v X^n, které se liší pouze pořadím souřadnic, tedy body $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $x' = p(x)$, kde $x_i \in X, \forall i = 1, \dots, n$ a p je libovolná permutace částic. Tyto body popisují stejnou konfiguraci systému. Správný konfigurační prostor, budeme ho značit X^n/S_n, dostaneme, pokud tyto body ztotožníme. Prostor X^n/S_n dostaneme faktorizací X^n podle akce symetrické grupy S_n. Prostor X^n/S_n je kromě singularních bodů-diagonály (bodů kde $\exists i, j$ takové, že $x_i = x_j$) lokálně izomorfní s původním prostorem X^n. Velmi často se z konfiguračního prostoru singulární body vyjmou, tj. předpokládá se, že částice nemohou přejít jedna přes druhou.

Fakt, že konfigurační prostor n identických častic není X^n, je možné přehlížet v nekvantové teorii, kde dynamika systému závisí pouze na lokálních vlastnostech prostoru, ne však v kvantové teorii. Podívejme se blíže na některé vlastnosti tohoto prostoru. Pro jednoduchost uvažujme $X = R^d$. Body prostoru můžeme popsat pomocí souřadnice těžiště a pomocí relativních souřadnic:

$$z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \in R^d, \quad x_{ij} = x_i - x_j, \tag{2.1}$$

kde $(x_1, \dots, x_n) \in (R^d)^n$. Označme $R_{REL,n} = \{x_{ij} | (x_1, \dots, x_n) \in (R^d)^n\}$[1]. z je invariantní vůči S_n a tedy platí

$$(R^d)^n/S_n = R^d \times R_{REL,n}/S_n. \tag{2.2}$$

Konfigurační prostor dvou částic v R^1, R^2, R^3

V případě dvou částic akce grupy S_n ztotožnuje bod $\mathbf{x} = x_{12} = x_1 - x_2$ s bodem $-\mathbf{x} = x_2 - x_1$. Ztotožněný prostor má jeden singularní bod, $\mathbf{x} = 0$. Pokud tento bod vyjmeme, není již konfigurační prostor jednoduše souvislý. Konfigurační prostor má tvar

$$R_{REL,2} - \{0\} = (0, \infty) \times \mathcal{P}_{d-1}, \tag{2.3}$$

kde $z \in (0, \infty)$ udává délku vektoru $\mathbf{x}$ a $\mathcal{P}_{d-1}$ je projektivní prostor směru vektoru $\pm\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. $\mathcal{P}_0$ je bod, $\mathcal{P}_1$ je kružnice, která je nekonečně souvislá narozdíl od $\mathcal{P}_2$, která je dvojitě souvislá.

Zaměřme se dále pouze na dva anyony, tj. $d = 2$. V tom případě je $R_{REL,2} - \{0\}$ rovina bez počátku, kde body $\mathbf{x}$ a $-\mathbf{x}$ jsou stejné. Tento prostor si můžeme představit jako kužel bez vrcholu. I z tohoto modelu je vidět, že se jedná o prostor nekonečně souvislý. Univerzální nakrývací prostor tohoto prostoru je $(0, \infty) \times R$, fundamentální grupou je Z, která je izomorfní s B_2 (viz následující kapitola).

[1] x_{ij} nejsou nezávislé

2.1.2 Fundamentální grupa

Fundamentální grupa n identických částic v rovině je izomorfní tzv. copánkové grupě (braid group), která se označuje B_n.

Copánková grupa

Copánková grupa B_n je nekonečná grupa mající $n-1$ generátorů $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, které splňují následující dvě podmínky [5]:

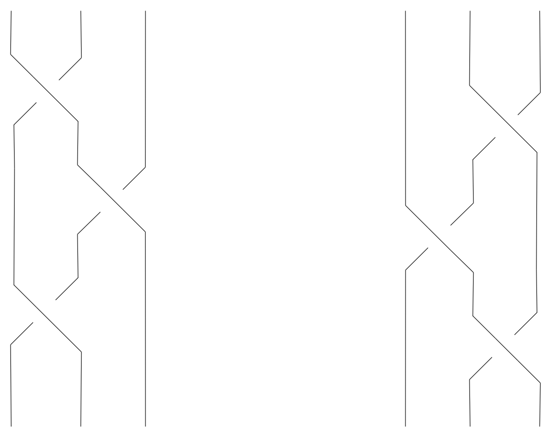
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \tag{2.4}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n-2$, a

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \tag{2.5}$$

pro $|i - j| \geq 2$. Inverzní prvek k σ_i budeme značit σ_i^{-1}. K lepšímu pochopení struktury copánkové grupy nám poslouží následující geometrická představa:

Mějme n provázků, generátor σ_i na ně působí přeložením i-tého provázku horem přes $(i+1)$-tý. Prvek grupy tedy závisí nejen na počáteční a konečné konfiguraci provázků, ale také na způsobu křížení. Z následujícího obrázku je vidět, že cop zapletený způsobem $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ je stejný jako $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$. Ještě jednodušší je představa druhé podmínky.



a) b)

Obrázek 2.1: a) cop zapletený způsobem $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$; b) cop zapletený způsobem $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

Poznamenejme na závěr, že v copánkové grupě nemusí na rozdíl od permutační grupy S_n platit $\sigma_i^2 = id$ a také že S_n je konečná faktorgrupa B_n.

2.2 Ekvivalentní modely pro dva anyony

V předchozích kapitolách jsme studovali vlastnosti konfiguračního prostoru systému stejných částic. V této kapitole se zaměříme na kvantový popis systému dvou anyonů. Připomeňme, že již nebudeme potřebovat symetrizační postulát, protože nejednoznačnost v popisu jsme odstranili správnou volbou konfiguračního prostoru.

Mějme vektorový fibrovaný prostor nad konfiguračním prostorem, fiber F_x nechť je jednorozměrný komplexní Hilbertův prostor. Předpokládejme, že stav systému je popsán vektory $\Psi(x) \in F_x$ (Ψ je řez). Pokud χ_x bude normovaný bazický vektor prostoru F_x, pak

$$\Psi(x) = \psi(x)\chi_x,$$

kde $\psi(x)$ je komplexní funkce a její hodnoty zavisí na volbě báze. Pokud zaměníme bázi $\{\chi_x\}$ za $\{\chi'_x\}$, změní se funkce $\psi(x)$ na funkci

$$\psi(x)' = \exp(i\phi(x))\psi(x).$$

Nechť $P(x', x) : F_x \to F_{x'}$ je operátor paralelního přenosu vektoru z F_x do $F_{x'}$ podél spojité křivky spojující x a x'. Paralelní přenos může záviset na křivce spojující dané dva body. O infinetisimální paralelním přenosu $P(x + dx, x)$ z bodu x do bodu $x + dx$ můžeme ale předpokládat, že na křivce nezávisí. Nechť $P(x', x)$ je unitární operátor pro $\forall x, x'$ a nechť lze zvolit bázi $\{\chi_x\}$ takovou, aby platilo

$$P(x + \mathrm{d}x, x)\chi_x = (1 + i\ \mathrm{d}x^k b_k(x))\chi_{x+\mathrm{d}x}. \tag{2.6}$$

Potom bude platit

$$\nabla_k = \partial/\partial_k - ib_k(x). \tag{2.7}$$

Funkce b_k jsou určeny dynamikou systému a také volbou báze v prostoru řezů a navíc musí být reálné, aby $P(x+\ \mathrm{d}x, x)$ byl unitární. Předpokládejme, že

$$R_{kl} = i[\nabla_k, \nabla_l] = 0. \tag{2.8}$$

Potom vektor $\Psi \in F_x$ zůstane nezměněn při paralélním přenosu podle libovolné uzavřené křivky, která nebude obíhat žádnou singularitu. Pokud naopak bude vektor obíhat m-krát kolem singularity, bude Ψ změněn na $P_x^m\Psi$, kde P_x je lineární unitární operátor působící v F_x. Protože je F_x jednodimenzionální, musí platit $P_x = \exp(i\alpha)$.

V našem případě lze vhodnou volbou bazických vektorů docílit toho, že $b_k(x) = 0$. V jednom bodě zvolíme χ_x libovolně a bazické vektory v ostatních bodech dostaneme paralelním přenosem tohoto vektoru. Pokud bude $\exp(i\alpha) \neq 1$, pak komplexní funkce $\phi(x)$ bude vícehodnotová, protože vektory χ_x, $\exp(\pm i\alpha)\chi_x, \ldots$ v bodě x dostaneme paralelním přenosem vektoru χ_x podél různých křivek obíhajících singularitu.

Nadále se budeme zabývat pouze stavovou funkcí pro relativní souřadnici, tj. $x_{12} = x_1 - x_2$. Protože ztotožňujeme x_{12} s $-x_{12}$, hodnoty x_{12} jsou z I. a II. kvadrantu. Při volbě sferických souřadnic tedy volíme

$$\begin{aligned} x_{12}^1 &= r\cos(\frac{\phi}{2}), \\ x_{12}^2 &= r\sin(\frac{\phi}{2}), \end{aligned} \tag{2.9}$$

kde $\phi \in [0, 2\pi]$. Tím dostaneme požadované ztotožnění. Potom Hamiltonián je dán rovnicí

$$H = -\frac{\hbar^2}{m}(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}), \tag{2.10}$$

kde vlnové funkce splňují podmínku[2]

$$\psi(r, \phi + 2\pi) = \exp(i\alpha)\psi(r, \phi). \tag{2.11}$$

Různé hodnoty α, určují různé způsoby kvantizace systému.

Unitárně ekvivalentní model dostaneme, pokud definujeme vlnovou funkci vztahem

$$\psi(r, \phi)' = \exp(\frac{-i\alpha}{2\pi}\phi)\psi(r, \phi) \tag{2.12}$$

a příslušný Hamiltonián bude

$$H' = \exp(\frac{-i\alpha}{2\pi}\phi)H\exp(\frac{i\alpha}{2\pi}\phi) = \frac{\hbar^2}{m}((\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r^2}(\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{i\alpha}{2\pi})^2). \tag{2.13}$$

2.3 Model pro dva a více anyonů

Podívejme se ještě na další model, jak popsat n identických částic v rovině, [1]. Výhodou je, že při tomto popisu lze, alespoň principiálně, použít Schulmanův Ansaz k nalezení příslušného propagátoru.

[2] V případě anyonů není hodnota α omezená. V případě dvou částic žijících v R^3 je kvůli dvojité souvislosti jejich konfiguračního prostoru hodnota α omezena na 0 (bosony) a π (fermiony).

Nechť $\delta_N \subset R^{2N}$ je diagonála (singulární body), tj. pozice nejméně dvou částic je stejná, a nechť S_N je grupa permutací působící přirozeně v R^{2N}. Konfigurační prostor N nerozlišitelných částic je

$$M_N = (R^{2N} - \delta_N)/S_N. \tag{2.14}$$

Fundamentální grupa $\pi_1(M_N)$ variety M_N je copánková grupa B_N, která určuje univerzální nakrytí $\tilde{M}_N$. Různé způsoby kvantizace odpovídají různým volbám unitární reprezentace U grupy B_N. Z vlastnosti (2.4) pro jednorozměrné reprezentace plyne, že

$$U(\sigma_1) = \ldots = U(\sigma_2) = \exp(2\pi i\alpha).$$

Předpokládejme, že $\alpha \in]0,1[$. Volný Hamiltomián je dán strukturou M_N, resp. $\tilde{M}_N$ pomocí Laplace-Beltramova operátoru. Mějme navíc potenciál V na M_N a nechť $\tilde{V}$ je jeho lift do $\tilde{M}_N$. Hamiltonián

$$\tilde{H}_U := \tilde{\Delta} + \tilde{V}, \tag{2.15}$$

působí na prostoru U-ekvivariantních funkcí

$$\mathcal{H}_U = \{\psi, \text{kvadraticky integrovatelné}, \psi(g.x) = U(g)\psi(x)\forall g \in B_N\}, \tag{2.16}$$

kde integrujeme přes libovolnou fundamentální oblast[3] $\tilde{M}_N$ a $\tilde{\Delta}$ je Lapace-Beltramův operátor na $\tilde{M}_N$.

Rozřežme dále varietu M_N takovým způsobem, abychom dostali jednoduše souvislou fundamentální oblast D. D můžeme také chápat jako jeden list univerzálního nakrývacího prostoru $\tilde{M}_N$. Označme souřadnice bodu $u = (u^1, u^2)$ $u \in R^N$ a nechť E_{jk} jsou nadroviny určené rovnicemi $x_j^2 = x_k^2$, kde $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in R^{2N}$. Definujme $E := \cup_{j<k} E_{jk} \supset \delta_N$, potom $R^N \backslash E$ je sjednocení otevřených jednoduše souvislých oblastí. Zvolme jednu, D, určenou rovnicí

$$x_1^2 < x_2^2 < \ldots < x_N^2.$$

D můžeme ztotožnit s jistou podmnožinou M_N. Rozdělme dále $\partial D \backslash \delta_N$ na $2(N-1)$ buněk, $C_{j,\epsilon}, j = 1, \ldots, N-1, \epsilon = \pm$, určené rovnicemi

$$x_1^2 < \ldots < x_j^2 = x_{j+1}^2 < \ldots < x_N^2, \epsilon(x_j^1 - x_{j+1}^1) < 0. \tag{2.17}$$

Potom D bude fundamentální oblast $\tilde{M}$.

[3] Fundamentální oblast $D \subset \tilde{M}$ je taková oblast, že $g.D$ jsou disjunktní ($g \in \pi_1(M)$) a jejich sjednocení pokrývá $\tilde{M}$ až na množinu míry 0.

Jedním ze způsobů, jak vytvořit kvantovou mechaniku, je zúžením z $\tilde{M}_N$ na D. Hilbertův prostor bude tedy $L^2(D)$. Musíme ještě definovat správné hraniční podmínky:

Nechť $x \in C_{j,+}$. Z podmínky (2.16) dostáváme okrajové podmínky

$$\psi(\ldots, x_{j+1}, x_j, \ldots) = \exp(-2\pi i\alpha \,\mathrm{sgn}(x^1_{j+1} - x^1_j))\psi(\ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots),$$
$$\text{v limitě } (x^2_{j+1} - x^2_j) \downarrow 0. \quad (2.18)$$

Hamiltonián dostaneme zúžením z $\tilde{M}_N$ na D.

Obdobně jako v případě dvou anyonů je výhodné oddělit težiště soustavy a to následující volbou souřadnic:

$$z = \frac{1}{N}(x_1 + \ldots + x_N) \text{ a } y_1 = x_{j+1} - x_j, j = 1, \ldots, N-1.$$

V důsledku vyjmutí diagonály z R^{2N} je třeba z $R^{2(N-1)}$ vyjmout body y splňující:

$$y_j + y_{j+1} + \ldots + y_k \neq 0, \text{ pro } j \leq k. \quad (2.19)$$

Generátory grupy S_N budou působit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \sigma_j(y) = y', \text{ s } y'_k &= y_k, \text{ pro } |k-j| > 1 \\ &= y_k + y_j, \quad |k-j| = 1 \\ &= -y_j, \quad k - j = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Souřadnici z nechává S_N nezměněnou.

Laplacián vyjádřený v nových souřadnicích má tvar:

$$\Delta_x = \frac{1}{N}\Delta_z + 2\Delta_y - 2\sum_{j=1}^{N-2} \nabla_{y_j} \cdot \nabla_{y_{j+1}}. \quad (2.21)$$

Stejným způsobem můžeme definovat nové souřadnice na D. $D \cong R^2 \times D^{red}$, $D^{red} \equiv R^2_+ \times \ldots \times R^2_+$, kde $R^2_+ := R \times R_+$ a $R_+ :=]0, +\infty[$. Zároveň $\partial D \cong R^2 \times \partial D^{red}$. Budeme se dále zabývat pouze redukovanou částí. Označme souřadnice D^{red} jako $(\xi, \eta) \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{N-1})$, $\xi_j \in R,\ \eta_j > 0,\ \forall j$. Okrajová podmínka (2.18) bude mít tvar:

$$\psi(\xi', \eta)|_{\eta_j = 0_+} = \exp(-2\pi i\alpha\xi_j)\psi(\xi, \eta)|_{\eta_j = 0_+}, \quad j = 1, \ldots, N-1, \quad (2.22)$$

kde

$$\begin{aligned} \xi'_k &= \xi_k, \text{ pro } k \neq j-1, j, j+1, \\ \xi_{j\pm1} &= \xi_{j\pm1} + \xi_j \text{ a } \xi'_j = -\xi_j. \end{aligned}$$

Na závěr této části zmíníme ještě jednu možnost vybudování kvantové mechaniky v případě 3 anyonů. Je založen na použití 2. modelu: Mějme vektorový fibovaný prostor nad konfiguračním prostorem, fiber nechť je jednorozměrný komplexní Hilbertův prostor, konexe nechť je ve tvaru $\nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + A(\mathbf{X})$, kde A volíme podle [9] ve tvaru

$$A = i\alpha \,\mathrm{d}(\theta(y) + \theta(z) + \theta(y+z)), \tag{2.23}$$

kde y, z jsou relativní souřadnice, $\theta(y) = \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ (dolními indexy značíme jednotlivé indexy souřadnic). Platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta(y) &= \frac{-y_2 \,\mathrm{d}y_1 + y_1 \,\mathrm{d}y_2}{y_1^2 + y_2^2}, \\ \mathrm{d}\theta(y+z) &= \frac{-(y_2+z_2)\,\mathrm{d}y_1 - (y_2+z_2)\,\mathrm{d}z_1 + (y_1+z_1)\,\mathrm{d}y_2 + (y_1+z_1)\,\mathrm{d}z_2}{(y_1+z_1)^2 + (y_2+z_2)^2}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Použitím (2.24) dostáváme A v souřadnicích y, z ve tvaru:

$$A = i\alpha\Big(\frac{-y_2 \,\mathrm{d}y_1 + y_1 \,\mathrm{d}y_2}{y_1^2 + y_2^2} + \frac{-z_2 \,\mathrm{d}y_1 + z_1 \,\mathrm{d}y_2}{z_1^2 + z_2^2} + \frac{-(y_2+z_2)\,\mathrm{d}y_1 - (y_2+z_2)\,\mathrm{d}z_1 + (y_1+z_1)\,\mathrm{d}y_2 + (y_1+z_1)\,\mathrm{d}z_2}{(y_1+z_1)^2 + (y_2+z_2)^2}\Big). \tag{2.25}$$

Z tohoto tvaru je jednoduchým vypočtem zřejmé, že A je invariantní vůči záměně $y \leftrightarrow -y$ a $z \leftrightarrow (y+z)$, což je nezbytná podmínka správné volby konexe. Hamiltonián relativní části bude ve tvaru

$$H = -\frac{\hbar^2}{m}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}.\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}.\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}.\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}). \tag{2.26}$$

Do H lze dosadit za kovariantní derivace a dostaneme explicitní předpis, který je ovšem poměrně složitý.

Kapitola 3

Schulmanův ansatz

Schulmanův ansatz udává vztah mezi dvěma Hamiltoniány, nebo přesněji řečeno mezi jejich propagátory působících na dvou různých Hilbertových prostorech. Mějme jednoduše souvislou varietu $\tilde{M}$ a diskrétní grupu Γ působící volně (tj. pouze jednotka má pevné body v M)[1] na $\tilde{M}$, U buď unitární reprezentace Γ a Γ ekvivalentní potenciál $\tilde{V}$ na $\tilde{M}$. Nechť $M = \tilde{M}/\Gamma$, potom $\pi_1(M) = \Gamma$. Definujme $\tilde{\mathcal{H}} := L^2(\tilde{M})$, $\tilde{H} := -\tilde{\Delta} + \tilde{V}$ definován na $\tilde{\mathcal{H}}$ a $\tilde{\mathcal{K}}_t(.,.)$ je příslušný propagátor. Dále definujme $\mathcal{H}_U$ Hilbertův prostor U-ekvivariantních funkcí na $\tilde{M}$, $\tilde{H}_U = -\tilde{\nabla} + \tilde{V}$ a nechť $\mathcal{K}_t^U(.,.)$ je příslušný propagátor. Integruje se, narozdíl od $\tilde{\mathcal{H}}$, pouze přes libovolnou fundamentální oblast akce Γ na $\tilde{M}$. Schulmanův ansatz zní:

$$\mathcal{K}_t^U(x, x_0) = \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(g.x, x_0). \tag{3.1}$$

Zvolíme-li jedoduše souvislou oblast D, zúžení $\tilde{M} \to D$ určuje unitární ekvivalenci $\mathcal{H}_U \cong L^2(D)$. Označme H obraz operátoru $\tilde{H}_U$ při této ekvivalenci a $\mathcal{K}_t(.,.)$ příslušný propagátor. Potom zřejmě

$$\mathcal{K}_t(.,.) = \mathcal{K}_t^U(.,.)|D \times D. \tag{3.2}$$

Příklad 1 Volná částice na kružnici

Mějme volnou částici pohybující se na kružnici, obdobně jako v příkladu z kapitoly 2.2. Tedy $\tilde{M} = R$, $\Gamma = 2\pi Z$, $M = S^1$. Hamiltonián částice je dán $H = -\frac{d^2}{dx^2}$, $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(R)$, U je násobení komplexní jednotkou, tj. $U(n) = \exp(i\alpha n)$, $\forall n \in \Gamma$. Propagátor volné částice na přímce je roven

$$\tilde{K}_t(x, x_0) = \left(\frac{1}{\pi i t}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i}{t}(x - x_0)^2\right). \tag{3.3}$$

[1] Pro každý bod $q \in M$ musí být zobrazení $\Gamma \to \Gamma : g \to g.q$ vzájemně jednoznačné.

Navíc $x - x_0 = \varphi - 2\pi n$, kde $\varphi \in [0, 2\pi[$. Potom pro $K_t(\varphi, x_0)$ platí

$$K_t(\varphi, x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\alpha) \left(\frac{1}{\pi i t}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i}{t}(\varphi - x_0 - 2n\pi)^2\right). \tag{3.4}$$

Použitím vzorce pro Jacobiho theta funkci

$$\theta_3(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i\pi t n^2 + i2nz)$$

a Poissonovy sumační formule

$$\theta_3(z, t) = (-it)^{-1/2} \exp(\frac{z^2}{i\pi t})\theta_3(\frac{z}{t}, -\frac{1}{t})$$

dostáváme výsledek:

$$K_t(x, x_0) = \left(\frac{1}{\pi i t}\right)^{1/2} \exp(\frac{i\varphi^2}{t})\theta_3\left(\frac{2\pi\varphi}{t} - \frac{\alpha}{2}, \frac{4\pi}{t}\right). \tag{3.5}$$

Schulmanův ansatz lze s úspěchem použít i při hledání proparátoru dvou volných anyonů viz [1].

3.1 Formální odvození

Pokusme se, alespoň formálně, obhájit Schulmanův ansatz. Pro propagátor v $L^2(\tilde{M})$ díky invariantnosti Hamiltoniánu vůči akci grupy Γ platí

$$\tilde{\mathcal{K}}_t(x, x_0) = \tilde{\mathcal{K}}_t(g.x, g.x_0),$$

tj.

$$\tilde{\mathcal{K}}_t(g.x, x_0) = \tilde{\mathcal{K}}_t(x, g^{-1}x_0). \tag{3.6}$$

Navíc z obecných vlastností propagátoru platí

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0_+} \tilde{\mathcal{K}}_t(x, x_0) &= \tilde{\delta}(x, x_0), \\
\overline{\tilde{\mathcal{K}}_t(x, x_0)} &= \tilde{\mathcal{K}}_{-t}(x_0, x), \\
\int_{\tilde{M}} \tilde{\mathcal{K}}_s(x, y)\tilde{\mathcal{K}}_t(y, z)\, \mathrm{d}\tilde{V}(y) &= \tilde{\mathcal{K}}_{s+t}(x, z), \\
(i\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{LB})\vartheta(t)\tilde{\mathcal{K}}_t(x, x_0) &= i\delta(t)\tilde{\delta}(x, x_0).
\end{aligned}$$

Propagátor na $\mathcal{H}_U$ musí splňovat následujících pět vlastností:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t^U(g.x, x_0) &= U(g)\mathcal{K}_t^U(x,y), && (3.7) \\ \mathcal{K}_t^U(x, g.y) &= U(g^{-1})\mathcal{K}_t^U(x,y), && (3.8) \\ \overline{\mathcal{K}_t^U(x,x_0)} &= \mathcal{K}_{-t}^U(x_0,x), && (3.9) \\ \int_D \mathcal{K}_s^U(x,y)\mathcal{K}_t^U(y,z)\ \mathrm{d}V(y) &= \mathcal{K}_{s+t}^U(x,z), && (3.10) \\ (i\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{LB})\vartheta(t)\mathcal{K}_t^U(x,x_0) &= i\delta(t)\delta^U(x,x_0). && (3.11) \end{aligned}$$

Ukažme nejdříve, že $\tilde{\delta}(x, g.y) = \tilde{\delta}(g^{-1}.x, y)$.

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{M}} \tilde{\delta}(x,g.y)\varphi(y)\ \mathrm{d}\tilde{V}(y) &= \int_{\tilde{M}} \tilde{\delta}(x,y)\varphi(g^{-1}.y)\ \mathrm{d}\tilde{V}(y) = \tilde{\varphi}(g^{-1}.x) \\ &= \int_{\tilde{M}} \tilde{\delta}(g^{-1}.x,y)\varphi(y)\ \mathrm{d}\tilde{V}(y). \end{aligned}$$

Potom $\delta^U(x,y) = \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1})\tilde{\delta}(g.x,y)$ bude splňovat podmínky pro jádro identity v $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \int_M \delta^U(x,y)\varphi(y)\ \mathrm{d}V = \int_D \delta^U(x,y)\varphi(y)\ \mathrm{d}\tilde{V}(y) = \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1}) \int_D \tilde{\delta}(g.x,y)\varphi(y)\ \mathrm{d}\tilde{V} \\ = \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1}) \int_{g^{-1}.D} \tilde{\delta}(g.x,g.z)\varphi(g.z)\ \mathrm{d}\tilde{V}(z) = \sum_{g\in\Gamma} \int_{g^{-1}.D} \tilde{\delta}(x,z)\varphi(z)\ \mathrm{d}\tilde{V}(z) \\ = \int_{\tilde{M}} \tilde{\delta}(x,z)\varphi(z)\ \mathrm{d}\tilde{V}(z) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Z výše zmíněné definice vyplývá, že:

$$\delta^U(g.x,y) = U(g)\delta^U(x,y) \tag{3.12}$$

a

$$\delta^U(x,g.y) = U(g^{-1})\delta^U(x,y), \tag{3.13}$$

protože platí

$$\begin{aligned} \int_D \delta^U(g.x,y)\varphi(y)\ \mathrm{d}\tilde{V} &= \varphi(g.x) = U(g)\varphi(x) = U(g)\int_D \delta^U(x,y)\varphi(y)\ \mathrm{d}V, \\ \int_D \delta^U(x,g.y)\varphi(y)\ \mathrm{d}\tilde{V} &= \varphi(g^{-1}.x) = U(g^{-1})\int_D \delta^U(x,y)\varphi(y)\ \mathrm{d}\tilde{V}. \end{aligned}$$

Formálně ověříme vlastnosti (3.7)-(3.11):

Vlastnost (3.7):

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_t^U(a.x,y) &= \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(g.a.x,x_0) = U(a)\sum_{g\in\Gamma} U(a^{-1})U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(g.a.x,x_0) \\
&= U(a)\sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(x,x_0) = U(a)\mathcal{K}_t^U(x,x_0).
\end{aligned}$$

Vlastnost (3.8):

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_t^U(x,a.y) &= \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(g.x,a.y) = \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(a^{-1}g.x,y) \\
&= U(a^{-1})\sum_{g\in\Gamma} U(a)U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(a^{-1}.g.x,y) = U(a^{-1})\mathcal{K}_t^U(x,y).
\end{aligned}$$

Vlastnost (3.9):

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{K}_t^U(x,x_0)} &= \sum_{g\in\Gamma} \overline{U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(g.x,x_0)} = \sum_{g\in\Gamma} U(g)\tilde{\mathcal{K}}_{-t}(x_0,g.x) \\
&= \sum_{g\in\Gamma} U(g)\tilde{\mathcal{K}}_{-t}(g^{-1}.x_0,x) = \mathcal{K}_{-t}^U(x_0,x).
\end{aligned}$$

Vlastnost (3.10):

$$\begin{aligned}
\int_D \mathcal{K}_s^U(x,y)\mathcal{K}_t^U(y,z)\,\mathrm{d}\tilde{V}(y) &= \int_D \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_s(g.x,y)\sum_{g'\in\Gamma} U(g'^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(g'.y,z)\,\mathrm{d}\tilde{V}(y) \\
&= \sum_{g\in\Gamma}\sum_{g'\in\Gamma} U(g^{-1})U(g'^{-1})\int_D \tilde{\mathcal{K}}_s(g.x,y)\tilde{\mathcal{K}}_t(g'.y,z)\,\mathrm{d}\tilde{V}(y) \\
&= \sum_{h\in\Gamma}\sum_{g'\in\Gamma} U(h^{-1})\int_D \tilde{\mathcal{K}}_s(g'^{-1}.h.x,y)\tilde{\mathcal{K}}_t(g'.y,z)\,\mathrm{d}\tilde{V}(y) \\
&= \sum_{h\in\Gamma} U(h^{-1})\sum_{g'\in\Gamma}\int_D \tilde{\mathcal{K}}_s(h.x,g'.y)\tilde{\mathcal{K}}_t(g'.y,z)\,\mathrm{d}\tilde{V}(y) \\
&= \sum_{h\in\Gamma} U(h^{-1})\int_{\tilde{M}} \tilde{\mathcal{K}}_s(h.x,y)\tilde{\mathcal{K}}_t(y,z)\,\mathrm{d}\tilde{V}(y) \\
&= \sum_{h\in\Gamma} U(h^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_{s+t}(h.x,z) \\
&= \mathcal{K}_{t+s}^U(x,z).
\end{aligned}$$

Ve třetí rovnosti jsme použili substituci $h = g^{-1}g'^{-1}$.

Vlastnost (3.11):

$$\begin{aligned}
(i\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{LB})\vartheta(t)\mathcal{K}_t^U(x,x_0) &= (i\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{LB})\vartheta(t)\sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1})\tilde{\mathcal{K}}_t(g.x,x_0) \\
&= \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1})(i\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{LB})\vartheta(t)\mathcal{K}_t^U(x,x_0) \\
&= \sum_{g\in\Gamma} U(g^{-1}) i\delta(t)\tilde{\delta}(x,x_0) \\
&= i\delta(t)\delta^U(x,x_0).
\end{aligned}$$

Kapitola 4

Jev Aharonova-Bohma

Ahronov-Bohmův jev si můžeme představit následujícím způsobem: Mějme nekonečně dlouhý solenoid protékaný proudem I, který budí uvnitř solenoidu magnetický tok $\Phi = KI$, kde konstanta K závisí na uspřádání solenoidu. Vně solenoidu je magnetické pole nulové. Koherentní svazek elektronů je rozdělen na dva, které obcházejí solenoid z opačných stran. Přestože elektrony neprocházejí magnetickým polem, budou jím ovlivněni. Tento jev je čistě kvantovým jevem, klasická mechanika něco takového nepřipouští.

Konfigurační prostor elektronů budeme volit $M = R^2 - (0,0)$. Na M je nulové magnetické pole, ale nenulový elektromagnetický potenciál $\overrightarrow{A}$.

V klasické kvantové mechanice je Hamiltonián nabité částice v elektromagnetickém poli dán vztahem:

$$H = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A}\right)^2 + e\Phi, \tag{4.1}$$

kde $\overrightarrow{p}$ je operátor hybnosti volné částice, $\overrightarrow{A}$, resp. Φ je vektorový, resp. skalární potenciál elektromagnetického pole. V případě jevu Ahronova-Bohma s jedním solenoidem bude $\overrightarrow{A}$ ve tvaru:

$$\overrightarrow{A} = \frac{\Phi}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)}(-x_2, x_1), \tag{4.2}$$

H bude mít tvar:

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\left[(\partial_1 - ieA_1)^2 + (\partial_2 - ieA_2)^2\right], \tag{4.3}$$

kde $Dom(H) = \{\phi \in AC^2(R^2),\ \text{druhé derivace kvadraticky integrovatelné}\}$.

Přejděme ke sférickým souřadnicím:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

a položme $\alpha = -\frac{e\Phi}{2\pi\hbar}$. Pak bude mít H tvar:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\alpha\right)^2\right). \tag{4.4}$$

Řešíme-li úlohu na vlastní čísla operátoru H, tj. rovnici

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\alpha\right)^2 + k^2\right)\psi = 0,$$

dostáváme obecné řešení

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(im\varphi)[a_m J_{m+\alpha}(kr) + b_m J_{-(m+\alpha)}(kr)], \tag{4.5}$$

kde a_m, b_m, jsou konstatny a $J_{m+\alpha}(kr)$ jsou Besselovy funkce.

Besselovy funkce se záporným indexem mají singularitu pro $r = 0$. Pro $m = 0$ a $\alpha \in]0,1[$ jsou $J_{\pm\alpha}$ kvadraticky integrovatelné s mírou r dr, i pro $m = -1$ jsou $J_{-(m+\alpha)}$ kvadraticky integrovatelné. V ostatních případech nejsou $J_{-|m+\alpha|}$ kvadraticky integrovatelné, a tedy nenáleží do definičního oboru H. Vhodnou volbou okrajových podmínek pro $r = 0$ můžeme vyloučit všechna řešení se singularitou v $r = 0$ a dostáváme pro danou hodnotu energie k^2 řešení ve tvaru

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(im\varphi) c_m(k) J_{|m+\alpha|}(kr). \tag{4.6}$$

Spektrum operátoru H je tedy interval $[0, \infty[$, je čistě absolutně spojité a je nekonečně degenerované. Obecná vlnová funkce bude ve tvaru

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(im\varphi) \int_0^\infty d_m(k) J_{|m+\alpha|}(kr) k \ \mathrm{d}k. \tag{4.7}$$

Poznamenejme na závěr, že $\{J_\beta(kr); k > 0, \beta > 0\}$ je úplný systém zobecněných funkcí v $L^2(R, r\ \mathrm{d}r)$, tj. zobrazení

$$L^2(R_+, k\ \mathrm{d}k) \to L^2(R_+, r\ \mathrm{d}r) : a(k) \to \hat{a}(r) = \int_0^\infty a(k) J_\beta(kr) k\ \mathrm{d}k \tag{4.8}$$

je unitární a

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty |d_m(k)|^2 k\ \mathrm{d}k, \\ H\psi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(im\varphi) \int_0^\infty k^2 d_m(k) J_{|m+\alpha|}(kr) k\ \mathrm{d}k. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Závěr

V této práci jsem se zabývala kvantovým popisem systému více anyonů. V první kapitole jsem uvedla přehled základních definic a pojmů, v druhé jsem ukázala způsob, jak vybudovat kvantovou mechaniku identických částic na nejednoduše souvislé varietě, a to bez použití symetrizačního postulátu. V kvantovém popisu tří a více anyonů je již mnoho otázek vyřešeno, přesto některé zůstávají stále otevřeny. Jednou z nich je najít propagátor pro systém tří a více volných anyonů.

Ve třetí kapitole se zabývám Schulmanovým ansatzem, na jednoduchém příkladě ilustruji jeho použití a snažím se o formální obhájení. Další z otevřených problémů je obhájit Schulmanův ansatz nejen formálně. Tímto směrem se pravděpodobně bude ubírat moje další práce na tomto tématu.

Literatura

[1] P. Šťovíček: Anyons Defined by Boundary Conditions, Proceeding of the Workshop on Singular Schroedinger Operators, Triest (1994)

[2] P.Šťovíček: The Green Function for the Two-Solenoid Aharonov-Bohma Effect, Phys. Lett. A 142,5-10 (1989)

[3] J.M.Leinaas, J. Myrheim: On the Theory of Identical Particals, Il nuovo cimento, Vol. 37 B,N.1, 1-23 (1977)

[4] A. Bóna: Kvantová teória kvazi-dvojrozmerných sústav, Diplomová práce, Fjfi, Čvut v Praze (1997)

[5] A. Lerda: Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics, Springer-Verlag, Berlin (1992)

[6] Y.Ahoronov, D.Bohma: Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, Phys. Rev., Vol. 115, No. 3, 485-491 (1959)

[7] L. Schulman: Techniques and Applications of Path Integration, Wiley Classics Library (1996)

[8] T. Frankel: The Geometry of Physics:An Introduction,Cambridge University Press (2003)

[9] K. H. Cho, Ch. Rim, D. S. Sho: Exact wavefunctions for free anyons: ladder operator approach, Phys. Lett. A 164, 65-69 (1992)