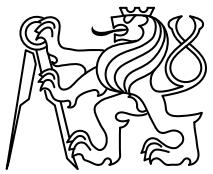
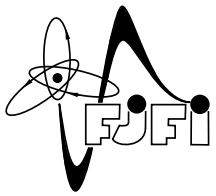
České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Výzkumný úkol



Tomáš Kalvoda

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Geometrická interpretace vázaných a volných stavů

Tomáš Kalvoda

Katedra fyziky
Akademický rok: 2004/2005
Školitel: Prof. Ing. Pavel Šťovíček, DrSc.

Pracovní verze ke dni 7. srpna 2005.

Obsah

Obsah **i**

Úvod **ii**

1 Časově nezávislé systémy **1**
1.1 RAGE věta 1

2 Periodicky časově závislé systémy **5**
2.1 Topologická charakteristika stavů 6
2.2 Geometrická definice vázaných a volných stavů 13
2.3 RAGE rozklad 20
2.4 Harmonický oscilátor, řešitelný případ 22
2.5 Harmonický oscilátor, narušení 27
2.6 Narušení kruhově polarizovanou elektromagnetickou vlnou 31

3 Obecná časová závislost **37**

4 Kvaziperiodický příklad **42**

Dodatky **44**

A Integrace operátorových funkcí **45**

B Floquetův tvar **48**

C Číselně teoretický výsledek **50**

D Kompaktní operátory **53**

E Formy **57**

Rejstřík **60**

Literatura **61**

Úvod

V této práci se seznámím s problematikou charakterizace vázaných a volných stavů v systémech řízených časově nezávislým, či časově závislým T-periodickým Hamiltoniánem. Hlavními zdroji jsou články [VE83] a [dO95].

V první kapitole je dokázána RAGE věta v časově nezávislé situaci. Druhá kapitola se zabývá systémy s T-periodicky časově závislým Hamiltonián. Jsou rozeberány dva způsoby přístupu k vázaným a volným stavům (topologický a geometrický) a je dokázána zobecněná RAGE věta. Dále je zde dokázána platnost RAGE věty za předpokladu stejnoměrné omezenosti potenciálu. Příklady na konci této kapitoly popisují T-periodicky narušený harmonický oscilátor a systém narušený kruhově polarizovanou elektromagnetickou vlnou. Třetí kapitola se zabývá příkladem kvaziperiodicky narušeného harmonického oscilátoru a ukazuje, že i v tomto případě platí rozklady Hilbertova prostoru zkoumané v druhé kapitole. Ve čtvrté kapitole je nastíněna další možnost jak charakterizovat volné a vázané stavy v systémech s obecnou časovou závislostí. Na závěr je uveden příklad z kterého jsou patrny problémy spojené s tímto úsilím.

Pro přehlednost a čitelnost se v textu v případě nebezpečí přílišného odklonění od tématu odvolávám na dodatky uvedené na konci dokumentu. Definice, Věty a pomocná tvrzení jsou v kapitolách pro přehlednost číslována v jednom seznamu. Mé značení většinou odpovída značení používanému v [MR75]. V případě kdy by mohlo dojít k nedorozumnění je čtenář explicitně varován.

Chtěl bych poděkovat svému školiteli Prof. Pavlu Šťovíčkovi za cenné rady a konzultace.

1.
Časově nezávislé systémy

Nejprve zaveďme označení a pojmy používané v této kapitole. Pro normální operátor A na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ označíme bodovou, respektive spojitou část $\mathscr{H}$ následovně

$$\mathscr{H}^{pp}(A) := \overline{\mathrm{span}(A)}, \tag{1.1}$$

$$\mathscr{H}^{cont}(A) := \mathscr{H}^{pp}(A)^{\perp}. \tag{1.2}$$

Ortogonální projektor na $\mathscr{H}^{cont}(A)$ bude označen $P^{cont}(A)$.

Definice 1.1: *Řekneme, že uzavřený operátor C na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ je relativně (lokálně) kompaktní*[1] *vzhledem k samosdruženému operátoru A, právě když je*[2]

$$C(A \ + \imath)^{-1} \tag{1.3}$$

kompaktní.

V případě časově nezávislého systému s Hamiltoniánem H ukážeme, že stavy z $\mathscr{H}^{pp}(H)$ mají prekompaktní trajektorii a stavy z $\mathscr{H}^{cont}(H)$ opustí libovolnou kompaktní množinu v $\mathscr{H}$ (viz tato kapitola a Poznámka 2.23).

1.1 RAGE věta

Věta 1.2 (Ruelle, Amrein, Georgescu, Enss)**:** *Buďte A samosdružený operátor a C relativně kompaktní vzhledem k A. Potom platí*

(a) $\forall \phi \in \mathscr{H}_{cont}(A)$ *je*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|Ce^{-\imath tA}\phi\|^2 \, \mathrm{d}t = 0 \tag{1.4}$$

(b) $\forall \phi \in \mathrm{dom}(A)$ *je*

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|Ce^{-\imath tA}P^{cont}(A)\phi\|^2 \, \mathrm{d}t \leq \varepsilon(T)\|(A+i)\phi\|^2, \tag{1.5}$$

kde $\varepsilon(T) \to 0$ pro $T \to \infty$.

[1] *viz Dodatek D.*

[2] *Symbol $\imath$ značí imaginární jednotku.*

(c) $\forall \phi \in \mathscr{H}_{cont}(A)$ *je*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|Ce^{-\imath tA}\phi\| \, \mathrm{d}t = 0 \tag{1.6}$$

a $\forall \phi \in \mathrm{dom}(A)$ *platí*

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|Ce^{-\imath tA}P^{cont}(A)\phi\| \leq \varepsilon(T)^{1/2}\|(A+\imath)\phi\|. \tag{1.7}$$

Důkaz.

- (b) $\Rightarrow$ (a): Protože A je hustě definovaný je $\overline{\mathrm{dom}(A) \cap \mathscr{H}^{cont}(A)} = \mathscr{H}^{cont}(A)$. Buďte $\phi \in \mathscr{H}^{cont}(A)$ a $T > 0$. Potom existuje $\psi \in \mathrm{dom}(A) \cap \mathscr{H}^{cont}(A)$ tak, že $\|\psi - \phi\| < \frac{1}{T}$. Takže

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|Ce^{-\imath tA}\phi\|^2 \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \|Ce^{-\imath tA}P^{cont}(A)\psi\|^2 \, \mathrm{d}t + \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \|Ce^{-\imath tA}(\phi - \psi)\| \, \mathrm{d}t \leq$$
$$\leq 2\varepsilon(T)\|(A+\imath)\psi\|^2 + 2\|C\|\frac{1}{T^2},$$

  kde jsme použili bod (b). Odtud plyne rovnost (1.4).

- (b), (a) $\Rightarrow$ (c): Rovnost (1.6) plyne z (1.4) ihned pomocí Schwartzovy nerovnosti, rovnost (1.7) potom z (1.5) stejnou cestou.

- (b): Buď $\phi \in \mathrm{dom}(A)$ a označme $P^{cont} \equiv P^{cont}(A)$, protože

$$\|Ce^{-\imath tA}P^{cont}\phi\| = \| \underbrace{C(A+\imath)^{-1}}_{\equiv K,\ \text{kompaktní}} e^{-\imath tA}P^{cont} \underbrace{(A+\imath)\phi}_{\psi\in\mathscr{H}} \|$$

  stačí ukázat nerovnost

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|K \; e^{-\imath tA}P^{cont}\psi\|^2 \, \mathrm{d}t \leq \varepsilon(T)\|\psi\|, \tag{1.8}$$

  kde ε má vlastnosti jako v bodu (b).

  Protože je K kompaktní existují konečnědimenzionální operátor K_0 a omezený D tak, že $K = K_0 + D$, $\|D\| < \frac{1}{T}$. Výraz (1.8) lze potom odhadnout

$$\leq \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \|K_0 e^{-\imath tA}P^{cont}\psi\|^2 \, \mathrm{d}t + 2\|D\|^2\|\psi\|^2.$$

  Druhý člen lze při $T \to \infty$ učinit libovolně malým a je též vidět, že stačí uvažovat jednodimenzionální K. Potom existuje $\eta \in \mathscr{H}$, $\|\eta\| = 1$ tak, že $K = \langle K^*\eta, \cdot\rangle\eta$. Zkoumejme výraz

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|K \; e^{-\imath tA}P^{cont}\psi\|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\langle \underbrace{P^{cont}K^*\eta}_{\in\mathscr{H}^{cont}}, e^{-\imath tA}\psi\rangle|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Dokažme tedy, že

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\langle\phi,e^{-\imath tA\psi}\rangle|^2\,\mathrm{d}t\le\varepsilon(T)\|\psi\|^2,\ \forall\psi\in\mathscr{H},\ \forall\phi\in\mathscr{H}^{cont}(A),\tag{1.9}$$

kde ε je jako v bodu (b).

Protože A je samosdružený operátor existuje rozklad jednotky P_λ tak, že $A=\int\lambda\mathrm{d}P_\lambda$ a[3]

$$\langle\phi,e^{-\imath tA}\psi\rangle=\int_{\mathbb{R}}e^{-\imath t\lambda}\mathrm{d}\underbrace{\langle\phi,P_\lambda\psi\rangle}_{=:\mu_{\phi,\psi}(\lambda)}.$$

Označme ještě $\mu_\phi(\lambda)=\langle\phi,P_\lambda\phi\rangle$. Ukažme, že $\mu_{\phi,\psi}$ je absolutně spojitá vzhledem k μ_ϕ. Buď $M\subset\mathbb{R}$ měřitelná, potom

$$\left|\int\chi_M(\lambda)\mathrm{d}\mu_{\phi,\psi}(\lambda)\right|=|\langle\phi,\chi_M(A)\psi\rangle|\le\|\chi_M(A)\phi\|\|\psi\|=\|\psi\|\big(\langle\chi_M(A)\phi,\chi_M(A)\phi\rangle\big)^{1/2}=$$
$$=\|\psi\|\Big(\int|\chi_M(\lambda)|^2\mathrm{d}\langle\phi,P_\lambda\phi\rangle\Big)^{1/2}=\|\psi\|\Big(\int\chi_M(\lambda)\mathrm{d}\mu_\phi(\lambda)\Big)^{1/2}.$$

Platí tedy implikace $\int_M\mathrm{d}\mu_\phi=0\ \Rightarrow\ \int_M\mathrm{d}\mu_{\phi,\psi}$ a tedy $\mu_{\phi,\psi}$ je absolutně spojitá vzhledem k μ_ϕ. Podle Radon-Nikodymovy věty[4] existuje právě jeden prvek $h\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R},\ \mathrm{d}x)$ tak, že

$$h(\lambda)=\frac{\langle\phi,P_\lambda\psi\rangle}{\langle\phi,P_\lambda\phi\rangle},\ \mathrm{d}\mu_{\phi,\psi}(\lambda)=h(\lambda)\mathrm{d}\mu_\phi(\lambda).$$

Navíc

$$\|h(A)\phi\|^2=\langle\phi,h(A)^*h(A)\phi\rangle=\int|h(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\phi(\lambda)=$$
$$=\int\overline{h(\lambda)}\underbrace{h(\lambda)\mathrm{d}\mu_\phi(\lambda)}_{\mathrm{d}\mu_{\phi,\psi}(\lambda)}=\langle\phi,h(A)^*\psi\rangle\le\|h(A)\phi\|\|\psi\|,$$

tedy $\|h(A)\phi\|\le\|\psi\|$, což lze ještě zapsat ve tvaru

$$\int|h(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\le\|\psi\|^2.\tag{1.10}$$

Proto první výraz v (1.9) upravíme následovně

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\langle\phi,e^{-\imath tA}\psi\rangle|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int e^{-\imath tx}h(x)\mathrm{d}\mu_\phi(x)\right)\left(\int e^{\imath ty}\overline{h(y)}\mathrm{d}\mu_\phi(y)\right)\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{1}{2T}\iint\mathrm{d}\mu_\phi(x)\mathrm{d}\mu_\phi(y)h(x)\overline{h(y)}\underbrace{\int_{-T}^{T}e^{-\imath t(x-y)}\,\mathrm{d}t}_{\frac{1}{x-y}2\sin T(x-y)}\le$$
$$\le\iint\mathrm{d}\mu_\phi(x)\mathrm{d}\mu_\phi(y)|h(x)h(y)|\cdot\left|\frac{\sin\big(T(x-y)\big)}{T(x-y)}\right|.$$

[3] Není-li uvedeno jinak je ve všech dalších integrálech integračním oborem $\mathbb{R}$.
[4] viz [Rud03], Věta 6.10.

Použijeme-li (1.10) a Schwartzovu nerovnost je poslední výraz menší nebo roven

$$\left(\underbrace{\int |h(x)|^2 \mathrm{d}\mu_\phi(x)}_{\leq \|\psi\|^2} \int |h(y)|^2 \mathrm{d}\mu_\phi(y) \right)^{1/2} \times$$

$$\times \underbrace{\left(\int \mathrm{d}\mu_\phi(x) \int \mathrm{d}\mu_\phi(y) \left| \frac{\sin\big(T(x-y)\big)}{T(x-y)} \right|^2 \right)^{1/2}}_{=:\varepsilon(T)} \leq \varepsilon(T) \|\psi\|^2.$$

Dále je

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sin T(x-y)}{T(x-y)} = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x \to y \end{cases},$$

takže

$$\lim_{T\to\infty} \varepsilon(T)^2 = \int \mathrm{d}\mu_\phi(x) \left(\mu_\phi(\{x\})\right) = 0$$

protože je μ_ϕ spojitá ($\phi \in \mathscr{H}^{cont}(A)$) je $\mu_\phi(\{x\}) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

□

Je-li nyní $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$ a $F(|Q| < R)$ je relativně kompaktní vzhledem k samosdruženému H na $\mathscr{H}$ pro libovlné $R > 0$, potom RAGE věta tvrdí, že pro $\psi \in \mathscr{H}^{cont}(H)$ je

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|F(|Q| < R) e^{-\imath t H} \phi\|^2 \, \mathrm{d}t = 0,\ \forall R > 0.$$

Stavy z $\mathscr{H}^{cont} H$ lze tedy považovat za volné, neboť střední časová hodnota naměření polohy v kouli o poloměru R je rovna 0 pro libovolně veliké R. Z Poznámka 2.23 pak dále vyplývá, že stavy z $\mathscr{H}^{pp}(H)$ lze považovat za vázané.

2.
Periodicky časově závislé systémy

V celé této kapitole uvažujeme T-periodickou časovou závislost. Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ systému nechť je separabilní. Předpokládáme T-periodický Hamiltonián a existenci unitárního silně spojitého propagátoru $U(t,s)$.

Následující věta (viz [MR75], Theorem X.70) dává postačující podmínky pro existenci unitárního propagátoru.

Věta 2.1: *Buď $H(t)$ operátorová funkce taková, že*

(i) $H(t)$ je samosdružený pro všechna $t \in \mathbb{R}$,

(ii) definiční obor $\mathscr{D} = H(t)$ je nezávislý na t,

(iii) funkci

$$\mathbb{R}^2 \ni (t,s) \mapsto (t-s)^{-1}\left((H(t)+\imath)(H(s)+\imath)^{-1}-1\right)$$

lze rozšířit na silně spojitou omezenou operátorovou funkci na $\mathbb{R}^2$.

Potom existuje právě jeden unitární propagátor U splňující

$$U(t,r)U(r,s) = U(t,s),\ \forall r,s,t \in \mathbb{R},$$
$$U(t,t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

takový, že $\mathscr{D}$ je $U(t,s)$-invariantní pro libovolné t,s a platí

$$\imath\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\psi = H(t)U(t,s)\psi,\ \forall \psi \in \mathscr{D}. \tag{2.1}$$

Je-li navíc jako v našem případě Hamiltonián T-periodický lze snadno ověřit (díky jednoznačnosti zaručené výše uvedenou větou), že

$$U(t+T,s+T) = U(t,s),$$
$$U(t+nT,s) = U(t,s)\left[U(s+T,s)\right]^n,$$

pro libovolná $s,t \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$. Operátor $U(s+T,s)$ se nazývá Floquetův operátor, nebo též operátor monodromie. T-periodický propagátor lze psát ve Floquetově tvaru

$$U(t,0) = P(t)e^{-\imath Gt},$$

kde G je samosdružený operátor (není dán jednoznačně, viz Dodatek B) a $P(t)$ je silně spojitá T-periodická operátorová funkce splňující $P(0) = P(nT) = 1$ pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$.

2.1 Topologická charakteristika stavů

V T-periodickém případě nemá velký význam rozklad na bodovou a spojitou část Hilbertova prostoru podle operátoru $H(t)$ (viz (1.1)). Ukážeme že namísto toho je vhodné rozložit Hilbertův prostor pomocí operátoru monodromie

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}^{pp}(U(T,0)) \oplus \mathscr{H}^{cont}(U(T,0)) \tag{2.2}$$

a ukážeme že stavy z bodové části respektive ze spojité části se dají interpretovat jako vázané respektive volné stavy. Hlavním výsledkem této kapitoly jsou Věty 2.8 a 2.9, které společně tvrdí, že pro T-periodický propagátor platí

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^f_\pm &= \mathscr{H}^{cont}(U(T,0)),\\ \mathscr{H}^p_\pm &= \mathscr{H}^p_\pm(U(T,0)),\end{aligned}$$

tedy že stavy z bodové respektive spojité části se dají interpretovat jako vázané respektive volné stavy systému. Nejprve definujme potřebné pojmy.

Definice 2.2: *Vektor ψ patří do množiny $\mathscr{H}^p_\pm$, právě když je množina $\{U(t,0)\psi | t \gtrless 0\}$ prekompaktní.*

Definice 2.3: *Řekneme, že vektor ψ patří do množiny $\mathscr{H}^f_\pm$, právě když*

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|K\ U(t,0)\psi\|^2 \ \mathrm{d}t = 0, \tag{2.3}$$

pro libovolný kompaktní operátor K.

Trajektorie $\{\psi(t) | t \gtrless 0\}$ stavu $\psi \in \mathscr{H}^p_\pm$ je prekompaktní, tedy přibližně konečnědimenzionální. Naproti tomu libovolný stav z $\mathscr{H}^f_\pm$ opustí každou konečnědimenzionální množinu. Odtud plyne interpretace množiny $\mathscr{H}^p_\pm$ respektive $\mathscr{H}^f_\pm$ jako množin vázaných respektive volných stavů. Poznamenejme ještě, že v případě kdy budeme pracovat s více propagátory označíme $\mathscr{H}^p_\pm(U)$ a $\mathscr{H}^f_\pm(U)$ množiny příslušné propagátoru U. Obě množiny tvoří ortogonální uzavřené podprostory. Skutečně, platí totiž následující lemma a tvrzení.

Lemma 2.4: *Buď $M \subset \mathscr{H}$ prekompaktní množina. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečnědimenzionální projektor C takový, že $(1-C)M \subset B_\varepsilon$.*

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-síť množiny M (označme ji $\{x_i\}_{i=1}^n$). Buď C ortogonální projektor na lineární obal této $\frac{\varepsilon}{2}$-sítě. Buď $y \in M$ libovolné, potom existuje $i \in \hat{n}$ tak, že $\|x_i - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom

$$\|Cy - y\| \leq \underbrace{\|Cy - x_i\|}_{=\|C(y-x_i)\| \leq \varepsilon/2} + \|x_i - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Jinými slovy $Cy \in B_\varepsilon$ pro libovolné $y \in M$. □

Věta 2.5: *Platí*

(i) Pro $\psi \in \mathscr{H}_{\pm}^{f}(U)$ a libovolný kompaktní operátor K je

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|K\ U(t,0)\psi\|\ \mathrm{d}t = 0.$$

(ii) $\mathscr{H}_{\pm}^{f}(U)$ a $\mathscr{H}_{\pm}^{p}(U)$ jsou uzavřené ortogonální podprostory $\mathscr{H}$.

Důkaz. (i) Buďte $\psi \in \mathscr{H}_{\pm}^{f}(U)$, K kompaktní operátor a $\tau > 0$ libovolné. Potom dle Schwartzovy nerovnosti je

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|K\ U(t,0)\psi\|\ \mathrm{d}t \le \left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|KU(t,0)\psi\|^2\ \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Čímž je dokázán bod (i).

(ii) Obě zkoumané množiny jsou zřejmě lineární podprostory. Nejprve ukažme uzavřenost $\mathscr{H}_{\pm}^{f}(U)$. Buďte $\phi \in \overline{\mathscr{H}_{\pm}^{f}(U)}$, $\varepsilon > 0$ a K libovolný kompaktní operátor. Potom existuje $\psi \in \mathscr{H}_{\pm}^{f}(U)$ takové, že $\|\psi - \phi\| < \varepsilon$. Tedy

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|KU(t,0)\phi\|^2\ \mathrm{d}t &\le \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\|KU(t,0)(\phi-\psi)\| + \|KU(t,0)\psi\|)^2\\ &\le \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\|K\|\cdot\|\phi-\psi\| + \|KU(t,0)\psi\|)^2\\ &\le \|K\|^2\|\phi-\psi\|^2 + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|KU(t,0)\psi\|^2 + 2\|K\|^2\|\psi\|\cdot\|\phi-\psi\|.\end{aligned}$$

Tento výraz lze učinit libovolně malý pro τ dostatečně velké a tedy $\phi \in \mathscr{H}_{\pm}^{f}(U)$, čímž je dokázána uzavřenost $\mathscr{H}_{\pm}^{f}(U)$.

Podobně se dokáže uzavřenost $\mathscr{H}_{\pm}^{p}(U)$. Buďte $\phi \in \overline{\mathscr{H}_{\pm}^{p}(U)}$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\psi \in \mathscr{H}_{\pm}^{p}(U)$ tak, že $\|\psi - \phi\| < \varepsilon$. Potom

$$\{U(t,0)\phi | t \gtrless 0\} \subset \{U(t,0)(\phi-\psi) | t \gtrless 0\} + \{U(t,0)\psi | t \gtrless 0\}. \tag{2.4}$$

První množina na pravé straně (2.4) je libovolně malá a druhá je prekompaktní. Proto je množina na levé straně (2.4) též prekompaktní. Skutečně. Je-li $N = \{x_i\}_{i=1}^n$ konečná ε-síť množiny $\{U(t,0)\psi | t \gtrless 0\}$, existuje $i \in \hat{n}$ tak, že pro dané $t \gtrless 0$ je

$$\|U(t,0)\psi - x_i\| < \varepsilon.$$

Potom

$$\|U(t,0)\phi - x_i\| \le \|\phi-\psi\| + \|U(t,0)\psi - x_i\| < 2\varepsilon.$$

Množina N je tedy zároveň konečná 2ε-síť množiny $\{U(t,0)\phi | t \gtrless 0\}$ a proto je tato prekompaktní. $\mathscr{H}_{\pm}^{p}(U)$ je tedy uzavřený podprostor.

Buďte nyní $\varphi \in \mathscr{H}_{\pm}^{f}(U)$ a $\eta \in \mathscr{H}_{\pm}^{p}(U)$. Potom

$$|\langle \varphi, \eta \rangle| = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |\langle U(t,0)\varphi, U(t,0)\eta \rangle| \, \mathrm{d}t.$$

Podle Lemmatu 2.4 existuje pro libovolné $\varepsilon > 0$ konečnědimenzionální projektor P_ϵ takový, že $P_\epsilon U(t,0)\eta \in B_\varepsilon$ pro libovolné $t \gtrless 0$. Tedy

$$\begin{aligned}
|\langle \varphi, \eta \rangle| &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |\langle P_\epsilon U(t,0)\varphi, U(t,0)\eta \rangle| \, \mathrm{d}t + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |\langle U(t,0)\varphi, (1-P_\epsilon)U(t,0)\eta \rangle| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \|\eta\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|P_\epsilon U(t,0)\varphi\| \, \mathrm{d}t + \|\varphi\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|(1-P_\epsilon)U(t,0)\eta\| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \|\eta\|\varepsilon + \|\varphi\|\varepsilon,
\end{aligned}$$

díky bodu (i) v Tvrzení 2.5. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, byla ověřena ortogonalita. □

Dalším krokem je dokázat platnost slíbeného rozkladu Hilbertova prostoru $\mathscr{H}$ v případě že máme T-periodický propagátor. Za tímto účelem nejprve dokažme následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.6: *Buďte $U(t,s)$ T-periodický propagátor a P^{cont} ortogonální projektor na podprostor $\mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$. Potom pro libovolný kompaktní operátor C platí*

$$\lim_{|\tau|\to\infty} \left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U^*(t,0)CU(t,0)P^{cont} \, \mathrm{d}t \right\| = 0. \tag{2.5}$$

Důkaz. Buď $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau = \sigma + nT$, $\sigma \in [0,T)$. Potom

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U^*(t,0)CU(t,0)P^{cont} \, \mathrm{d}t \right\| \leq \frac{\sigma}{\tau}\|C\| + \left\| \frac{1}{nT} \int_0^{nT} U^*(t,0)CU(t,0)P^{cont} \, \mathrm{d}t \right\| \tag{2.6}$$

První člen konverguje k nule při $\tau \to \infty$, neboť $\sigma < T$. Výraz v normě v druhém sčítanci upravíme následovně

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{T} \int_{jT}^{(j+1)T} U^*(t,0)CU(t,0)P^{cont} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{T} \int_0^T U^*(t+jT,0)CU(t+jT,0) \, \mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

Protože U je T-periodický platí

$$\begin{aligned}
U(t+jT,0) &= U(t,0)[U(T,0)]^j, \\
U(t+jT,0)^* &= [U(T,0)^*]^j U(t,0)^*.
\end{aligned}$$

Proto je (2.7) rovno

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^*(T,0)^j \underbrace{\left(\frac{1}{T}\int_0^T U^*(t,0)CU(t,0)\ \mathrm{d}t\right)}_{C'} U(T,0)^j P^{cont}.$$

Operátor C' je opět kompaktní [1] a lze ho proto libovolně přesně aproximovat konečnědimenzionálním operátorem. Přesněji existují operátory C'_0 a D tak, že C'_0 je konečnědimenzionální a $C' = C'_0 + D$, $\|D\| < \frac{1}{\tau}$. Potom druhý člen v (2.6) lze odhadnout výrazem

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^*(T,0)^j C'_0 U(T,0)^j P^{cont} \right\| + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\|D\|}_{<\frac{1}{\tau}}.$$

Bez újmy na obecnosti stačí uvažovat místo konečnědimenzionálního C' jednodimenzionální operátor C''. Potom existují $\psi, \phi \in \mathscr{H}$, $\|\psi\| = 1$ tak, že

$$C'' = \langle\phi, \cdot\rangle\psi,\ C''^* = \langle\psi, \cdot\rangle\phi.$$

Dále si uvědomme, že pro A omezený platí

$$\|AA^*\| = \sup_{\|\varphi\|=1}\langle\varphi, AA^*\varphi\rangle = \sup_{\|\varphi\|=1}\|A^*\varphi\|^2 = \|A^*\|^2 = \|A\|^2.$$

Zvolíme-li nyní za $A = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^*(T,0)^j C'' U(T,0)^j P^{cont}$, potom pro libovolné $\eta \in \mathscr{H}$ je

$$A^*\eta = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P^{cont}U^*(T,0)^j\langle\psi, U(T,0)^j\eta\rangle\phi.$$

Tedy

$$AA^*\eta = \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=0}^{n-1}\langle\psi, U(T,0)^k\eta\rangle\langle\phi, U(T,0)P^{cont}U^*(T,0)^k\phi\rangle U^*(T,0)^j\psi,$$

protože $U(T,0)$ a P^{cont} spolu komutují. Pro normu tohoto výrazu dostáváme odhad

$$\|AA^*\eta\| \le \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=0}^{n-1}\left|\langle P^{cont}\phi, U(T,0)^j U^*(T,0)^k P^{cont}\phi\rangle\right| \|\eta\|.$$

Pro druhý člen v (2.6) konečně dostáváme odhad

$$\|A\|^2 = \|AA^*\| \le \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=0}^{n-1}\left|\langle P^{cont}\phi, U(T,0)^{j-k}P^{cont}\phi\rangle\right| \le \tag{2.8}$$

$$\le \left\{\frac{1}{n^2}\sum_{j,k=0}^{n-1}\left|\langle P^{cont}\phi, U(T,0)^{j-k}, P^{cont}\Phi\rangle\right|^2\right\}^{1/2}. \tag{2.9}$$

[1] viz Lemma A.4

Zřejmě dále stačí uvažovat pouze $\phi \in \mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$. Použijme spektrální teorém pro unitární operátory na operátor monodromie. Potom existuje rozklad jednotky (na jednotkové kružnici v komplexní rovině) $E(\lambda)$ tak, že

$$U(T,0) = \int_0^{2\pi} e^{\imath\lambda} \mathrm{d}E(\lambda).$$

Označme dále $\nu_\phi(\lambda) := \langle \phi, E(\lambda)\phi \rangle$. Potom platí

$$\langle \phi, f(U(T,0))\phi \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{\imath\lambda}) \mathrm{d}\nu_\phi(\lambda)$$

pro měřitelnou f.

Pokračujme v odhadu výrazu v (2.8)

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j,k=0}^{n-1} \left| \langle \phi, U(T,0)^{j-k}\phi \rangle \right| = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\imath j(\lambda-\mu)} \right|^2}_{f_n(\lambda-\mu)} \mathrm{d}\nu_\phi(\lambda)\mathrm{d}\nu_\phi(\mu). \tag{2.10}$$

Sumu v posledním výrazu lze snadno sečíst

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{\imath j(\lambda-\mu)} = \frac{1 - e^{\imath n(\lambda-\mu)}}{1 - e^{\imath(\lambda-\mu)}}.$$

Proto

$$f_n(x) = \left| \frac{1}{n} \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right|^2.$$

Matematickou indukcí lze ověřit, že pro všechna přirozená n a pro všechna reálná x jest

$$\left| \frac{\sin nx}{n \sin x} \right| \leq 1.$$

Z toho plyne, že i $f_n(\lambda-\mu) \leq 1$, navíc zřejmě

$$f_n(\lambda-\mu) \leq \frac{1}{n^2 \sin^2 x},$$

kde $\lambda, \mu \in [0, 2\pi]$ a $x = \frac{\lambda-\mu}{2} \in [-\pi, \pi]$. Zvolme $\delta \in (0, 2\pi)$. Potom pro x taková, že $|\frac{x}{2} - \pi k| > \frac{1}{2}\delta$, $k = 1, 0, 1$ je $\sin^2 x \geq C_\delta > 0$. Tedy

$$\frac{1}{n^2 \sin^2 x} \leq \frac{\mathrm{const}(\delta)}{n^2}, \quad \text{pro } x \in \left[-\pi + \frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2}\right] \cup \left[\frac{\delta}{2}, \pi - \frac{\delta}{2}\right].$$

Celkem lze tedy říci, že pro taková λ, μ je

$$|f_n(\lambda-\mu)| \leq \frac{\mathrm{const}(\delta)}{n^2}.$$

Takže pro (2.10) lze psát

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(\lambda-\mu)\mathrm{d}\nu_\phi(\lambda)\mathrm{d}\nu_\phi(\mu) = \sum_{k=-1}^{1}\left\{ \iint\limits_{|\lambda-\mu-2k\pi|<\delta} f_n(\lambda-\mu)\mathrm{d}\nu_\phi(\lambda)\mathrm{d}\nu_\phi(\mu) + \right. \tag{2.11}$$

$$\left. + \underbrace{\iint\limits_{|\lambda-\mu-2k\pi|>\delta} f_n(\lambda-\mu)\mathrm{d}\nu_\phi(\lambda)\mathrm{d}\nu_\phi(\mu)}_{\leq \frac{\mathrm{const}(\delta)}{n^2}} \right\}. \tag{2.12}$$

Dodefinujeme-li přirozeně $E(\lambda)=0$ pro $\lambda<0$ a $E(\lambda)=I$ pro $\lambda>2\pi$ je první člen ve složené závorce menší nebo roven

$$\iint\limits_{|\lambda-\mu-2k\pi|<\delta} \mathrm{d}\nu_\phi(\lambda)\mathrm{d}\nu_\phi(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\nu_\phi(\lambda)\left(\int\limits_{|\lambda-\mu-2k\pi|<\delta} \mathrm{d}\nu_\phi(\mu)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\nu_\phi(\lambda)\Big[\nu_\phi(\mu)\Big]_{\lambda-2k\pi-\delta}^{\lambda-2k\pi+\delta}.$$

Druhý člen v (2.11) při $n\to\infty$ konverguje k nule. Odhad f_n jsme prováděli pro libovolně malé $\delta>0$ a protože $\phi\in\mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$ je funkce $\lambda\mapsto\langle\phi,E(\lambda)\phi\rangle$ spojitá je

$$\lim_{\delta\to0}\left[\nu_\phi(\mu)\right]_{\lambda-2k\pi-\delta}^{\lambda-2k\pi+\delta}=0.$$

Čili platí tvrzení lemmatu. □

Důsledek 2.7: *Buď C kompaktní operátor a $\psi\in\mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$, potom*

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|CU(t,0)\psi\|\ \mathrm{d}t \leq f(\tau)\|\psi\|, \tag{2.13}$$

kde $f(\tau)\to0$ když $|\tau|\to\infty$.

Důkaz. Dle Schwarzovy nerovnosti a Poznámce A.2 je pro $\psi\in\mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$

$$\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|CU(t,0)\psi\|\ \mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|CU(t,0)\psi\|^2\ \mathrm{d}t =$$

$$= \left\langle \psi, \frac{1}{\tau}\int_0^\tau U^*(t,0)C^*CU(t,0)P^{cont}\ \mathrm{d}t\psi\right\rangle \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{\tau}\int_0^\tau U^*(t,0)C^*CU(t,0)P^{cont}\ \mathrm{d}t\right\| \|\psi\|^2 \equiv f^2(\tau)\|\psi\|^2.$$

Protože je operátor C^*C kompaktní, plyne z předchozího lemmatu že $\lim_{|\tau|\to\infty} f(\tau)=0$. □

Věta 2.8: *Buď $U(t,s)$ T-periodický unitární propagátor, potom*

$$\mathscr{H}_\pm^p = \mathscr{H}^{pp}(U(T,0)). \tag{2.14}$$

Důkaz. Ukažme obě inkluze.

- $\mathscr{H}^{pp}(U(T,0)) \subset \mathscr{H}^p_\pm$: Buď ψ vlastní vektor $U(T,0)$. Tj. nechť existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $U(T,0)\psi = e^{-i\alpha}\psi$. Potom je množina

$$\left\{U(t,0)\psi \middle| t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{e^{-in(t)\alpha}U(\sigma,0)\psi \middle| t = \sigma + nT \in \mathbb{R},\ \sigma \in [0,T)\right\}$$

  podmnožinou množiny $M = S_1 \cdot \{U(t,0)\psi | t \in [0,T]\}$. Protože je zobrazení $t \mapsto U(t,0)\psi : [0,T] \to \mathscr{H}$ spojité a interval $[0,T]$ kompaktní je množina M kompaktní. Odtud plyne že konečná lineární kombinace vlastních vektorů Floquetova operátoru leží v $\mathscr{H}^p_\pm$, neboť konečné sjednocení kompaktních množin je množina kompaktní. Konečně z faktu, že $\mathscr{H}^{pp}(U(T,0))$ je uzavřený podprostor, plyne hledaná inkluze.

- $\mathscr{H}^p_\pm \subset \mathscr{H}^{pp}(U(T,0))$: Buďte $\phi \in \mathscr{H}^p_+,\ \|\phi\| = 1$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom je množina $M = \{U(t,0)\phi | t > 0\}$ prekompaktní a podle Lemmatu 2.4 tedy existuje konečnědimenzionální projektor C takový, že $(C-1)M \subset B_\varepsilon$. Potom

$$\sup_{t>0} \|(C-1)U(t,0)\phi\| < \varepsilon.$$

  Pro $\psi \in \mathscr{H}^{cont}(U(T,0)),\ \|\psi\| = 1$ podle Důsledku 2.7 existuje $\tau > 0$ takové[2], že

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|CU(t,0)\psi\| \,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

  Takže musí existovat $t_\varepsilon < \tau$ splňující

$$\int_0^\tau \|CU(t,0)\psi\| \,\mathrm{d}t = \tau\|CU(t_\varepsilon,0)\psi\|,$$

  odkud $\|CU(t_\varepsilon,0)\psi\| < \varepsilon$. Potom

$$\begin{aligned}|\langle\phi,\psi\rangle| &= |\langle U(t_\varepsilon,0)\phi, U(t_\varepsilon,0)\psi\rangle| = \\ &= |\langle(1-C)U(t_\varepsilon,0)\phi, U(t_\varepsilon,0)\psi\rangle + \langle U(t_\varepsilon,0)\phi, CU(t_\varepsilon,0)\psi\rangle| \leq \\ &\leq \|(1-C)U(t_\varepsilon,0)\phi\| + \|CU(t_\varepsilon,0)\psi\| \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

  ε lze volit libovolně malé, proto

$$\mathscr{H}^p_\pm \perp \mathscr{H}^{cont}(U(T,0)).$$

  Ale podle definice je $\mathscr{H} = \mathscr{H}^{pp}(U(T,0)) \oplus \mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$, tedy musí být $\mathscr{H}^p_\pm \subset \mathscr{H}^{pp}(U(T,0))$.

□

Věta 2.9: *Buď U T-periodický propagátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Potom*

$$\mathscr{H}^f_\pm(U) = \mathscr{H}^{cont}U(T,0), \tag{2.15}$$

navíc $\mathscr{H} = \mathscr{H}^p_\pm(U) \oplus \mathscr{H}^f_\pm(U)$.

[2] C je konečnědimenzionální a tedy je také kompaktní.

Důkaz. Podle Věty 2.5 a Věty 2.8 již víme, že $\mathscr{H}^f_\pm(U) \subset \mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$. Ukažme opačnou inkluzi. Buďte $\psi \in \mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$ a K kompaktní operátor. Potom

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|KU(t,0)\psi\|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \langle U(t,0)\psi, K^*KU(t,0)\psi\rangle \,\mathrm{d}t \le \|\psi\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|K^*KU(t,0)\psi\| \,\mathrm{d}t \to 0$$

při $\tau \to \infty$, protože K^*K je kompaktní a platí Důsledek 2.7.

Rozklad Hilbertova prostoru je zřejmý důsledek definice bodové a spojité části. □

2.2 Geometrická definice vázaných a volných stavů

V této podkapitole ukážeme jiný způsob jak charakterizovat vektory v rozkladu Hilbertova prostoru $\mathscr{H}$ (2.2). Hlavním výsledkem je pak Věta 2.16.

Buď $\{P_r\}_{r\ge 0}$ systém omezených lineárních operátorů na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ splňující následující podmínky

$$P_r = P_r^*, \quad \|P_r\| \le 1 \quad \text{a} \quad \operatorname*{s-lim}_{r\to\infty} P_r = 1. \tag{2.16}$$

V případě $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$ lze za $\{P_r\}$ volit například systém ortogonálních projektorů $\{F(|Q| < R)\}$.

Definice 2.10: *Vektor $\psi \in \mathscr{M}^{bd}_\pm(P)$, právě když*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{t\gtrless 0} \|(1-P_r)U(t,0)\psi\| = 0. \tag{2.17}$$

Množinu $\mathscr{M}^{bd}_\pm$ nazýváme množinou geometricky omezených stavů.

Definice přirozeně závisí na naší volbě systému P_r. V případě $P_R = F(|Q| < R)$ stav $\psi \in \mathscr{M}^{bd}_\pm$ zůstává během svého časového vývoje geometricky omezen. Pokud uvažujeme systém $\{F(|Q| < R)\}$ na nějakém $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$ budeme zkráceně psát pouze $\mathscr{M}^{bd}_\pm$. Stejně pak i pro množinu geometricky neomezených stavů definovanou níže. Ukažme nejprve základní vlastnosti $\mathscr{M}^{bd}_\pm(P)$. Poznamenejme, že v důkazu následující věty není potřeba T-periodicity propagátoru U.

Věta 2.11: *Množiny $\mathscr{M}^{bd}_\pm(P)$ jsou uzavřené podprostory a platí inkluze $\mathscr{H}^p_\pm \subset \mathscr{M}^{bd}_\pm(P)$.*

Důkaz. $\mathscr{M}^{bd}_\pm(P)$ zřejmě tvoří lineární podprostory. Dokažme uzavřenost. Buď $\psi \in \overline{\mathscr{M}^{bd}_\pm(P)}$, potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\phi \in \mathscr{M}^{bd}_\pm(P)$ tak, že $\|\psi - \phi\| < \varepsilon$. Potom

$$\|(1-P_r)U(t,0)\psi\| \le \underbrace{\|(1-P_r)U(t,0)(\psi-\phi)\|}_{\le 2\varepsilon} + \|(1-P_r)U(t,0)\phi\|.$$

Protože $\varepsilon > 0$ lze volit libovolně malé a $\phi \in \mathscr{M}^{bd}_\pm(P)$ je $\psi \in \mathscr{M}^{bd}_\pm(P)$.

Buď nyní $\psi \in \mathscr{H}^p_\pm$, potom pro dané $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť $N = \{x_i\}_{i=1}^n$ množiny $\{U(t,0)\psi | t \gtrless 0\}$. Takže pro dané t existuje i takové, že platí $\|x_i - U(t,0)\psi\| < \varepsilon$. Pro všechna i existuje $r_0(i)$ takové, že $\forall r > r_0(i)$ je $\|(1-P_r)x_i\| < \varepsilon$ Neboť $\operatorname{s-lim}_{r\to\infty} P_r = 1$. Potom pro libovolné pevné t je

$$\|(1-P_r)U(t,0)\psi\| \le \|(1-P_r)x_i\| + \|(1-P_r)(U(t,0)\psi - x_i)\| \le \varepsilon + 2\varepsilon.$$

Celkem tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $r_0(i)$ tak že $\forall r > r_0(i)$ je $\sup_{t\gtrless 0}\|(1-P_r)U(t,0)\psi\| < 3\varepsilon$. Takže $\psi \in \mathscr{M}^{bd}_\pm(P)$. □

Opačná inkluze platí pouze v případě, že naložíme dodatečnou podmínku na propagátor U.

Definice 2.12: *Řekneme, že systém P_r je relativně kompaktní vzhledem k U v $\pm\infty$ (stručněji $\pm U$-kompaktní) pokud je množina*

$$\{P_r U(t,0)\psi | t \lessgtr 0\} \tag{2.18}$$

prekompaktní v $\mathscr{H}$ pro libovolné r a pro všechna $\psi \in \mathscr{H}$.

Věta 2.13: *Buď U propagátor na $\mathscr{H}$ a nechť systém P_r je $\pm U$-kompaktní. Potom*

$$\mathscr{M}_{\pm}^{bd}(P) = \mathscr{H}_{\pm}^{p}. \tag{2.19}$$

Důkaz. Chybí dokázat inkluzi $\mathscr{M}_{\pm}^{bd}(P) \subset \mathscr{H}_{\pm}^{p}$. Buď $\psi \in \mathscr{M}_{\pm}^{bd}(P)$ potom

$$\{U(t,0)\psi | t \gtrless 0\} \subset \{P_r U(t,0)\psi | t \gtrless 0\} + \{(1-P_r)U(t,0)\psi | t \gtrless 0\}.$$

Podle předpokladu je první množina na pravé straně poslední rovnice prekompaktní a druhá libovolně malá, neboť r lze volit libovolně. Takže levá strana je též prekompaktní (viz důkaz Věty 2.5 (ii)) □

Nyní definujme množinu, kterou budeme interpretovat jako množinu volných stavů.

Definice 2.14: *Řekneme že $\psi \in \mathscr{M}_{\pm}^{f}(P)$, právě když*

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \|P_r U(t,0)\psi\| \, \mathrm{d}t = 0, \ \forall r \geq 0. \tag{2.20}$$

Množinu $\mathscr{M}_{\pm}^{f}(P)$ nazýváme množinou geometricky neomezených stavů.

V případě $P_R = F(|Q| < R)$ je pro $\psi \in \mathscr{M}_{\pm}^{f}$ střední časová hodnota naměření polohy v kouli o libovolném poloměru R rovna nule, jinými slovy stav opustí libovolnou geometricky omezenou oblast.

Věta 2.15: *Množiny $\mathscr{M}_{\pm}^{f}(P)$ tvoří uzavřené podprostory ortogonální k $\mathscr{M}_{\pm}^{bd}(P)$, tj.*

$$\mathscr{M}_{\pm}^{f}(P) \perp \mathscr{M}_{\pm}^{bd}(P) \tag{2.21}$$

Důkaz. Linearita a uzavřenost je zřejmá. Buďte $\psi \in \mathscr{M}_{\pm}^{f}(P)$ a $\phi \in \mathscr{M}_{\pm}^{bd}(P)$, $\|\psi\| = \|\phi\| = 1$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \|P_r U(t,0)\psi\| \, \mathrm{d}t = 0$$

existuje t_ε tak, že $\|P_r U(t_\varepsilon,0)\psi\| < \varepsilon$. A existuje $r > 0$ tak, že $\sup_{t\gtrless 0} \|(1-P_r)U(t,0)\psi\| < \varepsilon$. Potom

$$|\langle\psi,\phi\rangle| \leq \|P_r U(t,0)\psi\| + \sup_{t\gtrless 0} \|(1-P_r)U(t,0)\phi\| < 2\varepsilon.$$

Proto platí (2.21). □

Nyní již snadno dokážeme hlavní výsledek této kapitoly.

Věta 2.16 (Abstraktní RAGE věta)**:** *Buď U unitární T-periodický propagátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Nechť systém P_r je $\pm U$-kompaktní. Potom*

$$\mathscr{M}_{\pm}^{f}(P) = \mathscr{H}^{cont}(U(T,0)), \tag{2.22}$$

$$\mathscr{M}_{\pm}^{bd}(P) = \mathscr{H}^{pp}(U(T,0)). \tag{2.23}$$

Navíc

$$\mathscr{M}_{\pm}^{f}(P) \oplus \mathscr{M}_{\pm}^{bd} = \mathscr{H}. \tag{2.24}$$

Důkaz. Buďte $\psi \in \mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$, $\varepsilon > 0$ a r libovolné. Podle předpokladu je množina $\{P_r U(t,0)\psi | t \gtrless 0\}$ prekompaktní a tak dle Lemmatu 2.4 existuje konečnědimenzionální projektor P_ϵ takový, že

$$\sup_{t \gtrless 0} \|(1-P_\epsilon)P_r U(t,0)\psi\| < \varepsilon.$$

Potom

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|P_r U(t,0)\psi\| \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \underbrace{\|(1-P_\epsilon)P_r U(t,0)\psi\|}_{\leq \varepsilon} \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|P_\epsilon P_r U(t,0)\psi\|. \tag{2.25}$$

Operátor $P_\epsilon P_r$ je kompaktní a podle Důsledku 2.7 je pro τ dostatečně velké druhý člen v posledním výraze též menší než ε. Proto $\psi \in \mathscr{M}_{\pm}^{f}(P)$ a platí tedy inkluze $\mathscr{H}^{cont}(U(T,0)) \subset \mathscr{M}_{\pm}^{f}(P)$.

Avšak podle Věty 2.8 a 2.13 je

$$\mathscr{H}^{pp}(U(T,0)) \overset{2.8}{=} \mathscr{H}_{\pm}^{p} \overset{2.13}{=} \mathscr{M}_{\pm}^{bd}(P) \perp \mathscr{M}_{\pm}^{f}(P)$$

a tedy nutně $\mathscr{M}_{\pm}^{f}(P) \subset \mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$. Čili jsme dokázali (2.22). Platnost rozkladu (2.24) plyne z definice bodové a spojité části $\mathscr{H}$. □

Podmínku U-kompaktnosti, za které platí abstraktní RAGE věta 2.16, není v konkrétních případech lehké ověřit. V případě $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$ je však implikována následující vlastností propagátoru U.

Definice 2.17: *Řekneme, že propagátor U má časově omezenou energii H_1 v $\pm\infty$, právě když existuje hustá množina S taková, že pro všechna $\psi \in S$ je*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{t \gtrless 0} \|F(|H_1| > \lambda)U(t,0)\psi\| = 0, \tag{2.26}$$

kde H_1 je nějaký samosdružený operátor. Typicky například kinetická energie H_0.

Lemma 2.18: *U má časově omezenou energii H_1 právě tehdy, když*

$$M := \sup_{t \gtrless 0} \|f(H_1)U(t,0)\psi\| < \infty \tag{2.27}$$

pro všechna $\psi \in S$ a libovolnou reálnou nezápornou funkci [3] f takovou, že

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = \infty. \tag{2.28}$$

[3] *f může záviset na ψ.*

Důkaz. $\Leftarrow$: Nechť platí (2.27). Potom pro všechna $\psi \in S$ je

$$\infty > K \ \geq \sup_{t \gtrless 0} \|f(H_1)F(|H_1| > \lambda)U(t,0)\psi\| \geq \inf_{|x|>\lambda} f(x) \cdot \sup_{t \gtrless 0} \|F(|H_1| > \lambda)U(t,0)\psi\|.$$

Tedy

$$\sup_{t \gtrless 0} \|F(|H_1| > \lambda)U(t,0)\psi\| \leq \frac{K}{\inf_{|x|>\lambda} f(x)} \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0.$$

$\Rightarrow$: Díky platnosti 2.26 lze volit posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že

$$\sup_{t \gtrless 0} \|F(|H_1| > \lambda_n)U(t,0)\psi\| \leq 2^{-n-1}\|\psi\|, \ \lambda_1 = 0,$$

pro $\psi \in S$ z totální množiny. Definujme $f(\lambda) := n$ pro $\lambda_{n-1} \leq |\lambda| \leq \lambda_n$. Potom

$$\sup_{t \gtrless 0} \|f(H_1)U(t,0)\psi\|^2 = \sup_{t \gtrless 0} \Big\| f(H_1) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} F(|\lambda_{n-1} < |H_1| < \lambda_n|)}_{\mathrm{Id}} U(t,0)\psi \Big\|^2 =$$

$$= \sup_{t \gtrless 0} \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{f(H_1)}_{n} F(\lambda_{n-1} < |H_1| < \lambda_n)U(t,0)\psi \Big\|^2 =$$

$$= \sup_{t \gtrless 0} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \|F(\lambda_{n-1} < |H_1| < \lambda_n)U(t,0)\psi\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-2n}\|\psi\|^2 < \infty.$$

□

Důsledek 2.19: *Nechť propagátor U v $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^\nu, \mathrm{d}^\nu x)$ má časově omezenou energii H_1 takovou, že H_1 je lokálně kompaktní, tedy že platí*

$$F(|Q| < R)(H_1 + i)^{-1} \text{ je kompaktní } \ \forall R < \infty.$$

Potom je systém $\{F(|Q| < R)\}$ U-kompaktní v $\pm\infty$.

- *Důkaz.* Zvolme $f(x) := |x|$. Potom

$$C := F(|Q| < R)(f(H_1) + i)^{-1} = \underbrace{F(|Q| < R)(H_1 + i)^{-1}}_{\text{kompaktní}} \underbrace{(H_1 + i)(f(H_1) + i)}_{\equiv B}, \tag{2.29}$$

je kompaktní operátor, protože

(i) B je omezený,

(ii) $\mathrm{dom}(f(H_1) + i) = \mathrm{ran}(f(H_1) + i)^{-1} \subset \mathrm{dom}(H_1 + i) \Leftrightarrow \mathrm{dom}\, f(H_1) \subset \mathrm{dom}\, H_1$.

Dokažme nejprve druhý bod. H_1 je samosdružený operátor, tedy existuje rozklad jednotky P_λ tak, že

$$H_1 = \int \lambda \mathrm{d}P_\lambda, \ f(H_1) = \int f(\lambda)\mathrm{d}P_\lambda.$$

Dále platí, že

$$\psi \in \operatorname{dom} H_1 \Leftrightarrow \int \lambda^2 \mathrm{d}\langle\psi, P_\lambda\psi\rangle < \infty,$$
$$\psi \in \operatorname{dom} f(H_1) \Leftrightarrow \int f(\lambda)^2 \mathrm{d}\langle\psi, P_\lambda\psi\rangle < \infty.$$

Je-li tedy jako v našem případě $f(\lambda) = |\lambda|$ potom $f(\lambda)^2 = \lambda^2$ a tedy $\operatorname{dom} f(H_1) = \operatorname{dom} H_1$.

Ukažme první bod, tedy omezenost B, ten je totiž roven

$$(H_1 + i)(f(H_1) + i)^{-1} = \int \frac{\lambda + i}{f(\lambda) + i} \mathrm{d}P_\lambda,$$

avšak

$$\left|\frac{\lambda + i}{f(\lambda) + i}\right| = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1, \text{ protože } f(\lambda) = |\lambda|.$$

Takže odtud

$$\|B\psi\|^2 \leq \int \mathrm{d}\langle\psi, P_\lambda\psi\rangle = \|\psi\|^2,$$

operátor B je tedy omezený.

Celkem jsme tedy ukázali, že operátor $C = F(|Q| < R)(f(H_1)+i)^{-1}$ je kompaktní. Lemma 2.18 tvrdí, že existuje hustá množina S taková, že

$$\forall\psi \in S \text{ je } K = \sup_{t \gtrless 0} \|f(H_1)U(t,0)\psi\| < \infty. \tag{2.30}$$

Odtud tedy

$$F(|Q| < R)U(t,0)\psi = C \underbrace{(f(H_1) + i)U(t,0)\psi}_{D(t)}.$$

$D(t)$ je omezené v t díky platnosti (2.30) a díky tomu, že U je unitární. Dle definice je C-obraz omezené množiny prekompaktní. Tedy

$$\{F(|Q| < R)U(t,0)\psi | t \gtrless 0\} \text{ je prekompaktní } \forall\psi, \ \forall R.$$

Platí tedy tvrzení důsledku. □

Buď U T-periodický Floquetova tvaru (viz Dodatek B)

$$U(t,0) = P(t)\exp(-\imath G t), \ P(0) = P(T) = 1. \tag{2.31}$$

Dále předpokládejme, že G je lokálně kompaktní, tedy že operátor

$$F(|Q| < R)(G + \imath)^{-1} \tag{2.32}$$

je kompaktní pro všechna R. Platí, že[4]

$$\mathscr{H}^{pp}(U(T,0)) = \mathscr{H}^{pp}(G).$$

Tvrzení 2.20: *Nechť T-periodický propagátor splňuje* (2.31) *a* (2.32)*, potom*

[4] viz Věta B.3

(i)

$$\mathscr{M}_{\pm}^{bd} = \mathscr{H}_{\pm}^{p} = \mathscr{H}^{pp}(G). \tag{2.33}$$

(ii) Pro libovolné $\psi \in \mathscr{H}^{cont}(G)$ *a* $R < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$ *je*

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|F(|Q| < R)U(kT,0)\psi\| = 0. \tag{2.34}$$

Důkaz.

- (ii) $\Rightarrow$ (i): Buďte $\psi \in \mathscr{H}^{cont}(G)$ a $\phi \in \mathscr{M}_{\pm}^{bd}$, takže dle definice je

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{t\gtrless 0} \|F(|Q| > R)U(t,0)\phi\| = 0$$

a pro ψ platí (2.34). Potom

$$|\langle\psi,\phi\rangle| \leq \|F(|Q| < R)U(kT,0)\psi\| + \sup_{t\gtrless 0} \|F(|Q| > R)U(t,0)\phi\|.$$

Provedením $\lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}$ a $\lim_{R\to\infty}$ v posledním výrazu dostaneme, že $\langle\psi,\phi\rangle = 0$. Takže jsme ukázali, že

$$\mathscr{H}^{cont}(G) \perp \mathscr{M}_{\pm}^{bd} \;\Rightarrow\; \mathscr{M}_{\pm}^{bd} \subset \mathscr{H}^{pp}(G) = \mathscr{H}^{pp}(U(T,0)) = \mathscr{H}_{\pm}^{p},$$

kde jsme použili tvrzení Věty 2.8. Ale dle Věty 2.11 je i $\mathscr{H}_{\pm}^{p} \subset \mathscr{M}_{\pm}^{bd}$, tedy platí bod (i).

- (ii): Buď $\psi \in \mathscr{H}^{cont}(G)$. Potom existuje $E > 0$ takové, že

$$F(|G| < E)\psi = \psi.$$

Operátor

$$F(|Q| < R)F(|G| < E) = F(|Q| < R)(G+\imath)^{-1}(G+\imath)F(|G| < E)$$

je podle předpokladů kompaktní. Díky tomu stejně jako v důkazu Lemmatu 2.6 ukážeme, že

$$\lim_{|n|\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U(kT,0)^* F(|G| < E)F(|Q| < R)F(|G| < E)U(kT,0)P^{cont}(G) \right\| = 0. \tag{2.35}$$

Potom díky Schwartzově nerovnosti bude konvergence (2.34) implikována konvergencí výrazu

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|F(|Q| < R)U(kT,0)\psi\|^2 = \left\langle \psi, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U(kT,0)^* F(|Q| < R)U(kT,0)\psi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \psi, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(|G| < E)U(kT,0)^* F(|Q| < R)U(kT,0)F(|G| < E)P^{cont}(G)\psi \right\rangle.$$

Protože $U(kT,0) = P(kT)e^{-\imath GkT} = e^{-\imath GkT}$ je $[U(kT,0), F(|G| < E)] = 0$. Takže díky (2.35) z poslední rovnice plyne (2.34).

□

Lemma 2.21: *Buď $C : [0,T] \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $C(t)$ kompaktní pro libovolné $t \in [0,T]$ a spojitá v normě. Potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje konečnědimenzionální projektor P_ϵ takový, že pro všechna $t \in [0,T]$ je $\|(1-P_\epsilon)C(t)\| \leq \varepsilon$.*

Důkaz. Díky spojitosti lze $[0,T]$ pokrýt konečně mnoha intervaly, $[0,T] = \bigcup_{i\in\hat{n}} I_i$ tak, že pro všechna $i \in \hat{n}$ a $s,t \in I_i$ je

$$\|C(t) - C(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.36}$$

Pro $t \in [0,T]$ označme $A(t) := C(t)(B(0,1))$. $A(t)$ je tedy prekompaktní pro libovolné t. Pro všechna $i \in \hat{n}$ zvolme $t_i \in I_i$, potom tedy existuje konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-síť N_i množiny $A(t_i)$ pro libovolné $i \in \hat{n}$. N_i je ε-sítí pro libovolné $A(s)$, $s \in I_i$ (to plyne z (2.36)).

Množina $N := \bigcap_{i\in\hat{n}} I_i$ je konečná. Označme P_ϵ ortogonální projektor na $\operatorname{span} N$. Potom

$$\|(1-Q)C(t)\| \leq \varepsilon, \ \forall t \in [0,T].$$

□

Tvrzení 2.22: *Buď U T-periodický propagátor splňující* (2.31) *a dále předpokládejme, že*

$$t \mapsto F(|Q| < R)P(t)(G+\imath)^{-1} \tag{2.37}$$

je pro $t \in [0,T]$ kompaktní operátorová funkce spojitá v normě. Potom je systém $\{F(|Q| < R)\}$ U-kompaktní v $\pm\infty$,

$$\mathscr{M}_\pm^{bd} = \mathscr{H}^{pp}(G) \tag{2.38}$$

a pro libovolné $\psi \in \mathscr{H}^{cont}(G)$, $R < \infty$ je

$$\lim_{|\tau|\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|F(|Q| < R)U(t,0)\psi\| \, \mathrm{d}t = 0. \tag{2.39}$$

Důkaz. Podle Lemmatu 2.21 a předpokladů pro daná $\varepsilon > 0$, $E, R > 0$ existuje konečnědimenzionální projektor P_ϵ takový, že pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ ($P(t)$ je T-periodický)

$$\|(1-P_\epsilon)F(|Q| < R)P(t)F(|G| < E)\| \leq \varepsilon.$$

Protože je P_ϵ kompaktní, je množina

$$\{P_\epsilon F(|Q| < R)U(t,0)\psi | t \geqslant 0\}$$

prekompaktní pro libovolné $\psi \in \mathscr{H}$. Buď nyní $\psi \in hilb$ pevné, potom existuje $E > 0$ tak, že $F(|G| < E)\psi = \psi$ a

$$F(|Q| < R)U(t,0)\psi = (1-P_\epsilon)F(|Q| < R)P(t) \underbrace{e^{-\imath Gt}\psi}_{F(|G|<E)e^{-\imath Gt}\psi} + P_\epsilon F(|Q| < R)U(t,0_\psi,$$

takže množina

$$\{F(|Q| < R)U(t,0)\psi | t \geqslant 0\}$$

je libovolně přesně aproximována prekompaktní množinou a je tedy sama prekompaktní. Systém $\{F(|Q| < R)\}_{R>0}$ je tedy $\pm\infty U$-kompaktní.

Takže podle Věty 2.13 a Věty 2.8 platí (2.38) a podle abstraktní RAGE Věty 2.16 je $\mathscr{M}_\pm^f = \mathscr{H}^{cont}(G)$, takže platí (2.39) □

Poznámka 2.23 (Časově nezávislý případ): Pokud uvažujeme časově nezávislý Hamiltonián H je propagátor dán pomocí $U(t,s) = e^{-\imath H(t-s)}$. Takže podle Věty B.3 je

$$\mathscr{H}^{pp}(H) = \mathscr{H}^{pp}(e^{-\imath HT}),$$
$$\mathscr{H}^{cont}(H) = \mathscr{H}^{cont}(e^{-\imath HT})$$

a Věta 2.8 dává rovnost $\mathscr{H}^{pp}(H) = \mathscr{H}^{p}_{\pm}$.

Dále je dobré si povšimnout, že podmínka relativní kompaktnosti v časově nezávislém případě

$$P_r(H+\imath)^{-1} \text{ je kompaktní } \forall r > 0,$$

kde $\{P_r\}$ splňuje (2.16), implikuje $\pm U$-kompaktnost (Definice 2.12), neboť pro $\psi \in \operatorname{dom} H$ je

$$P_r U(t,0)\psi = P_r(H+\imath)^{-1} \underbrace{e^{-\imath Ht}(H+\imath)\psi}_{\text{omezené pro } t\gtrless 0}.$$

Takže v časově nezávislém případě implikuje relativní kompaktnost platnost rozkladu Hilbertova prostoru na geometricky omezené a volné stavy.

2.3 RAGE rozklad

V této podkapitole dokážeme RAGE větu pro časově závislý Hamiltonián tvaru

$$H(t) = H_0 + V(t),$$

za podmínky stejnoměrné omezenosti $\sup_t \|V(t)\| < \infty$, bez předpokladu $\pm U$-kompaktnosti, kterou je těžké v konkrétních případech ověřit.

Věta 2.24: *Buď U propagátor na $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^\nu, \mathrm{d}^\nu x)$ generovaný Hamiltoniánem*

$$H(t) = H_0 + V(t),$$

kde H_0 je operátor kinetické energie $-\frac{1}{2m}\triangle$ a $V(t)$ spojitá množina omezených samosdružených operátorů pro něž platí

$$V(t+T) = V(t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$
$$\sup_t \|V(t)\| = M < \infty.$$

Potom

$$\mathscr{M}^{bd}_{\pm} = \mathscr{H}^{pp}(U(T,0)),$$
$$\mathscr{M}^{f}_{\pm} = \mathscr{H}^{cont}(U(T,0)).$$

Důkaz. V případě že máme periodický unitární propagátor jsme ukázali (viz Věta 2.8, 2.15 a 2.11), že $\mathscr{M}^{bd}_{\pm} \perp \mathscr{M}^{f}_{\pm}$ a $\mathscr{H}^{pp}(U(T,0)) = \mathscr{H}^{p}_{\pm} \subset \mathscr{M}^{bd}_{\pm}$. Ukažme tedy, že $\mathscr{H}^{cont}(U(T,0)) \subset \mathscr{M}^{f}_{\pm}$. Buď $\psi \in \mathscr{H}^{cont}(U(T,0))$, $R > 0$ a ptáme se zda-li platí

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|F(|Q| < R)U(t,0)\psi\| \,\mathrm{d}t = 0.$$

Uvažme množinu funkcí $\{g_v\}_{v>0} \subset C^\infty(\mathbb{R}_+)$ takových, že

$$0 \leq g_v \leq 1,\ \operatorname{supp} g_v \subset (mv^2/2, +\infty)$$

a navíc $1 - g_v$ má kompaktní nosič.

Potom $\operatorname{ran} g_v(H_0) \subset F(H_0 > mv^2/2)\mathscr{H}$. Dále platí

$$\|F(|Q| < R)U(t,0)\psi\| \leq \|F(|Q| < R)g_v(H_0)U(t,0)\psi\| + \|F(|Q| < R)(1 - g_v(H_0))U(t,0)\psi\|. \tag{2.40}$$

Podle Lemmatu D.1 je $F(|Q| < R)(1 - g_v(H_0))$ kompaktní a podle Důsledku 2.7 je tedy časová střední hodnota druhého členu rovna nule.

Podle Duhamelovy formule (viz (2.58)) existuje M tak, že pro všechna t je

$$\|e^{-\imath H_0 s} - U(t+s,t)\| \leq |s|M.$$

Buď $\epsilon > 0$, potom pro $\sigma = \epsilon/M$ je

$$\sup_{t,\ 0 \leq s\ \leq \sigma} \|e^{-\imath H_0 s} - U(t+s,t)\| \leq \epsilon.$$

Pro integrály s kladným integrandem platí pro libovolné $\sigma > 0$ nerovnost

$$\limsup_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\ldots) \leq \sup_{t\geq 0} \frac{1}{\sigma} \int_t^{t+\sigma} (\ldots).$$

Takže pro $0 \leq s\ \leq \sigma$ z prvního výrazu (2.40)

$$\limsup_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|F(|Q| < R)g_v(H_0)U(t,0)\psi\|\ \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \sup_t \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \|F(|Q| < R)g_v(H_0)U(t+s,t)U(t,0)\psi\| \mathrm{d}s\ \leq$$

$$\leq \epsilon\|\psi\| + \sup_t \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \|F(|Q| < R)g_v(H_0)e^{-\imath H_0 s}U(t,0)\psi\| \mathrm{d}s.$$

Poslední výraz je podle Schwartzovy nerovnosti menší nebo roven

$$\frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \|F(|Q| < R)g_v(H_0)e^{-\imath H_0 s}U(t,0)\psi\|^2 \mathrm{d}s\ \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma e^{\imath H_0 s} g_v(H_0)F(|Q| < R)g_v(H_0)e^{-\imath H_0 s} \mathrm{d}s \right\| \cdot \|\psi\|^2$$

a pro kvadrát normy potom máme

$$\|\cdots\|^2 \leq \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\sigma \mathrm{d}s \int_0^\sigma \mathrm{d}s' \|F(|Q| < R)e^{-\imath H_0(s-s')}g_v(H_0)^2 F(|Q| < R)\|.$$

Buď $\delta = \frac{\epsilon\sigma}{2}$, potom integrace přes $|s - s'| < \delta$ je omezená ϵ. Pro integraci přez $|s - s'| \geq \delta$ stačí ukázat, že

$$\lim_{v\to\infty} \|F(|Q| < R)e^{-\imath H_0 t} g_v(H_0)^2 F(|Q| < R)\| = 0$$

pro libovolné $R > 0$ a t taková že $0 < \delta \leq |t| \leq \sigma$. To plyne například z Důsledku 2.9 v [Ens83]. □

2.4 Harmonický oscilátor, řešitelný případ

Na závěr této kapitoly probereme několik příkladů. Začněmě harmonickým oscilátorem.

Lemma 2.25: *Buď A symetrický a B pozitivní operátor,* $\operatorname{dom} B \subset \operatorname{dom} A$. *Nechť* $\|A(B+1)^{-\frac{1}{2}}\| = M < \infty$. *Potom*[5] $A \ll B$.

Důkaz. Buď $0 < \alpha < 1$, potom

$$\|(B+1)^{\frac{1}{2}}(\alpha B+1)^{-1}\| \leq \max_x \frac{\sqrt{x+1}}{\alpha x+1} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}.$$

Potom pro $\forall\psi \in \operatorname{dom} B \subset \operatorname{dom} B^{\frac{1}{2}}$ je

$$\|A\ \psi\| \leq M\|(B+1)^{\frac{1}{2}}\psi\| \leq M\left(\alpha\|B(\alpha B+1)^{-1}(B+1)^{\frac{1}{2}}\psi\| + \|(\alpha B+1)^{-1}(B+1)^{\frac{1}{2}}\psi\|\right),$$

takže

$$\|A\ \psi\| \leq \frac{M}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\|B\psi\| + \frac{M}{2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\|\psi\|,\ \forall\psi \in \operatorname{dom} B.$$

Protože je $\inf_{0<\alpha<1}\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0$ je relativní mez A vzhledem k B rovna 0. □

Uvažujme jednodimenzionální volnou částici s hmotností $m = 1$ v potenciálu

$$V(x,t) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + f(t)x, \tag{2.41}$$

$$H(t) = \underbrace{\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2}_{H_\omega} + f(t)Q. \tag{2.42}$$

kde f je spojitá a omezená na $\mathbb{R}$. Hilbertův prostor systému je $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathrm{d}x)$. H_ω je pozitivní operátor, $\operatorname{dom} H_\omega \subset \operatorname{dom} Q$ a $Q(H_\omega+1)^{-\frac{1}{2}}$ je omezený operátor. Podle Lemmatu 2.25 a Katovy-Rellichovy věty[6] je $H(t)$ samosdružený operátor na $\operatorname{dom} H_\omega$.

Unitární propagátor existuje a je dán

$$U(t,s) = \exp\left(-i\varphi_1(t,s)Q\right)\exp\left(i\varphi_2(t,s)\frac{P}{\omega}\right)\exp\left(-iH_\omega(t-s) + i\psi(t,s)\right), \tag{2.43}$$

[5] *viz Definice E.7*

[6] viz [JB93] Věta 7.3.14, [MR75] Theorem X.12 a Dodatek E

kde

$$\varphi_1(t,s) = \int_s^t f(\tau)\cos\omega(\tau - t)\mathrm{d}\tau, \tag{2.44}$$

$$\varphi_2(t,s) = -\int_s^t f(\tau)\sin\omega(\tau - t)\mathrm{d}\tau, \tag{2.45}$$

$$\psi(t,s) = -\frac{1}{2}\int_s^t \left(\varphi_1(\tau,s)^2 - \varphi_2(\tau,s)^2\right)\mathrm{d}\tau, \tag{2.46}$$

$$\tag{2.47}$$

Skutečně, uvědomíme-li si, že

$$\left(e^{-\imath H_\omega t}\Psi\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{K}_t(x,y)\Psi(y)\mathrm{d}y, \text{ pro } \Psi \in \mathscr{S},$$
$$\left(e^{-\imath\varphi_1(t,s)Q}\Psi\right)(x) = e^{-\imath\varphi_1(t,s)x}\Psi(x),$$
$$\left(e^{\imath\varphi_2(t,s)\frac{P}{\omega}}\Psi\right)(x) = \Psi\left(x + \frac{\varphi_2(t,s)}{\omega}\right).$$

kde

$$\mathscr{K}_t(x,y) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\imath\sin\omega t}}\exp\left\{\frac{\imath\omega}{2\sin\omega t}\left[(x^2+y^2)\cos\omega t - 2xy\right]\right\}.$$

Potom prostým dosazením stačí ověřit, že

$$\left[\left(\imath\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\right)U(t,s)\Psi\right](x) = 0, \ \forall\Psi \in \mathscr{S}.$$

Tvrzení 2.26: *$\varphi_1(t,0)$ a $\varphi_2(t,0)$ jsou omezené, právě když je $\mathscr{H}_\pm^p = \mathscr{H}$.*

Důkaz. Nejprve ukažme, že omezenost $\varphi_1(t,0)$ je ekvivalentní omezenosti $\varphi_2(t,0)$. To plyne z rovnosti

$$\varphi_2(t,0) = -\int_0^t f(\tau)\underbrace{\sin\omega(\tau - t)}_{\cos(\omega(\tau-t)+\frac{\pi}{2})}\mathrm{d}\tau = -\varphi_1\left(t - \frac{\pi}{2\omega}, 0\right) - \int_{t-\frac{\pi}{2\omega}}^t f(\tau)\cos\left(\omega\left(\tau - t + \frac{\pi}{2\omega}\right)\right)\mathrm{d}\tau.$$

Podle předpokladů je f omezená, tedy $|f| < K$.

$$|\varphi_2(t,0)| \leq \left|\varphi_1\left(t - \frac{\pi}{2\omega}, 0\right)\right| + K\ \frac{\pi}{2\omega}.$$

Podobná nerovnost pro φ_1 se odvodí zcela analogicky.

Pomocí vztahu

$$e^{tA}Be^{-tA} = e^{t\mathrm{ad}_A}B \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathrm{ad}_A^k B, \ \mathrm{ad}_A B \equiv [A,B] \tag{2.48}$$

odvodíme relace

$$Q(t) \equiv U(0,t)QU(t,0) = Q\cos\omega t + \frac{P}{\omega}\sin\omega t - \frac{1}{\omega}\varphi_2(t,0),$$
$$P(t) \equiv U(0,t)PU(t,0) = -\omega Q\sin\omega t + P\cos\omega t - \varphi_1(t,0).$$

Pro $\Psi \in \mathscr{S}$ platí

$$\|P^n U(t,0)\Psi\|^2 = \langle \Psi, P(t)^{2n}\Psi\rangle, \tag{2.49}$$
$$\|Q^n U(t,0)\Psi\|^2 = \langle \Psi, Q(t)^{2n}\Psi\rangle,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.50}$$

Odtud plyne, že $\varphi_1(t,0)$ je omezená právě když je $\|P^n U(t,0)\Psi\|^2$ omezená a také že $\varphi_2(t,0)$ je omezená právě když je $\|Q^n U(t,0)\Psi\|^2$ omezená.

Pro libovolné t a $\psi \in \mathscr{S}$ platí

$$\|U(t,0)\psi - F(|Q|<R)F(|P|<R)U(t,0)\psi\| \le \|(I\ - F(|Q|<R))U(t,0)\psi\| + \tag{2.51}$$
$$+\|F(|Q|<R)(I - F(|P|<R))U(t,0)\psi\| = \|F(|Q|\ge R)U(t,0)\psi\| + \|F(|P|\ge R)U(t,0)\psi\|. \tag{2.52}$$

Tyto výrazy odhadneme pomocí Lemmatu 2.18. Zvolme $f(\lambda) := \lambda^2$, potom jsem již ukázali, že $\|Q^2U(t,0)\psi\|$ je omezená v t pro libovolná ψ ze Schwartzova prostoru, tj.

$$M := \sup_{t\gtrless 0}\|f(Q)U(t,0)\psi\| < \infty,\ \forall\psi \in \mathscr{S}.$$

Odtud dle Lemmatu 2.18 plyne, že U má časově omezenou energii Q v $\pm\infty$, tedy

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{t\gtrless 0}\|F(|Q|\ge R)U(t,0)\psi\| = 0.$$

Zcela analogicky pro P dostáváme, že

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{t\gtrless 0}\|F(|P|\ge R)U(t,0)\psi\| = 0.$$

Dle (2.51) pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ a dostatečně velké $R > 0$ platí

$$\|U(t,0)\psi - F(|Q|<R)F(|P|<R)U(t,0)\psi\| \le \varepsilon.$$

Neboť operátor $F(|Q|<R)F(|P|<R)$ je kompaktní (viz Lemma D.1) pro libovolné $R > 0$ je $\{U(t,0)\psi | t \gtrless 0\}$ libovolně přesně aproximována prekompaktní množinou a tedy je nutně kompaktní (pro libovolné ψ). □

Lemma 2.27: *Buďte f, g omezené funkce na $\mathbb{R}$ a nechť f je spojitá a T-periodická. Potom*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s e^{-(|\varphi(t)|-R)^2}\,\mathrm{d}t = 0,\ \forall R > 0,$$

kde $\varphi(t) = tf(t) + g(t)$.

Důkaz. Neboť pro $nT < s < (n+1)T$ je

$$\frac{1}{s}\int_0^s h(t)\ \mathrm{d}t \le \frac{1}{nT}\int_0^{(n+1)T} h(t)\ \mathrm{d}t = \frac{n+1}{n}\frac{1}{(n+1)T}\int_0^{(n+1)T} h(t)\ \mathrm{d}t$$

stačí ověřovat konvergenci výrazu na pravé straně. Potom

$$\frac{1}{nT}\int_0^{nT} e^{-(|\varphi(t)|-R)^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{nT}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^T e^{-(|\varphi(t+jT)|-R)^2}\ \mathrm{d}t \le \frac{C}{nT}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^T e^{-(jT|f(t)|-(G+R))}\ \mathrm{d}t,$$

kde $G > |g|$ je konstanta. Stačí tedy ukázat konvergenci výrazu

$$\frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{d}y\int_0^T e^{-(y|f(t)|-A)^2}\ \mathrm{d}t,$$

kde $A > 0$ a f je omezená na $[0,T]$. Označme $\{x_i\}_{i=1}^N \subset [0,T]$ nulové body f, tj. $f(x_i) = 0$. Buď $\varepsilon > 0$, potom existuje $K(\varepsilon) > 0$ takové, že $|f(t)| > K(\varepsilon)$ pro všechna $t \in M := [0,T] \setminus \bigcup_{i=1}^N (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$. Tedy

$$\frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{d}y\int_0^T e^{-(y|f(t)|-A)^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{d}y\int_M e^{-(y|f(t)|-A)^2}\ \mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{d}y\int_{[0,T]\setminus M} e^{-(y|f(t)|-A)^2}\ \mathrm{d}t \le$$

$$\le \frac{1}{n}\int_M \mathrm{d}t\int_0^{n|f(t)|} e^{-(y-A)^2}\ \underbrace{\frac{1}{|f(t)|}}_{\le 1/K(\varepsilon)}\ \mathrm{d}y + \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{d}y\int_{[0,T]\setminus M} \mathrm{d}t \le \frac{T\sqrt{\pi}}{nK(\varepsilon)} + 2\varepsilon N.$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ tedy existuje $N(\varepsilon) = \frac{T\sqrt{\pi}}{\varepsilon K(\varepsilon)}$ tak, že pro všechna $n > N(\varepsilon)$ je

$$\frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{d}y\int_0^T e^{-(y|f(t)|-A)^2}\ \mathrm{d}t < (1+2N)\varepsilon.$$

Takže platí tvrzení Lemmatu. □

Uvažme nyní konkrétní případ f, tzv. AC Starkův efekt

$$f(t) = \sin\omega_0 t. \tag{2.53}$$

V tomto případě platí následující věta.

Věta 2.28: *V případě $f(t) = \sin\omega_0 t$ může nastat právě jedna z možností:*

$\omega \neq \omega_0$: Operátor monodromie $U\left(\frac{2\pi}{\omega_0}, 0\right)$ má čistě bodové spektrum a každá trajektorie je prekompaktní v $+\infty$ a $-\infty$.

$\omega = \omega_0$: Operátor monodromie má absolutně spojité spektrum a pro libovolné $\Psi \in \mathscr{H}$ platí

$$\lim_{|\tau|\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|F(|x| < R)U(t,0)\Psi\| \, \mathrm{d}t = 0 \tag{2.54}$$

kde časovou střední hodnotu nelze vypustit.

Důkaz. Přímým dosazením do (2.44) dostaneme

$$\varphi_1(t,0) = \begin{cases} \frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t), & \omega \neq \omega_0 \\ \\ \frac{t\sin\omega t}{2}, & \omega = \omega_0 \end{cases}$$

$$\varphi_2(t,0) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}(\omega_0 \sin\omega t - \omega \sin\omega_0 t), & \omega \neq \omega_0 \\ \\ -\frac{t\cos\omega t}{2} + \frac{\sin\omega t}{2\omega}, & \omega = \omega_0 \end{cases}$$

Takže v případě $\omega \neq \omega_0$ platí předpoklady Tvrzení 2.26 a tedy $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\pm^p = \mathscr{H}^{pp}(U(T,0))$. Navíc protože $\mathscr{H}_\pm^p \subset \mathscr{M}_\pm^{bd}$ je též $\mathscr{M}_\pm^{bd} = \mathscr{H}$. A díky ortogonalitě pak také nutně $\mathscr{M}_\pm^f = \mathscr{H}_\pm^f = \mathscr{H}^{cont}(U(T,0)) = \{0\}$.

Uvažme totální množinu

$$\mathscr{T} := \Big\{ \Psi_a \in \mathscr{S} \Big| \Psi_a(x) := \exp\Big(-\frac{\omega}{2}(x-a)^2 \Big), \ a \in \mathbb{R} \Big\}. \tag{2.55}$$

Pro $t = \frac{5\pi}{2\omega}$, $s = \frac{\pi}{2\omega}$ je

$$\varphi_1\left(\frac{5\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{\pi}{\omega},$$
$$\varphi_2\left(\frac{5\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right) = 0,$$
$$\left(\exp\big(-\imath\frac{2\pi}{\omega}H_\omega\big)\psi_a\right)(x) = -\psi_a(x), \ \forall \psi_a \in \mathscr{T}.$$

Takže z (2.43) plyne, že operátor monodromie v $s = \frac{\pi}{2\omega}$ je roven

$$U\left(\frac{5\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right) = -e^{\psi_0} e^{-\imath\frac{\pi}{\omega}Q},$$

kde $\psi_0 = \psi\left(\frac{5\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right)$ a je čistě absolutně spojitý. Dále je odtud vidět, že pro žádné ψ a $R > 0$ nemůže platit

$$\|F(|Q| < R)U(t,s)\psi\| \xrightarrow{t} 0,$$

protože

$$U\left(\frac{(4n+1)\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right) = \left[U\left(\frac{5\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right)\right]^n$$

komutuje s $F(|Q| < R)$.

Dále pro $\psi_a \in \mathscr{T}$ je

$$|\exp(-\imath H_\omega t)\psi(x)|^2 = \exp(-\omega(x - a\cos\omega t)^2),$$

takže v případě $\omega_0 = \omega$ je

$$h(t) := \|F(|Q| < R)U(t,0)\psi_a\|^2 = \int\limits_{B_R} \exp\left[-\omega\Big(x + \frac{\varphi_2(t,0)}{\omega} - a\cos\omega t\Big)^2\right] \mathrm{d}x \leq$$
$$\leq Ce^{-\omega(|\phi(t)-R|)^2},$$

kde $\phi(t) = \frac{t}{2\omega}\cos\omega t - \frac{1}{2\omega^2}\sin\omega t + a\cos\omega t$. Takže dle Lemmatu 2.27 je

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int\limits_0^s h(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Protože $\mathscr{T}$ je totální a $\mathscr{M}_\pm^f$ je uzavřený podprostor je $\mathscr{M}_\pm^f = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$. To znamená že $\mathscr{M}_\pm^{bd} = \{0\}$ a tedy i $\mathscr{H}_\pm^p = \{0\}$, $\mathscr{H}_\pm^f = \mathscr{H}$.

□

2.5 Harmonický oscilátor, narušení

Uvažujme Hamiltonián tvaru

$$H(t) = H + V(t), \tag{2.56}$$

kde f je po částech spojitá, T-periodická a předpokládejme že existuje unitární propagátor $U(t,s)$. Poznamenejme, že v této podkapitole $U(t,s)$ značí propagátor generovaný $H(t)$, propagátor příslušející H (viz (2.56)) je $e^{-\imath Ht}$. Zabývejme se následujícím problémem: Předpokládejme, že H má pouze vázané stavy. Jaký může být potenciál $V(t)$ aby i narušený systém s Hamiltoniánem $H(t)$ měl pouze vázané stavy?

Lemma 2.29: *Buďte $H(t)$ jako výše a*

$$W(t,s) := \int\limits_s^t e^{\imath H\sigma}V(\sigma)e^{-\imath H\sigma}\mathrm{d}\sigma \tag{2.57}$$

kompaktní pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$. Potom

$$e^{-\imath Ht} - U(t,0),$$

je kompaktní.

Důkaz. Buď s libovolné pevné. Označíme-li pro $t \geq s$

$$F(t) := U(t,s) - e^{-\imath H(t-s)} + \imath e^{-\imath Ht}\int\limits_s^t e^{\imath H\sigma}V(\sigma)U(\sigma,s)\mathrm{d}\sigma,$$

potom $F(s) = 0$ a využitím vlastností propagátoru

$$\imath\frac{\partial}{\partial t}F(t) = H(t)U(t,s) - He^{-\imath(t-s)} + \imath He^{-\imath Ht}\int_s^t e^{\imath H\sigma}V(\sigma)U(\sigma,s)\mathrm{d}\sigma - V(t)U(t,s) = HF(t).$$

Takže musí být $F(t) = 0$. Tím jsme odvodili Duhamelovu formuli

$$U(t,s) - e^{-\imath H(t-s)} = -\imath e^{-\imath Ht}\int_s^t e^{\imath H\sigma}V(\sigma)U(\sigma,s)\mathrm{d}\sigma. \tag{2.58}$$

Odtud plyne pro všechna t, že

$$\|e^{-\imath Hs} - U(t+s,t)\| \le |s|\sup_\sigma \|V(\sigma)\|. \tag{2.59}$$

Buď $n \in \mathbb{N}$ a označme $h = t/n$, potom opět pomocí (2.58)

$$\begin{aligned}
\imath e^{\imath Ht}(U(t,0) - e^{-\imath Ht}) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{kh}^{(k+1)h} e^{\imath H\sigma}V(\sigma)\underbrace{U(\sigma,0)}_{U(\sigma,kh)U(kh,0)}\mathrm{d}\sigma = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\Big[\int_{kh}^{(k+1)h} e^{\imath H\sigma}V(\sigma)e^{-\imath H\sigma}\mathrm{d}\sigma\Big]}_{W(t,s)}e^{\imath Hkh}U(kh,0) + \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1}\Big[\int_{kh}^{(k+1)h} e^{\imath H\sigma}V(\sigma)\big(U(\sigma,kh) - e^{-\imath H(\sigma-kh)}\big)\mathrm{d}\sigma\Big]U(kh,0).
\end{aligned}$$

První sčítanec v posledním výrazu je kompaktní pro libovolné $h > 0$ díky kompaktnosti $W(t,s)$. Druhý sčítanec lze v normě odhadnout výrazem

$$nh\max_k\Big(\sup_{\sigma\in[kh,(k+1)h]}\|V\ (\sigma)\|\underbrace{\|U(\sigma-kh+kh,kh) - e^{-\imath H(\sigma-kh)}\|}_{\le|\sigma-kh|\sup_\sigma\|V(\sigma)\|\le h\sup_\sigma\|V(\sigma)\|}\Big) \le th\sup_\sigma\|V(\sigma)\|^2$$

kde jsme opět použili (2.59) a $t = nh$. Tento výraz lze učinit libovolně malým, neboť $h \to 0$ při $n \to \infty$. Celkem tedy je $U(t,s) - e^{-\imath H(t-s)}$ libovolně přesně aproximována kompaktním operátorem a je tedy kompaktní. □

Lemma 2.30: *Buď $V(t) = f(t)V$, kde f je po částech spojitá a omezená funkce na $\mathbb{R}$ a V je omezený operátor. Je-li*

$$W_1(t,s) = \int_s^t e^{\imath H\sigma}V\ e^{-\imath H\sigma}\mathrm{d}\sigma \tag{2.60}$$

kompaktní, potom je i $W(t,s$ v (2.57) kompaktní.

Důkaz. f lze libovolně přesně aproximovat stupňovitými funkcemi a tedy i $W(t,s)$ může být libovolně přesně aproximována konečnými součty výrazů typu $W_1(t,s)$ které jsou kompaktní. □

Lemma 2.31: *Nechť H má čistě diskrétní spektrum $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, odpovídající spektrální projektory označme $P_1, P_2, \ldots$, $\dim P_k < \infty$. Potom kompaktnost diagonální a mimodiagonální části maticového operátoru*

$$W_{kj} = \begin{cases} \frac{P_k V P_j}{\lambda_k - \lambda_j}, & k \neq j \\ P_k V P_k, & k = j \end{cases} \tag{2.61}$$

implikuje kompaktnost $W_1(t,s)$ v (2.60)*.*

Důkaz. Protože $e^{-\imath H\sigma} P_j = e^{-\imath \lambda_j \sigma} P_j$ je

$$P_k W_1(t,s) P_j = \left\{ \begin{array}{ll} (-\imath)\frac{P_k V P_j}{\lambda_k - \lambda_j}(e^{-\imath(\lambda_j-\lambda_k)t} - e^{-\imath(\lambda_j-\lambda_k)s}), & j \neq k \\ (t-s) P_k V P_k, & j = k \end{array} \right\} =$$
$$= (-\imath)\left[e^{\imath H t} V_1 e^{-\imath H t} - e^{\imath H s} V_1 e^{-\imath H s}\right]_{kj} + (t-s)(V_2)_{kj},$$

kde V_2 respektive V_1 je diagonální respektive mimodiagonální část maticového operátoru W v (2.61). □

Důsledek 2.32: *Nechť H má čistě bodové, diskrétní spektrum $\sigma(H) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\}$. Označme $P_1, P_2, \ldots$ odpovídající spektrální projektory. Kompaktnost diagonální a mimodiagonální části maticového operátoru*

$$A_{kj} = \begin{cases} \frac{P_k V P_j}{\lambda_k - \lambda_j}, & k \neq j \\ P_k V P_k, & k = j \end{cases} \tag{2.62}$$

implikuje kompaktnost

$$e^{-\imath H t} - U(t,0).$$

Důsledek 2.33: *Pokud za předpokladů předchozí věty má spektrum operátoru* $\exp(-iHT)$ *nejvýše konečný počet hromadných bodů, potom to samé platí o spektru $U(T,0)$ a proto $\mathscr{H}^p_{\pm} = \mathscr{H}$.*

Důkaz. Přímá aplikace Důsledku D.7. □

Uvažme konkrétní případ harmonického oscilátoru

$$H = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2.$$

Jeho spektrum je čistě bodové a ekvidistantní

$$\lambda_k = \omega\left(k - \frac{1}{2}\right),\ k \in \mathbb{N}.$$

Označme Ψ_k příslušné vlastní funkce. V případě, že $\frac{\omega T}{2\pi}$ je iracionální je spektrum $\exp(-iHT)$ husté na jednotkové kružnici. Je-li $\frac{\omega T}{2\pi}$ racionální, potom spektrum $\exp(-iHT)$ je konečná množina bodů na kružnici. Maticový operátor A jehož elementy jsou dány

$$A_{kj} = \begin{cases} \frac{\langle \Psi_k, V\Psi_j\rangle}{k-j}, & k \neq j \\ \langle \Psi_k, V\Psi_k\rangle, & k = j \end{cases}$$

má kompaktní diagonální i mimodiagonální část, předpokládáme-li že V je omezená a má kompaktní nosič. Skutečně, pro Hermitovy funkce totiž platí (viz [Smi73], III/2, §162)

$$\int_a^b |\Psi_k(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{k}}$$

a tedy

$$|\langle \Psi_k, V\Psi_j \rangle| \leq \mathrm{const}\Big[\int_a^b |\Psi_k(x)|^2 \, \mathrm{d}x \cdot \int_a^b |\Psi_j(x)|^2 \, \mathrm{d}x \Big]^{1/2} \leq \frac{\mathrm{const}}{(kj)^{1/4}}.$$

Kompaktnost pak plyne z Lemmatu D.3. Potom podle výše uvedeného Důsledku systém složený z harmonického oscilátoru H narušeného $f(t)V$, kde f je periodická s periodou T pro kterou je $\frac{\omega T}{2\pi}$ racionální, má pouze vázané stavy.

Jako další příklad uvedeme nekonečnou potenciálovou jámu. Hamiltonián H je dán jako $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ na konečném intervalu $[0, l]$ s Dirichletovou hraniční podmínkou. Normalizované vlastní funkce jsou

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \ k \ \in \mathbb{N}$$

a odpovídající vlastní hodnoty

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \ k \ \in \mathbb{N}.$$

Spektrum operátor $\exp(-iHT)$ má konečný počet hromadných bodů pokud $\frac{T\pi}{l^2}$ je racionální. Předpokládejme, že potenciál je opět tvaru $f(t)V$, kde f je jako v předcházejícím případě. Mimodiagonální část operátoru (2.62) má maticové elementy omezené

$$\left| \frac{\langle \varphi_k, V\varphi_j \rangle}{k^2 - j^2} \right| \leq \frac{2}{|k^2 - j^2|}, \ k \ \neq j$$

a protože

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1 - \delta_{kj}}{k^2 - j^2} \right| < \infty$$

je tento operátor Hilbert-Schmidtův (a tedy i kompaktní) na l^2. Pro diagonální elementy máme

$$\langle \varphi_k, V\varphi_k \rangle = \frac{2}{l} \int_0^l V(x) \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{l} \int_0^l V(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{l} \int_0^l V(x) \cos \frac{2k\pi x}{l} \, \mathrm{d}x.$$

Kvůli prvnímu členu nelze přímo použít Lemma D.3, druhý člen při $k \to \infty$ konverguje k nule. Tohoto problému se zbavíme úpravou Hamiltoniánu na

$$H(t) = H + V_3 + V(t) - V_3,$$

kde V_3 je diagonální maticový operátor

$$(V_3)_{kj} = \frac{1}{l} \int_0^l V(x) \delta_{kj}.$$

$H + V_3$ chápeme jako nenarušený, příslušný propagátor přes periodu T je pak

$$\exp(-\imath HT)\exp\left(-\imath\int_0^T f(\tau)\mathrm{d}\tau V_3\right),$$

a má opět konečné esenciální spektrum v případě, že $\frac{T\pi}{l^2}$ je racionální. Příslušné maticové operátory jsou kompaktní a podle Důsledku 2.33 má tento systém pouze vázané stavy.

2.6 Narušení kruhově polarizovanou elektromagnetickou vlnou

Buďte $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}^3x)$, $V(x) = V_1(x) + V_+(x)$ sféricky symetrický potenciál takový, že V_1 je form-omezený vzhledem k $H_0 = \frac{1}{2m}P^2$ s mezí menší než 1, tj.

$$|\langle\psi, V_1\psi\rangle| \leq a\langle\psi, H_0\psi\rangle + b\|\psi\|^2,\ a < 1,\ \forall\psi \in \mathrm{Q}(H_0) \subset \mathrm{Q}(V_1). \tag{2.63}$$

Dále předpokládejme, že V_+ je pozitivní a $\mathrm{Q}(H_0) \cap \mathrm{Q}(V_+)$ je hustá v $\mathscr{H}$.

Odtud plyne, že forma

$$\mathfrak{q} := \mathfrak{t}_{H_0} + \mathfrak{t}_{V_+},$$

definovaná na $\mathrm{Q}(H_0) \cap \mathrm{Q}(V_+)$ je hustě definovaná, pozitivní a uzavřená, neboť $\mathfrak{t}_{H_0}$ a $\mathfrak{t}_{V_+}$ jsou pozitivní a uzavřené[7]. Takže existuje právě jeden samosdružený operátor $H_0 + V_+$ takový, že $\mathfrak{q}$ je jeho kvadratická forma a $\mathrm{dom}(H_0 \cap V_+) \subset \mathrm{Q}(H_0) \cap \mathrm{Q}(V_+)$.

Protože je V_+ pozitivní a platí (2.63) je

$$|\langle\psi, V_1\psi\rangle| \leq a\langle\psi, (H_0 + V_+)\psi\rangle + b\|\psi\|^2,\ \forall\psi \in \mathrm{dom}(H_0 + V_+) \subset \mathrm{Q}(V_1).$$

Podle KLMN věty E.6 potom existuje právě jeden samosdružený operátor H s $\mathrm{Q}(H) = \mathrm{Q}(H_0) \cap \mathrm{Q}(V_+)$ takový, že $\mathfrak{t}_H(\psi, \phi) = \mathfrak{q}(\psi, \phi) + \mathfrak{t}_{V_1}$, $\forall\psi, \phi \in \mathrm{Q}(H)$. H je zdola omezený a $H = H_0 + V_+ + V_1$ s definičním oborem $\mathrm{dom}\, H \subset \mathrm{Q}(H)$.

Lemma 2.34: *Operátor $(H_0 + \imath)^{1/2}(H + \imath)^{-1/2}$ je omezený.*

Důkaz. Nejprve ukažme, že pro samosdružený operátor A je $\mathrm{Q}(A) = \mathrm{dom}(A + \imath)^{1/2}$. To plyne z definice

$$\psi \in \mathrm{Q}(A) \Leftrightarrow \int |\lambda|\mathrm{d}\mu_\psi(\lambda),$$
$$\psi \in \mathrm{dom}(A\ +\imath)^{1/2} \Leftrightarrow \int \underbrace{|(\lambda + \imath)^{1/2}|^2}_{\sqrt{\lambda^2+\imath}}\mathrm{d}\mu_\psi(\lambda),$$

a z nerovností

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\lambda| + 1) \leq \sqrt{\lambda^2 + 1} \leq |\lambda| + 1,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Neboť je $\mathrm{Q}(H) \subset \mathrm{Q}(H_0)$ máme

$$\mathrm{ran}(H + \imath)^{-1/2} = \mathrm{dom}(H + \imath)^{1/2} = \mathrm{Q}(H) \subset \mathrm{Q}(H_0) = \mathrm{dom}(H_0 + \imath)^{1/2}.$$

Operátor $(H_0 + \imath)^{1/2}(H + \imath)^{-1/2}$ je tedy všude definovaný a protože $(H_0 + \imath)^{1/2}$ je uzavřený je i uzavřený. Podle Věty o uzavřeném grafu je $(H_0 + \imath)^{1/2}(H + \imath)^{-1/2}$ omezený. □

[7] viz Lemma E.5 a dále i věty v Dodatku E

Uvažme vektorový potenciál představující dopadající kruhově polarizovanou monochromatickou elektromagnetickou vlnu pohybující se směrem osy x_3

$$A(x_3,t)=\alpha(\cos(kx_3-\omega t),\sin(k\ x_3-\omega t),0). \tag{2.64}$$

Platí

$$P\cdot A(Q_3,t)=A(Q_3,t)\cdot P.$$

a $A(Q_3,t)$ komutuje s generátorem rotací kolem osy x_3

$$L_3=Q_1P_2-Q_2P_1.$$

To implikuje

$$\frac{1}{2m}(P-A(Q_3,t))^2=e^{\imath\omega L_3t}\frac{1}{2m}(P-A(Q_3,0))^2e^{-\imath\omega L_3t}. \tag{2.65}$$

Protože

$$P_j(H+\imath)^{-1/2}=\underbrace{P_j(H_0+\imath)^{-1/2}}_{\in\mathscr{B}(\mathscr{H})}\underbrace{(H_0+\imath)^{1/2}(H+\imath)^{1/2}}_{\in\mathscr{B}(\mathscr{H})},$$

$$A(Q_3,t)^2(H+\imath)^{-1/2}\in\mathscr{B}(\mathscr{H}),$$

jsou podle Lemmatu 2.25 operátory $A(Q_3,t)^2$ a $A(Q_3,t)\cdot P$ H-omezené s relativní mezí menší než 1 pro libovolné α v (2.64). Podle Katovy-Rellichovy věty E.8 je potom

$$H(t)=\frac{1}{2m}(P-A(Q_3,t))^2+V \tag{2.66}$$

samosdružený operátor na $\operatorname{dom}H(t)=\operatorname{dom}H$. Protože v tomto případě platí předpoklady Věty 2.1 existuje unitární propagátor U a je dán jednoznačně.

Tvrzení 2.35: *Platí*

(i)

$$e^{-\imath\omega L_3s}U(s+\tau,s)e^{\imath\omega L_3s}=U(\tau,0),\forall s\ \in\mathbb{R}. \tag{2.67}$$

(ii) $\mathcal{U}(t):=e^{-\imath\omega L_3t}U(t,0)$ *je silně spojitá jednoparametrická grupa.*

Důkaz. pro $\tau=0$ rovnice (2.67) zřejmě platí. Využijme jednoznačnosti zaručené Větou 2.1 a rovnice (2.1) v tvrzení téže věty.

$$\imath\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}e^{-\imath\omega L_3s}U(s+\tau,s)e^{\imath\omega L_3s}=e^{-\imath\omega L_3s}H(s+\tau)U(s+\tau,s)e^{\imath\omega L_3s}=$$
$$=H(\tau)e^{-\imath\omega L_3s}U(s+\tau,s)e^{\imath\omega L_3s},$$

kde poslední krok plyne ze sférické symetrie V a rovnice (2.65). Z jednoznačnosti U odtud plyne první část tvrzení.

$\mathcal{U}(t)$ je zřejmě silně spojitá. Navíc platí

$$\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(s)=e^{-\imath\omega L_3t}U(t,0)e^{-\imath\omega L_3s}U(s,0)=$$
$$=e^{-\imath\omega L_3t}e^{-\imath\omega L_3r}U(r+t,r)e^{\imath\omega L_3r}e^{-\imath\omega L_3s}e^{-\imath\omega L_3p}U(p+s,p)e^{-\imath\omega L_3p},$$

kde jsme použili první bod tvrzení, položíme-li $r=s$, $p=0$ dostaneme

$$\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(s)=e^{-\imath\omega L_3(t+s)}U(s+t,s)U(s,0)=\mathcal{U}(t+s).$$

□

Podle Stoneovy věty[8] tedy existuje právě jeden samosdružený operátor G takový, že $\mathcal{U}(t) = e^{-\imath G t}$. G je samosdruženým rozšířením operátoru $G_0 = H(0) + \omega L_3$, $\operatorname{dom} G_0 = \operatorname{dom} H \cap \operatorname{dom} L_3$. Dle definice je totiž $\psi \in \operatorname{dom} G$ právě tehdy když existuje limita

$$\imath \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(e^{-\imath\omega L_3 t}U(t,0)\psi - \psi\right) = G\psi. \tag{2.68}$$

Je-li $\psi \in \operatorname{dom} H \cap \operatorname{dom} L_3$, potom pro (2.68) dostáváme

$$G\psi = \imath \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[e^{-\imath\omega L_3 t}(U(t,0)\psi - \psi) + e^{-\imath\omega L_3 t}\psi - \psi\right] = (H(0) + \omega L_3)\psi, \tag{2.69}$$

kde jsme využili silné spojitosti $e^{-\imath\omega L_3 t}$.

Lemma 2.36: *Operátor*

$$F(|Q| < R)(G + \imath)^{-1} \tag{2.70}$$

je kompaktní pro libovolné $R > 0$.

Důkaz. Nejprve zaveďme označení

$$H(0) = H - \frac{1}{m}P \cdot A(Q_3, 0) + \frac{1}{2m}A(Q_3, 0)^2 =: H + \mathscr{A},$$

kde (vezmeme-li do úvahy (2.64))

$$\mathscr{A} = -2\alpha P_1 \cos k\ Q_3 - 2\alpha P_2 \sin k\ Q_3 + \alpha^2.$$

A na $\operatorname{dom} H \cap \operatorname{dom} L_3$ podle (2.69) platí

$$\mathscr{A} + \omega L_3 = G - H.$$

Buď nyní $\phi \in \operatorname{dom} L_3$, potom $(H + \imath)^{-1}\phi \in \operatorname{dom} H$ a protože $[L_3, H] = 0$ je i $(H + \imath)^{-1} \in \operatorname{dom} L_3$. Dále

$$\begin{aligned}(G + \imath)^{-1}\phi &= (H + \imath)^{-1}\phi - (H + \imath)^{-1}\phi + (G + \imath)^{-1}\phi = \\ &= (H + \imath)^{-1}\phi - (G + \imath)^{-1}\left[G - H\right]\underbrace{(H + \imath)^{-1}\phi}_{\in \operatorname{dom} H \cap \operatorname{dom} L_3} = \\ &= (H + \imath)^{-1}\phi - (G + \imath)^{-1}(\mathscr{A} + \omega L_3)(H + \imath)^{-1}\phi.\end{aligned}$$

Abychom dokázali kompaktnost (2.70) stačí ukázat kompaktnost $f(Q)(G + \imath)^{-1}$ kde $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ a je sféricky symetrická. K tomu stačí zkoumat $(G + \imath)^{-1}f(Q)$, tedy

$$\begin{aligned}(G + \imath)^{-1}f(Q) = (H + \imath)^{-1}f(Q) - (G + \imath)^{-1}\omega L_3(H + \imath)^{-1}f(Q) - \\ -(G + \imath)^{-1}\mathscr{A}(H + \imath)^{-1}f(Q).\end{aligned} \tag{2.71}$$

Ukažme, že $\mathscr{A}(H + \imath)^{-1/2}$ je omezený. To plyne z toho, že $\operatorname{ran}(H_0 + \imath)^{-1/2} = \operatorname{dom} H_0^{1/2} \subset \operatorname{dom} P_j$, $j \in \hat{3}$, Věty o uzavřeném grafu a rovnosti

$$\mathscr{A}(H + \imath)^{-1/2} = \mathscr{A}(H_0 + \imath)^{-1/2}\underbrace{(H_0 + \imath)^{1/2}(H + \imath)^{-1/2}}_{\in \mathscr{B}(\mathscr{H}),\ \text{viz } L2.34}.$$

[8] viz [JB93] Věta 11.1.2

Takže třetí člen v (2.71) je roven

$$\underbrace{(G+\imath)^{-1}\mathscr{A}(H+\imath)^{-1/2}}_{\text{omezené}}(H+\imath)^{-1/2}(H_0+\imath)^{1/2}(H_0+\imath)^{-1/2}f(Q)$$

a $(H_0+\imath)^{-1/2}f(Q)$ je kompaktní dle Lemmatu D.1. Podobně díky Lemmatu D.1 je kompaktní i první člen v (2.71).

Ukažme kompaktnost druhého členu v (2.71). Platí

$$Q_1P_2f(Q)(H+\imath)^{-1} = P_2(H+\imath)^{-1/2}\times$$
$$\times\left\{(H+\imath)^{-1/2}Q_1f(Q)+(H+\imath)^{-1/2}\left[(H+\imath)Q_1f(Q)-Q_1f(Q)(H+\imath)\right](H+\imath)^{-1}\right\}.$$

První výraz ve složené závorce je kompaktní, opět díky Lemmatu D.1 a Lemmatu 2.34. Druhý výraz je úměrný, až na faktor $\frac{1}{2m}$, výrazu

$$(H+\imath)^{-1/2}\left[P^2,Q_1f(Q)\right](H+\imath)^{-1} =$$
$$=(H+\imath)^{-1/2}\left(-\triangle\left(Q_1f(Q)\right)-2\imath\bigtriangledown\left(Q_1f(Q)\right)\cdot P\right)(H+\imath)^{-1}$$

Výrazy jsou opět kompaktní díky tomu, že f má kompaktní nosič a díky Lemmatu D.1. Obdobné se ukáže kompaktnost výrazu s Q_2P_1 v (2.71). Takže

$$L_3f(Q)(H+\imath)^{-1}$$

je kompaktní. Sdružením a položením $\imath\to-\imath$ dostaneme, že

$$(H+\imath)^{-1}f(Q)L_3 = L_3(H+\imath)^{-1}f(Q)$$

je kompaktní. Využili jsme komutativity L_3 s H a $f(Q)$. □

Z Tvrzení 2.35 je vidět Floquetův tvar propagátoru

$$U(t,0)=P(t)e^{-\imath Gt}=e^{\imath\omega L_3t}e^{-\imath Gt}.$$

Lemma 2.36 implikuje kompaktnost operátoru

$$F(|Q|<R)P(t)(G+\imath)^{-1}=P(t)F(|Q|<R)(G+\imath)^{-1},\ R>0.$$

Podle Tvrzení 2.22 nyní platí

Věta 2.37: *Buď $U(t,s)$ unitární propagátor generovaný* (2.66) *a $\mathscr{H}^p_\pm$, $\mathscr{M}^{bd}_\pm$ a $\mathscr{M}^f_\pm$ příslušné podprostory. Potom*

$$\mathscr{H}^p_\pm=\mathscr{M}^{bd}_\pm=\mathscr{H}^{pp}(G),$$
$$\mathscr{M}^f_\pm=\mathscr{H}^{cont}(G),$$

a tedy

$$\mathscr{M}^f_\pm\oplus\mathscr{M}^{bd}_\pm=\mathscr{H}.$$

Věta 2.38: *V případě $k = 0$, $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2$ platí*

$$G = \frac{1}{2m}(P - \alpha(\cos\omega t, -\sin\omega t, 0))^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 Q^2 + \omega L_3.$$

Může nastat jedna ze čtyř možností

(i) $\omega_1 > \omega$*: G je omezený zdola a má čistě bodové spektrum.*

(ii) $\omega_1 = \omega$*: G má absolutně spojité spektrum, $\sigma_{ac}(G) = \mathbb{R}$.*

(iii) $\omega_1 < \omega$*, $\frac{\omega_1}{\omega}$ je racionální: G má čistě bodové spektrum, vlastní hodnoty jsou ekvidistantní a mají nekonečnou degeneraci.*

(iv) $\omega_1 < \omega$*, $\frac{\omega_1}{\omega}$ je iracionální: G má úplnou množinu vlastních vektorů, vlastní hodnoty tvoří hustou podmnožinu $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Kanonickou transformací

$$Q_1 = \tfrac{1}{2}(Q_+ + Q_-), \qquad P_1 = \tfrac{1}{2}(P_+ + P_-),$$

$$Q_2 = \tfrac{1}{2m\omega_1}(P_- - P_+), \quad P_2 = \tfrac{m\omega_1}{2}(Q_+ - Q_-),$$

dostaneme

$$G = \frac{\omega_1 + \omega}{2\omega_1}\left(\frac{P_+^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2}{2}Q_+^2\right) + \frac{\omega_1 - \omega}{2\omega_1}\left(\frac{P_-^2}{2m}\frac{m\omega_1^2}{2}Q_-^2\right) -$$
$$-\frac{\alpha}{2m}(P_+ + P_-) + \frac{P_3^2}{2m} + \frac{m\omega_1 Q_3^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2m}.$$

Pokud je $\omega_1 = \omega$ máme

$$G = \left(\frac{P_+^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q_+^2\right) - \frac{\alpha}{2m}(P_+ + P_-) + \frac{P_3}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q_3^2 + \frac{\alpha^2}{2m}$$

a protože je

$$e^{\imath Q_- s}\,(P_-)\,e^{-\imath Q_- s} = e^{\imath s\ \ \mathrm{ad}_{Q_-}} P_- = P_- - s$$

invokujeme

$$e^{\imath Q_- s} G e^{-\imath Q_- s} = G + \frac{\alpha s}{2m}.$$

Díky této unitární ekvivalenci je tedy $\sigma(G) = \sigma(G) + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Takže musí být $\sigma_{ac}(G) = \mathbb{R}$, $\sigma_{pp}(G) = \emptyset$, G je tedy absolutně spojitý.

Uvažujme nyní případ $\omega_1 \neq \omega$. Potom

$$G = \frac{\omega_1 + \omega}{2\omega_1}\left[\frac{1}{2m}\left(P_+ - \frac{\alpha\omega_1}{\omega + \omega_1}\right)^2 + \frac{m\omega_1^2}{2}Q_+^2\right] +$$
$$+\frac{\omega_1 - \omega}{2\omega_1}\left[\frac{1}{2m}\left(P_- - \frac{\alpha\omega_1}{\omega_1 - \omega}\right)^2 + \frac{m\omega_1^2}{2}Q_-^2\right] + \frac{1}{2m}P_3^2 + \frac{m\omega_1^2}{2}Q_3^2 + \text{const.}$$

Protože Q_+, Q_-, Q_3 a $P_+ - \frac{\alpha\omega_1}{\omega_1+\omega}$, $P_- - \frac{\alpha\omega_1}{\omega_1-\omega}$, P_3 jsou opět kanonické proměnné a existuje úplná množina vlastních vektorů G s vlastními hodnotami

$$\frac{\omega_1+\omega}{2}n_+ + \frac{\omega_1-\omega}{2}n_- + \omega_1 n_3 + \text{const},\ n_+, n_-, n_3 \in \mathbb{N}_0. \tag{2.72}$$

Odtud je vidět, že v případě $\omega_1 > \omega$ je G zdola omezený a má čistě diskrétní spektrum, takže $\mathscr{H}_\pm^p = \mathscr{M}_\pm^{bd} = \mathscr{H}$ (viz Věta 2.37).

Pokud je $\omega_1 < \omega$ přepišme (2.72) na

$$\frac{\omega}{2}\left(\frac{\omega_1}{\omega}(n_+ + n_- + n_3)\right) + \frac{1}{2}\omega n_+ + \omega_1 n_3.$$

Je-li ω_1/ω iracionální, pak podle Důsledku C.8 je tato množina hustá v $\mathbb{R}$. Naopak je-li ω_1/ω racionální platí tvrzení (iv) věty díky Důsledku C.5. □

3.
Obecná časová závislost

V této kapitole se budeme zabývat otázkou charakterizace vázaných a volných stavů pro časově závislé systémy. Buď U silně spojitý unitární propagátor generovaný časově závislým Hamiltoniánem $H(t)$ na separabilním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Jedním z možných přístupů je uvažovat množiny $\mathscr{H}^f_\pm(U)$ a $\mathscr{H}^p_\pm(U)$ zavedené v Kapitole 2.1. Tamtéž jsme dokázali, že tyto množiny tvoří uzavřené ortogonální podprostory. Otázkou zůstává platí-li rozklad

$$\mathscr{H}^p_\pm(U) \oplus \mathscr{H}^f_\pm(U) = \mathscr{H}. \tag{3.1}$$

V příkladu kvaziperiodicky narušeného harmonického operátoru v Kapitole 4 je tento rozklad splněn, avšak v Příkladu na konci této kapitoly již neplatí.

Dalším možným přístupem je definovat následující množiny. Uvažme tzv. „abstraktní energii“, čili neomezený pozitivní samosdružený operátor $A : \operatorname{dom} A \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, s čistě bodovým spektrem, $A\varphi_n = \lambda\varphi_n$, $0 \le \lambda_n \le \lambda_{n+1}$. Dále předpokládejme (pro jednoduchost), že $\operatorname{dom} A$ je $U(t,0)$-invariantní pro všechna $t \ge 0$, takže

$$E^A_\varphi(t) := \langle U(t,0)\varphi, AU(t,0)\varphi\rangle \tag{3.2}$$

je konečná pro všechna $t \ge 0$.

Definice 3.1: *Buď $U(t,s)$ propagátor působící na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$.*

(i) $\mathscr{S}^{bd}(A) := \{\varphi \in \operatorname{dom} A \mid$ *funkce* $t \mapsto E^A_\varphi(t)$ *je omezená*$\}$,

(ii) $\mathscr{S}^{un}(A) := \operatorname{dom} A \cap \mathscr{S}^{bd}(A)^\perp$.

Platí následující věta spojující oba pohledy.

Věta 3.2: *Buď A s vlastnostmi uvedenými výše. Potom*

(i) $\mathscr{S}^{bd}(A) \subset \mathscr{H}^p_\pm(U)$,

(ii) $\operatorname{dom} A \cap \mathscr{H}^f_\pm(U) \subset \mathscr{S}^{un}(A)$.

Důkaz. (i) Buď $\varphi \in \mathscr{S}^{bd}(A)$, potom existuje $M > 0$ takové, že $E^A_\varphi(t) \le M$ pro všechna $t \ge 0$. Protože $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ je báze $\mathscr{H}$ lze psát

$$\varphi(t) := U(t,0)\varphi = \sum_n a_n(t)\varphi_n,\ a_n(t) = \langle U(t,0)\varphi, \varphi_n\rangle.$$

Potom

$$\lambda_N \sum_{n\ge N} |a_n(t)|^2 \le \sum_n \lambda_n |a_n(t)|^2 = \sum_n \underbrace{\lambda_n \langle U(t,0)\varphi, \varphi_n\rangle}_{\langle U(t,0)\varphi, A\varphi_n\rangle} \langle \varphi_n, \underbrace{U(t,0)\varphi\rangle}_{\sum_l a_l(t)\varphi_l} =$$

$$= \sum_n \langle U(t,0)\varphi, A\varphi_n\rangle a_n(t) = \langle U(t,0)\varphi, A\, U(t,0)\varphi\rangle \le M.$$

Neboť A je neomezený operátor je $\lim_{N\to\infty}\lambda_N = \infty$, takže pro $\varepsilon > 0$ existuje $N(\varepsilon)$ takové, že

$$\sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_n(t)|^2 < \varepsilon,\ \forall t \geq 0.$$

Označme P_ϵ ortogonální projektor na $\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{N(\varepsilon)}$. Potom

$$\|P_\epsilon\varphi(t) - \varphi(t)\|^2 = \sum_{n=1+N(\varepsilon)^\infty} |a_n(t)|^2 < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Takže $\{U(t,0)\varphi \geq 0\}$ je libovolně přesně aproximována prekompaktní množinou a je tedy prekompaktní. Tedy $\varphi \in \mathscr{H}^p_\pm(U)$.

(ii) Z bodu (i) plyne, že $\mathscr{H}^p_\pm(U)^\perp \subset \mathscr{S}^{bd}(A)^\perp$. Navíc víme, že $\mathscr{H}^p_\pm(U) \perp \mathscr{H}^f_\pm(U)$, takže

$$\mathscr{S}^{un}(A) \supset \mathrm{dom}\, A\ \cap \mathscr{S}^{bd}(A)^\perp \supset \mathrm{dom}\, A\ \cap \mathscr{H}^p_\pm(U)^\perp \supset \mathrm{dom}\, A\ \cap \mathscr{H}^f_\pm(U).$$

□

Z Věty 3.2 plyne zajímavý důsledek pro dynamicky stabilní Hamiltoniány.

Definice 3.3: *Časově závislý Hamiltonián nazveme dynamicky stabilní, právě když pro všechny* $\psi \in \mathrm{dom}\, H(0)$ *je*

$$\sup_t \|H(t)U(t,0)\psi\| < \infty. \tag{3.3}$$

Důsledek 3.4: *Buď* $H(t) = H + V(t)$ *kde* $H = H(0)$, $\sup_t \|V(t)\| = M < \infty$, V *je* T*-periodický a* H *je poloomezený s diskrétním spektrem.*

(i) Pokud je $\psi \in \mathrm{dom}\, H$ *takové, že platí* (3.3)*, potom* $\psi \in \mathscr{H}^{pp}(U(T,0))$.

(ii) Je-li $H(t)$ *dynamicky stabilní, potom* $\mathrm{dom}\, H \subset \mathscr{H}^{pp}(U(T,0))$.

Důkaz. Bod (ii) zřejmě plyne z bodu (i). Věty 3.2 a 2.8 tvrdí, že $\mathscr{S}^{bd}(H) \subset \mathscr{H}^p_\pm(U) = \mathscr{H}^{pp}(U(T,0))$. Buď $\psi \in \mathrm{dom}\, H$ splňující (3.3). Potom

$$|E^H_\psi(t)| = |\langle U(t,0)\psi, HU(t,0\psi)\rangle| \leq |\langle U(t,0)\psi, H(t)U(t,0)\psi\rangle| + |\langle U(t,0)\psi, V(t)U(t,0)\psi\rangle| \leq$$
$$\leq \|\psi\| \underbrace{\|H(t)U(t,0)\psi\|}_{<N} + \|\psi\|^2 \underbrace{\|V(t)\|}_{<M}.$$

Takže E^H_ψ je omezená a tedy $\psi \in \mathscr{S}^{bd}(H) \subset \mathscr{H}^{pp}(U(T,0))$. □

Na závěr zmiňme ještě jednu možnou definici stabilních a nestabilních stavů která nevyužívá spektrálních vlastností jistých operátorů. Buď $\psi \in \mathscr{H}$ netriviální a uvažme autokorelační funkci

$$C_\psi(t) := \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \langle U(s,0)\psi, U(t+s,0)\psi\rangle \mathrm{d}s. \tag{3.4}$$

Pokud limita existuje, lze použít Bochnerovu větu a zjistit, že existuje nezáporná míra σ_ψ, tzv. autokorelační míra taková, že

$$C_\psi(m) = \int_0^{2\pi} e^{-\imath\lambda m} \mathrm{d}\sigma_\psi(\lambda). \tag{3.5}$$

Řekneme, že ψ patří do stabilního podprostoru pokud je σ_ψ je čistě bodová a do nestabilního podprostoru pokud je σ_ψ čistě spojitá.

Anomální příklad

V této podkapitolce ukážeme příklad časově závislého systému v němž neplatí rozklad (3.1) a spočteme autokorelační míry, které nastíní důvody tohoto selhání.

Buď $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost taková, že $\varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$. Uvažme Hamiltonián

$$H(t) = P^2 + Q\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\delta(t-n), \tag{3.6}$$

působící na $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mathrm{d}x)$. Mezi n-tým a $(n+1)$-tým kopnutím je propagátor dán

$$U(n, 0) = V_n V_{n-1} \cdots V_1,$$

kde $V_j = e^{-\imath P^2} e^{-\imath\varepsilon_j Q}$ a mezi kopnutími se systém vyvíjí volně. Nyní vhodně zvolíme posloupnost $\{\varepsilon_n\}$. Buď $\psi_s(x) = e^{-\imath s\ x}$ vlastní vektor nenarušeného Hamiltoniánu P^2, $P^2\psi_s = s^2\psi_s$ a označme $\Gamma_j = \sum_{i=1}^{j}\varepsilon_i$. Protože

$$\underbrace{e^{-\imath P^2}e^{-\imath\varepsilon_j Q}}_{V_j}\psi_s = e^{-i(s+\varepsilon_j)^2}\psi_{s+\varepsilon_j}$$

je

$$U(n,0)\psi_s = \exp\left[-\imath\sum_{j=1}^{n}(\Gamma_j + s)^2\right]\psi_{\Gamma_n+s},$$
$$\langle U(n,0)\psi_s, P^2U(n,0)\psi_s\rangle = (\Gamma_n + s)^2.$$

Označme

$$u_n := \begin{cases} 4(10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10), & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

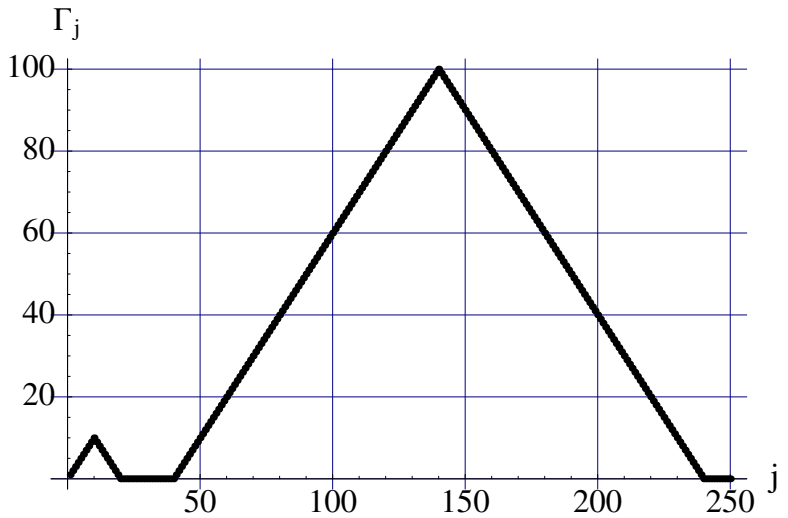
a volme

$$\varepsilon_j := \begin{cases} 1, & j \in A_n := [u_n + 1, u_n + 10^{n+1}), \\ -1, & j \in B_n := [u_n + 1 + 10^{n+1}, u_n + 2\cdot 10^{n+1}), \\ 0, & j \in C_n := [u_n + 1 + 2\cdot 10^{n+1}, u_{n+1}]. \end{cases}$$

Posloupnost $\{\Gamma_j\}$ pro takto zvolená ε_j je znázorněna na Obrázku 3.1. Zřejmě $\varepsilon_j = 0$ právě když $j \in C_n$ a tedy i $\Gamma_j = 0$ právě když $j \in C_n$. Buď ψ_s jako výše a P_s Ortogonální projektor na span ψ_s, potom

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\|P_sU(t,0)\psi_s\|^2\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|P_sU(j,0)\psi_s\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle U(j,0)\psi_s, P_sU(j,0)\psi_s\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j\in C_k}^{n}1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}(\#A_k + \#B_k + \#C_k)}\sum_{k=0}^{n-1}\#C_k = \frac{1}{2}.$$



Obrázek 3.1: Posloupnost Γ_j

Takže $\psi_s \notin \mathscr{H}^f_\pm(U)$ protože P_s je kompaktní. $\{\psi_s | s \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormální báze $\mathrm{L}^2([0,2\pi],\ \mathrm{d}x)$, tedy $\mathscr{H}^f_\pm(U) = \{0\}$.

Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq s$ existuje $j \in \mathbb{N}$ takové že $U(j,0)\psi_s = e^{\imath\theta(s,m)\psi_m}$ není množina $\{U(t,0)\psi_s | t \geq 0\}$ prekompaktní. Tedy $\psi_s \notin \mathscr{H}^p_\pm(U)$ a tedy stejně jako výše $\mathscr{H}^p_\pm(U) = \{0\}$. Označme v tomto případě $\mathscr{H} = \mathscr{H}^a(U)$, tzv. U-neobvyklý podprostor, takže v tomto příkladě máme rozklad

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}^f_\pm(U) \oplus \mathscr{H}^p_\pm(U) \oplus \mathscr{H}^a(U). \tag{3.7}$$

Struktura $\mathscr{H}^a(U)$ bude nastíněna pomocí autokorelačních funkcí. Pro ψ_s je (3.4) rovna

$$\begin{aligned} C_{\psi_s}(m) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{p=0}^{N-1} \langle U(p,0)\psi_s, U(p+m,0)\psi_s\rangle = \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{p=0}^{N-1} \delta_{\Gamma_p,\Gamma_{p+m}} \exp\left[-\imath \sum_{j=1+p}^{p+m} (\Gamma_j + s)^2\right]. \end{aligned}$$

$\Gamma_p = \Gamma_{p+m}$ ve dvou situacích. Za prvé pokud p i $p+m$ patří do C_n, tato situace nastává pro velká N přibližně $N/2$-krát. Druhá situace nastává pro dané m pokud $p = u_n + 10^{n+1} - m/2$, pro velké n pro C_n jen jednou. Jelikož je $n/u_n \to \infty$ při $n \to \infty$ tento případ do $C_{\psi_s}(m)$ nepřispívá. Potom

$$\frac{1}{u_N}\sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{p\in C_n \\ (p+m)\in C_n}} \delta_{\Gamma_p,\Gamma_{p+m}} \exp\Big(-\imath \sum_{j=1+p}^{p+m} s^2\Big) = \frac{1}{u_N}\sum_{n=1}^{N} (\#C_n - m)\exp(-\imath m s^2) =$$

$$= \exp(-\imath m s^2)\frac{1}{u_N}\left[\sum_{n=1}^{N}(\#C_n) - Nm\right] \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2}\exp(-\imath m s^2).$$

Tedy

$$\sigma_{\psi_s} = \frac{1}{2}(\lambda + \delta_{s^2}),$$

kde λ je Lebesgueova míra a δ_{s^2} je jednotková hmota v $s^2 \mod 2\pi$. Autokorelační míra je tedy součtem čistě bodové a čistě absolutně spojité části pro libovolné ψ_s.

4.
Kvaziperiodický příklad

Uvažme příklad kvaziperiodicky časově závislého harmonického oscilátoru s Hamiltoniánem

$$H(t) = H_\omega + f(t)Q, \tag{4.1}$$

kde $H_\omega = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2$ a $f(t) = A\ \sin\omega_1 t + B\cos\omega_2 t$. Unitární propagátor byl spočten, viz Kapitola 2.4.

Přímým výpočtem dostaneme pro libovolná A, B následující případy

(i) $\omega_1, \omega_2 \neq \omega$:

$$\varphi_2(t,0) = \frac{A}{\omega^2-\omega_1^2}(\omega\sin\omega_1 t - \omega_1\sin\omega t) + \frac{B\omega}{\omega^2-\omega_2^2}(\cos\omega_2 t - \cos\omega t),$$

(ii) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$:

$$\varphi_2(t,0) = \frac{1}{2}(B\sin\omega t - A\ \cos\omega t)t + \frac{A}{2\omega}\sin\omega t,$$

(iii) $\omega_1 \neq \omega_2 = \omega$:

$$\varphi_2(t,0) = \frac{Bt}{2}\sin\omega t + \frac{A}{\omega_2^2-\omega_1^2}(\omega\sin\omega_1 t - \omega_1\sin\omega t),$$

(iv) $\omega_2 \neq \omega_1 = \omega$:

$$\varphi_2(t,0) = -\frac{At}{2}\cos\omega t + \frac{B}{2\omega}\sin\omega t + \frac{B\omega}{\omega^2-\omega_2^2}(\cos\omega_2 t - \cos\omega t).$$

Takže podle Tvrzení 2.26 je jedině v případě (i) $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\pm^p = \mathscr{M}_\pm^{bd}$ a $\mathscr{H}_\pm^f = \mathscr{M}_\pm^f = \{0\}$. V ostatních případech (ii)-(iv) jsou $\varphi_2(t,0)$ neomezené a dle Lemmatu 2.27 je $\mathscr{M}_\pm^f = \mathscr{H}$, $\mathscr{M}_\pm^{bd} = \mathscr{H}_\pm^p = \{0\}$ stejně jako v případě AC Starkova efektu (viz Kapitola 2.4).

V tomto případě, kdy je aspoň jedna z ω_i rovna ω, je též $\mathscr{H}_\pm^f = \mathscr{H}$. Skutečně, buďte K kompaktní operátor, $\psi_a \in \mathscr{T}$ (viz (2.55)). Potom pro $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ tak, že

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|KU(t,0)\psi_a\|^2\ \mathrm{d}t \le \|K\|^2\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\left[\int_{B_R}\exp\Big(-\omega\big(x+\frac{\varphi_2(t,0)}{\omega}-a\cos\omega t\big)\Big)\ \mathrm{d}x+\varepsilon\right]\ \mathrm{d}t \le$$

$$\le \|K\|^2\left[C\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \exp(-\omega(|\phi(t)|-R)^2)\ \mathrm{d}t+\varepsilon\right],$$

kde $\phi(t) = tf(t) + g(t)$, kde f, g jsou omezené a f je $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periodická a spojitá. Podle Lemmatu 2.27 je pro τ dostatečně velké první výraz v hranaté závorce menší než ε. Takže pro libovolné $\psi_a \in \mathscr{T}$ je

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|K\ U(t,0)\psi_a\|^2 \ \mathrm{d}t = 0,$$

pro libovolný kompaktní operátor K. Jelikož je $\mathscr{T}$ totální a $\mathscr{H}_\pm^f$ je uzavřený podprostor je $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\pm^f$. Celkem jsme tedy dokázali, že pro kvaziperiodicky narušený harmonický oscilátor (4.1) mohou nastat následující případy:

(i) $\omega_1, \omega_2 \neq \omega$:

$$\mathscr{M}_\pm^{bd} = \mathscr{H}_\pm^p = \mathscr{H},$$
$$\mathscr{M}_\pm^f = \mathscr{H}_\pm^f = \{0\}.$$

(ii) Pro nějaké i je $\omega_i = \omega$:

$$\mathscr{M}_\pm^{bd} = \mathscr{H}_\pm^p = \{0\},$$
$$\mathscr{M}_\pm^f = \mathscr{H}_\pm^f = \mathscr{H}.$$

Takže i v tomto kvaziperiodickém příkladě platí rozklady

$$\mathscr{M}_\pm^f \oplus \mathscr{M}_\pm^{bd} = \mathscr{H}_\pm^f \oplus \mathscr{H}_\pm^p = \mathscr{H}.$$

Tvrzení 4.1: *Pro Hamiltonián* (2.42) *platí, že pro libovolné* $\varphi \in \operatorname{dom} H_\omega$ *je* $E_\varphi^{H_\omega}$ *omezená respektive neomezená, právě když je* $\varphi_2(t,0)$ *omezená respektive neomezená.*

Důkaz. Pro $\psi \in \operatorname{dom} H_\omega$ platí

$$E_\psi^{H_\omega}(t) = \langle U(t,0)\psi, H_\omega U(t,0)\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi, P(t)^2\psi\rangle + \frac{1}{2}\omega\langle\psi, Q(t)^2\psi\rangle.$$

Odtud a z (2.49) plyne, že $E_\psi^{H_\omega}$ je omezená právě když $\varphi_2(t,0)$ je omezená. □

V tomto kvaziperiodickém příkladě tedy platí i rozklady

(i) $\omega_1, \omega_2 \neq \omega$:

$$\mathscr{S}^{bd}(H_\omega) = \operatorname{dom} H_\omega,$$
$$\mathscr{S}^{un}(H_\omega) = \{0\}.$$

(ii) Pro nějaké i je $\omega_i = \omega$:

$$\mathscr{S}^{bd}(H_\omega) = \{0\},$$
$$\mathscr{S}^{un}(H_\omega) = \operatorname{dom} H_\omega.$$

Dodatky

A. Integrace operátorových funkcí

Věta A.1: *Buď $A : [a, b] \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ silně spojité zobrazení. Potom je vztahem*

$$\langle \varphi, B\psi \rangle = \int_a^b \langle \varphi, A(t)\psi \rangle \, \mathrm{d}t, \ \forall \varphi, \psi \in \mathscr{H} \tag{A.1}$$

jednoznačně určen omezený lineární operátor B. Zapisujeme

$$B = \int_a^b A(t) \, \mathrm{d}t. \tag{A.2}$$

Důkaz. Ze silné spojitosti A a principu stejnoměrné omezenosti plyne, že

$$\sup_{t \in [a,b]} \|A(t)\| = M < \infty.$$

Označme

$$\beta(\varphi, \psi) := \int_a^b \langle \varphi, A(t)\psi \rangle \, \mathrm{d}t, \ \forall \varphi, \psi \in \mathscr{H}.$$

Ze stejnoměrné omezenosti a Schwarzovi nerovnosti ihned plyne

$$|\beta(\varphi, \psi)| \leq M(b-a)\|\varphi\|\|\psi\|.$$

Buď nyní $\psi \in \mathscr{H}$ libovolné pevné, potom $\varphi \mapsto \beta(\varphi, \psi)$ je omezený lineární funkcionál a podle Rieszovy věty tak existuje právě jeden vektor $\eta \in \mathscr{H}$ tak, že $\forall \varphi \in \mathscr{H}$ je $\beta(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \eta \rangle$. Zobrazení $B : \psi \mapsto \eta$ je lineární a omezené, neboť

$$\|B\psi\|^2 = |\langle B\psi, B\psi \rangle| = \left| \int_a^b \langle B\psi, A(t)\psi \rangle \, \mathrm{d}t \right| \leq \|B\psi\| M(b-a)\psi. \tag{A.3}$$

Je-li $\|B\psi\| \neq 0$, pak $\forall \psi \in \mathscr{H}$ je $\|B\psi\| \leq M(b-a)\|\psi\|$ a tedy $\|B\| \leq M(b-a)$, což dokazuje omezenost operátoru B. Přesněji je z (A.3) vidět, že

$$\|B\| \leq \int_a^b \|A(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

□

Poznámka A.2: Platí

$$\int_a^b \|A(t)\psi\|^2 \,\mathrm{d}t = \int_a^b \langle \psi, A(t)^* A(t)\psi\rangle = \tag{A.4}$$

$$= \left\langle \psi, \int_a^b A(t)^* A(t) \,\mathrm{d}t\psi \right\rangle \leq \left\| \int_a^b A(t)^* A(t) \,\mathrm{d}t \right\| \|\psi\|^2. \tag{A.5}$$

A dále je-li $A = \int_a^b A(t) \,\mathrm{d}t$ potom pro $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$

$$BA = \int_a^b BA(t) \,\mathrm{d}t, \; AB = \int_a^b A(t)B \,\mathrm{d}t,$$

protože pro $\psi, phi \in \mathscr{H}$

$$\langle \phi, \int_a^b BA(t) \,\mathrm{d}t\psi\rangle = \int_a^b \langle B^*\phi, A(t)\psi\rangle = \langle \phi, BA\psi\rangle.$$

Druhá rovnost se dokáže podobně.

Lemma A.3: *Buďte $A : \mathbb{R} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ silně spojitá operátorová funkce a C kompaktní operátor na $\mathscr{H}$. Potom je $t \mapsto A(t)^* C A(t)$ spojitá v operátorové normě.*

Důkaz. Protože kompaktní operátor lze libovolně přesně aproximovat konečnědimenzionálními operátory, stačí pro ověření tvrzení věty uvažovat jednodimenzionální kompaktní operátor C. Potom existují $\phi, \eta \in \mathscr{H}$ tak, že $C = \langle \phi, \cdot\rangle\eta$, takže

$$A(t)^* C A(t) = \langle A(t)^*\phi, \cdot\rangle A(t)^*\eta$$

je spojitá v normě díky silné spojitosti A. □

Lemma A.4: *Buď $A : [a, b] \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ spojitá v normě, potom integrál*

$$B = \int_a^b A(t) \,\mathrm{d}t$$

existuje v Riemannově smyslu. Je-li navíc $A(t)$ kompaktní pro všechna t je i B kompaktní.

Důkaz. Označme ν rozdělení intervalu $[a, b]$, $a = \nu_0 < \cdots < \nu_n = b$ a

$$B_\nu = \sum_{i=1}^n A(\tilde{\nu}_i)(\nu_i - \nu_{i-1}), \; \tilde{\nu}_i \in [\nu_{i-1}, \nu_i]. \tag{A.6}$$

Jelikož je A spojitá v operátorové normě na uzavřeném intervalu je i stejnoměrně spojitá, takže pro libovolné ϵ existuje δ tak, že pro $u, v \in [a, b]$ taková že $|u - v| < \delta$ je

$$\|A(u) - A(v)\| \leq \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Potom $B_\nu \to B$ v operátorové normě pokud $d(\nu) = \max_{i\in\hat{n}}(\nu_i - \nu_{i-1}) \to 0$, protože

$$\|B_\nu - B_\mu\| \leq \sum_j \|A(\sigma'_j) - A(\sigma''_j)\|(\sigma_j - \sigma_{j-1}),\ \sigma'_j, \sigma''_j \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j],$$

a kde σ je společné zjemnění μ a ν. $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je úplný takže existuje $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ tak, že $B_\nu \to B$.

Je-li $A(t)$ kompaktní je B libovolně přesně aproximován operátory typu (A.6), které jsou kompaktní, a tedy i B je kompaktní. □

B. Floquetův tvar

Lemma B.1: *Buď U unitární operátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Potom existuje samosdružený operátor A takový, že $U = e^{\imath A}$.*

Důkaz. Podle spektrálního teorému pro unitární operátory existuje pro U rozklad jedničky na jednotkové kružnici v komplexní rovině S_1 tak, že

$$U = \int_{z \in S_1} z \, \mathrm{d}P_z. \tag{B.1}$$

Zvolme $z_0 \in S_1 \setminus \sigma_p(U)$. Zobrazení $\mathbb{R} \leftrightarrow S_1 \setminus z_0$ je vzájemně jednoznačné a substitucí v (B.1) dostaneme

$$U = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath\lambda} \mathrm{d}\tilde{P}_\lambda.$$

Definujeme-li $A := \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}\tilde{P}_\lambda$ je potom $U = e^{iA}$. Operátor A není dán jednoznačně (volnost v aditivní konstantě, konkrétně v celočíselných násobcích 2π). □

Věta B.2: *Buď $U(t,s)$ T-periodický unitární propagátor. Potom lze psát*

$$U(t,0) = P(t) \exp(-iGt), \tag{B.2}$$

kde G je samosdružený operátor a P silně spojitá T-periodická operátorová funkce splňující

$$P(nT) = 1, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{B.3}$$

Zápisu (B.2) *se říká Floquetův tvar unitárního propagátoru.*

Důkaz. $U(T,0)$ je unitární operátor a podle Lemmatu B.1 existuje samosdružený operátor G takový, že $U(T,0) = e^{-\imath GT}$. Položme $P(t) := U(t,0)e^{\imath GT}$, potom

$$P(t+T) = U(t+T,0)e^{\imath G(t+T)} = U(t+T,0)U(T,0)^{-1}e^{\imath Gt} = U(t,0)e^{\imath Gt} = P(t)$$

a navíc $U(t,0) = P(t)e^{-\imath Gt}$. □

Věta B.3: *Buď A samosdružený operátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Potom*

$$\mathscr{H}^{pp}(A) = \mathscr{H}^{pp}(e^{\imath A}), \tag{B.4}$$

$$\mathscr{H}^{cont}(A) = \mathscr{H}^{cont}(e^{\imath A}). \tag{B.5}$$

Důkaz. Rovnost (B.5) plyne z (B.4). Inkluze $\mathscr{H}^{pp}(A) \subset \mathscr{H}^{pp}(e^{\imath A})$ plyne z faktu, že je-li ψ vlastní vektor A s vlastní hodnotou λ je i vlastním vektorem $e^{\imath G}$ s vlastní hodnotou $e^{\imath\lambda}$.

Dokažme nyní inkluzi $\mathscr{H}^{pp}(e^{\imath A}) \subset \mathscr{H}^{pp}(A)$. Je-li tedy ψ vlastním vektorem $\mathscr{H}^{pp}(e^{\imath A})$ s vlastní hodnotou $e^{\imath\sigma}$ ($e^{\imath A}$ je unitární) pak je

$$e^{\imath(A-\sigma)}\psi = \psi.$$

Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat že ψ je vlastním vektorem A s vlastní hodnotou 1. A je samosdružený operátor a proto existuje rozklad jednotky P_λ tak že

$$A \ = \int \lambda \mathrm{d}P_\lambda.$$

Ukažme že pro $k \in \mathbb{Z}$, a a, b taková, že

$$2\pi k \ < a < b < 2\pi(k+1)$$

je $P([a,b))\psi = 0$. Položme

$$B := P([a,b))e^{\imath A} = \int\limits_{[a,b)} e^{\imath\lambda}\mathrm{d}P_\lambda.$$

Pro spektrum B platí

$$\sigma(B) \subset \left\{e^{\imath\lambda}\middle|\lambda \in [a,b]\right\} =: M_{ab}$$

a díky volbě a, b je $1 \notin M_{ab}$, takže ani $1 \notin \sigma(B)$, ale

$$BP([a,b))\psi = P([a,b))\psi,$$

takže musí být $P([a,b))\psi = 0$.

Odtud plyne, že

$$A\psi = \int \lambda \mathrm{d}P_\lambda\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\pi k \ P(\{2\pi k\ \})\psi.$$

Protože pro libovolné μ je $P(\{\mu\})\psi$ buď nulový vektor nebo vlastní vektor A s vlastní hodnotou μ je hledaná inkluze dokázána.

□

C.
Číselně teoretický výsledek

Lemma C.1: *Buďte $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Pokud $d \mid a$ a $d \mid b$, potom pro libovolné $x, y \in \mathbb{Z}$ je $ax + by$ dělitelné d.*

Tvrzení C.2: *Buďte $a, b \in \mathbb{Z}$ aspoň jedno nenulové. Potom největší společný dělitel a a b existuje a je dán jednoznačně.*

Důkaz:

(i) Existence: Označme $S = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Tato množina je určitě neprázdná a obsahuje kladná čísla. Buď d nejmenší kladné číslo v S. Existují tedy $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ tak, že $d = a\mu + b\nu$.

Dále existují $q \in \mathbb{Z}$ a $0 \leq r < d$ tak, že $a = qd + r$. Potom

$$r = a - dq = a(1 - q\mu) + b(-q\nu).$$

Tedy $r \in S$, ale protože $0 \leq r < d$ a d je nejmenší kladné číslo v S musí být nutně $r = 0$. Jinými slovy $d \mid a$.

Zcela analogicky dostaneme, že $d \mid b$. Pokud nyní $c \mid a$ a $c \mid b$ potom $c \mid d$ (Lemma C.1, $d = a\mu + b\nu$). d je proto největším společným dělitelem a a b.

(ii) Jednoznačnost: nechť $e = \mathrm{nsd}(a, b)$, potom $e \mid d$ ale i $d \mid e$, takže $e = d$.

□

Důsledek C.3: *Buďte $a, b \in \mathbb{Z}$ aspoň jedno nenulové. Potom existují $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ tak, že* $\mathrm{nsd}(a, b) = a\mu + b\nu$.

Důkaz: Přímý důsledek důkazu Tvrzení C.2. □

Tvrzení C.4: *Buďte $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Rovnice $ax + by = c$ má celočíselné řešení, právě když* $\mathrm{nsd}(a, b)$ *dělí c. Jsou-li x_0 a y_0 řešení potom*

$$y = x_0 + \frac{b}{\mathrm{nsd}(a, b)}t, \;\; y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{nsd}(a, b)}t, \tag{C.1}$$

kde $t \in \mathbb{Z}$ je libovolné, jsou všechna další řešení.

Důkaz:

$\Rightarrow$: Nechť tedy existují $x, y \in \mathbb{Z}$ tak, že $ax + by = c$ a označme $d = \mathrm{nsd}(a, b)$. Potom díky Lemmatu C.1 d dělí c.

$\Leftarrow$: Podle Důsledku C.3 existují $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ tak, že $d = a\mu + b\nu$. Neboť $d \mid c$ je

$$c = \tilde{c}d = \tilde{c}(a\mu + b\nu) = a\tilde{c}\mu + b\tilde{c}\nu.$$

Buďte x_0 a y_0 řešení. Je zřejmé že (C.1) jsou opět řešení pro libovolné $t \in \mathbb{Z}$. Předpokládejme že r a s jsou další řešení. Potom platí

$$0 = c - c = ar + bs - (ax_0 + by_0) = a(r - x_0) + b(s - y_0),$$

tedy

$$\frac{a}{d}(r - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - s), \tag{C.2}$$

kde $d = \text{nsd}(a, b)$. Neboť $\text{nsd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ musí $\frac{a}{d} \mid (y_0 - s)$, tj. $y_0 - s = \frac{a}{d}t$. Proto

$$r - x_0 = \frac{d}{a}\frac{b}{a}(y_0 - s) = \frac{b}{a}\frac{a}{d}t = \frac{b}{d}t.$$

Celkem tedy $r = x_0 + \frac{b}{d}t$. Z rovnice (C.2) analogicky obdržíme $s = y_0 - \frac{a}{d}t$ □

Důsledek C.5: *Buďte $a, b \in Z$, $\gamma = \text{nsd}(a, b)$. Potom $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \gamma\mathbb{Z}$.*

Důkaz: Ukažme obě inkluze:

$\subset$: zřejmé, opět Lemma C.1.

$\supset$: hledáme celočíselné řešení rovnice $\gamma n = ax + by$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Protože $\text{nsd}(a, b) = \gamma$ dělí $n\gamma$ má podle Tvrzení C.4 rovnice celočíselné řešení a tedy $\gamma n \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

□

Věta C.6: *Buď α iracionální. Potom existuje nekonečně mnoho $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ takových, že*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{C.3}$$

Je-li α racionální, potom takových racionálních $\frac{p}{q}$ splňujících (C.3) *existuje konečně mnoho.*

Důkaz: Buď $Q \in \mathbb{N}$. Uvažme [1] množinu $Q + 1$ čísel

$$M = \{0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{Q\alpha\}\} \subset [0, 1).$$

Rozdělme interval $[0, 1)$ na Q disjunktních intervalů

$$[0, 1) = \bigcup_{j=1}^{Q} \left[\frac{j-1}{Q}, \frac{j}{Q}\right).$$

Existuje aspoň jeden interval obsahující aspoň dva body množiny M. Existují tedy $0 \leq k, l \leq Q$ taková, že $0 \leq \{k\alpha\} - \{l\alpha\} \leq \frac{1}{Q}$. Označme $q = k - l$. Potom

$$\{q\alpha\} = \{k\alpha\} - \{l\alpha\} \leq \frac{1}{Q}.$$

Označme dále $p = [q\alpha]$, platí

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{q}|q\alpha - p| = \frac{|\{q\alpha\}|}{q} \leq \frac{1}{qQ} < \frac{1}{q^2}. \tag{C.4}$$

[1] [] značí celou část a {} zbytek po dělení celou částí. Tedy $x = [x] + \{x\}$.

Předpokládejme nyní, že α je racionální, tj. $\alpha = \frac{a}{b}$, pokud $\alpha \neq \frac{p}{q}$ potom

$$\frac{1}{q^2} > \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq}.$$

Odtud tedy $b > q$, takových $\frac{p}{q}$ je však konečně mnoho.

Předpokládejme, že α je iracionální a že existuje konečně mnoho $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$ splňujících (C.3). Protože je α iracionální lze najít $Q \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| \geq \frac{1}{Q}, \ \forall j \in \hat{n}.$$

Což je spor s (C.4). □

Věta C.7: *Buď α iracionální, $\eta \in \mathbb{R}$ libovolné. Potom pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ existují $Q \in \mathbb{N}$, $Q > N$ a $P \in \mathbb{Z}$ tak, že*

$$|Q\alpha - P - \eta| < \frac{3}{Q}. \tag{C.5}$$

Důkaz: Buď $N \in \mathbb{N}$. Podle Věty C.6 existují $q > 2N$ a $p \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{q}.$$

Dále existuje $m \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$|\eta q - m| \leq \frac{1}{2}.$$

Protože $\mathrm{nsd}(p, q) = 1$ má rovnice $m = px - qy$ celočíselné řešení (Tvrzení C.4). A lze volit takové, že $|x| \leq \frac{1}{2}q$ (viz. (C.1)).

Potom

$$q(x\alpha - y - \eta) = q(x\alpha - \eta) + m - px = x(q\alpha - p) - (q\eta - m),$$

a tedy

$$|q(x\alpha - y - \eta)| < \frac{1}{2}q \cdot \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1.$$

Označme $Q = q + x$, $P = p + y$. Je tedy $N < \frac{1}{2}q \leq Q \leq \frac{3}{2}q$. Odtud

$$|Q\alpha - P - \eta| \leq |(x + q)\alpha - p - y - \eta| \leq |x\alpha - y - \eta| + |q\alpha - p| < \frac{2}{q} \leq 3Q, \ Q > N.$$

□

Důsledek C.8: *Buď q iracionální. Množina $M = \mathbb{N} - q\mathbb{N}$ je hustá v $\mathbb{R}$.*

D.
Kompaktní operátory

V tomto dodatku nejprve ukážeme jedno užitečné lemma umožňující rozhodnout o kompaktnosti jistých operátorových funkcí.

Lemma D.1: *(i) Buďte $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$. Potom jsou operátory $f(P)g(Q)$ a $g(Q)f(P)$ Hilbert-Schmidtovy (a tedy kompaktní).*

(ii) Pokud jsou f, g omezené, měřitelné na $\mathbb{R}^n$ a vymizí v nekonečnu, potom jsou operátory $f(P)g(Q)$ a $g(Q)f(P)$ kompaktní.

Důkaz. (i): Buď $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$, potom

$$\big(g(Q)f(P)\psi\big)(x) = g(x)\mathscr{F}^{-1}\big[f(p)\hat{\psi}(p)\big](x) = g(x)\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}p\cdot x} f(p)\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n y e^{-\mathrm{i}p\cdot y}\psi(y)\right)\mathrm{d}^n p = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n y \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} g(x)\hat{f}(y-x)}_{\mathscr{K}(x,y)}\psi(y),$$

kde $\mathscr{K} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x \mathrm{d}^n y)$, jak se lze snadno přesvědčit díky předpokladům. $g(Q)f(P)$ je tedy integrální operátor s integrabilním jádrem a proto je dokonce Hilbert-Schmidtův a tedy i kompaktní.

(ii): Označme pro $R > 0$

$$\left.\begin{array}{l} g_R(x) := \chi_R(x)g(x) \\ f_R(x) := \chi_R(x)f(x) \end{array}\right\} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x),$$

kde χ_R je charakteristická funkce koule B_R se středem v počátku a poloměrem $R > 0$. Potom pro $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$ a $R > 0$ platí

$$\|(g(Q) - g_R(Q))\psi\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x |g(x) - g_R(x)|^2 |\psi(x)|^2 \leq \sup_{x \in B_R^C} |g(x)|^2 \cdot \|\psi\|^2,$$

tedy

$$\|g(Q) - g_R(Q)\| \leq \sqrt{\sup_{x \in B_R^C} |g(x)|^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Podobně

$$\|(f(P) - f_R(P))\psi\|^2 = \|\mathscr{F}^{-1}(f - f_R)\hat{\psi}\|^2 \leq \sup_{p \in B_R^C} |f(p)|^2 \|\psi\|^2.$$

A protože zřejmě $\|g_R(Q)\| \leq \|g(Q)\|,\ \forall R > 0$ je

$$\|g(Q)f(P) - g_R(Q)f_R(P)\| \leq \|g(Q) - g_R(Q)\| \cdot \|f(P)\| + \|g(Q)\| \cdot \|f(P) - f_R(P)\|$$

a tedy

$$g_R(Q)f_R(P) \xrightarrow{\mathscr{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x))} g(Q)f(P).$$

Podle bodu (i) tohoto lemmatu jsou $g_R(Q)f_R(P)$ kompaktní operátory, takže i operátor $g(Q)f(P)$ je kompaktní.

□

V druhé části tohoto dodatku se budeme zabývat kompaktností maticových operátorů.

Definice D.2: *Buď $\{\tau_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, definujme operátor $T : \mathrm{l}^p \to \mathrm{l}^p$, $1 \leq p \leq \infty$ vztahem*

$$(Tu)_i := \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{ik}\xi_k,\ \{\xi_k\} \in \operatorname{dom} T$$

a

$$\operatorname{dom} T := \{u\ \in \mathrm{l}^p | Tu \in l^p\}.$$

Postačující podmínkou k tomu, aby operátor T definovaný výše byl omezený, je například požadavek aby existovaly kladné konečné konstanty M', M'' takové, že

$$\tau'_j := \sum_{k=1}^{\infty} |\tau_{jk}| \leq M',\ \forall j \in \mathbb{N},$$
$$\tau''_k := \sum_{j=1}^{\infty} |\tau_{jk}| \leq M'',\ \forall k\ \in \mathbb{N}.$$

Potom je

$$\|Tu\|_p \leq M'^{1-1/p} M''^{1/p} \|u\|_p \leq \max\{M', M''\}\|u\|_p.$$

Tvrzení D.3: *Uvažujme Hilbertův prostor l^2, potom platí následující tvrzení*

(i) Buď T diagonální, tj. $(T_{ij}) = 0$ pro $i \neq j$ a nechť $\lim_{k\to\infty} |T_{kk}| = 0$ potom je T kompaktní.

(ii) Maticový operátor A daný maticí

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} \frac{1 - \delta_{jk}}{j - k}$$

je omezený na l^2.

(iii) Operátor C daný maticí

$$C_{jk} = \frac{1}{j^{1/4}k^{1/4}} \frac{1 - \delta_{jk}}{j - k}$$

je kompaktní na l^2.

Důkaz. (i): Definujme konečnědimenzionální diagonální operátory T_k pomocí

$$T_{ij}^{(k)} := \begin{cases} \tau_{ij}, & i,j < k \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Potom

$$\|T - T_k\| \leq \sup_{j>k} |T_{jj}|^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

takže $T_k \to T$ v $\mathscr{B}(\mathrm{l}^2)$. Protože jsou všechny T_k konečnědimenzionální je T kompaktní.

(ii): Uvažme rozšíření operátoru A na $\mathrm{l}^2(\mathbb{Z})$ definované stejným předpisem a unitární transformaci

$$\mathrm{L}^2([-\pi,\pi],\ \mathrm{d}x) \to \mathrm{l}^2(\mathbb{Z}) : \psi(x) \mapsto \hat{\psi}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) e^{-\imath k\ x}\ \mathrm{d}x.$$

Inverzní zobrazení je dáno předpisem

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(k) e^{\imath k\ x}.$$

Transformace je unitární ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\imath kx}$ tvoří ortonormální bázi $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi],\ \mathrm{d}x)$). Platí

$$(\widehat{f\psi})(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\psi(x)e^{-\imath kx} = \frac{1}{2\pi} \sum_j \hat{\psi}(j) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{\imath(j-k)x}\ \mathrm{d}x = \sum_j \tilde{f}(k-j)\hat{\psi}(j),$$

kde

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\imath kx}\ \mathrm{d}x.$$

Pro $k \neq 0$ je

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-\imath kx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\imath}{k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{-\imath kx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\imath}{k} x e^{-\imath kx}\right]_{-\pi}^{\pi} \frac{\imath}{k} (-1)^k.$$

Tedy operátor $\tilde{A}$ násobení funkcí $f(x) = x$ na $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi],\ \mathrm{d}x)$ je unitárně ekvivalentní původnímu A a tedy $\|A\| = \|\tilde{A}\| = \pi$.

(iii): Protože operátor A v bodě (ii) tohoto tvrzení je omezený a diagonální operátor D daný elementy

$$D_{jk} = \frac{(-1)^k}{k^{1/4}} \delta_{jk}$$

je podle bodu (i) kompaktní, je i operátor $C = DAC$ kompaktní.

□

Definice D.4: *Buďte $\mathscr{X}$ Banachův prostor, A, T operátory na $\mathscr{X}$ (ne nutně se se stejným hodnotovým prostorem) s definičními obory* $\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} A$. *Nechť pro libovolnou posloupnost $\{u_n\} \subset \operatorname{dom} T$ takovou, že $\{u_n\}$ i $\{Tu_n\}$ jsou omezené, obsahuje $\{A\ u_n\}$ konvergentní podposloupnost. Potom řekneme, že A je relativně kompaktní vzhledem k T, nebo krátce T-kompaktní.*

Věta D.5: *Buďte A uzavřený a T samosdružený operátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Potom A je relativně kompaktní vzhledem k T právě když je*

$$TR_A(\imath) = T(A - \imath)^{-1}$$

kompaktní.

Důkaz.

- $\Leftarrow$: Nechť $TR_A(\imath)$ je kompaktní. Takže $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} T$. Uvažme $\{u_n\} \subset \operatorname{dom} A$ takovou, že $\{u_n\}$ a $\{A\ u_n\}$ jsou omezené. Potom je i $\{(A - \imath)u_n\}$ omezená. Díky kompaktnosti $TR_A(\imath)$ lze vybrat z $\{(A - \imath)u_n\}$ podposloupnost takovou, že $TR_A(\imath)(A - \imath)u_{n_k} = Tu_{n_k}$ je konvergentní.
- $\Rightarrow$: Je-li $\{u_n\} \subset \mathscr{H}$ omezená posloupnost, potom jsou i

  $$\{R_A(\imath)u_n\} \subset \operatorname{dom} A \text{ a } \{A\ R_A(\imath)u_n\}$$

  omezené posloupnosti takže existuje vybraná podposloupnost taková, že $TR_A(\imath)u_{n_k}$ je konvergentní, tedy $TR_A(\imath)$ je kompaktní.

□

Věta D.6: *Esenciální spektrum je stabilní vzhledem k relativně kompaktním poruchám. Přesněji buď T uzavřený operátor na Banachově prostoru $\mathscr{X}$ a buď A T-kompaktní. Potom*

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T + A).$$

Důkaz. Viz [Kat66] Theorem IV-5.35, strana 244. □

Důsledek D.7: *Buďte $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a nechť $A - B$ je kompaktní. Potom $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.*

Důkaz. Podle předpokladů je $A - B$ relativně kompaktní vzhledem k B, takže podle Věty D.6

$$\sigma_{ess}(B) = \sigma_{ess}(B + A - B) = \sigma_{ess}(A).$$

□

E.
Formy

V celém tomto dodatku buď $\mathscr{H}$ Hilbertův prostor.

Definice E.1: *Seskvilineární formou* $\mathfrak{t}$ *s definičním oborem* $\operatorname{dom}\mathfrak{t}$ *nazýváme zobrazení* $\mathfrak{t} : \operatorname{dom}\mathfrak{t} \times \operatorname{dom}\mathfrak{t} \to \mathbb{C}$*, které je antilineární v prvním a lineární v druhém argumentu. Říkáme že* $\mathfrak{t}$ *je hustě definována pokud* $\operatorname{dom}\mathfrak{t}$ *je hustá v* $\mathscr{H}$*.*

V dalším budeme uvažovat hustě definovanou seskvilineární formu $\mathfrak{t}$. $\mathfrak{t}[u] := \mathfrak{t}(u,u)$ nazýváme kvadratickou formou formy $\mathfrak{t}$. Formu $\mathfrak{t}$ nazýváme poloomezenou právě když $\mathfrak{t}[\varphi] \geq M\|\varphi\|^2$ pro všechna $\varphi \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}$.

Definice E.2: *Poloomezenou formu* $\mathfrak{t}$ *s mezí* M *nazýváme uzavřenou, právě když je* $\mathscr{H}_\mathfrak{t} = \operatorname{dom}\mathfrak{t}$ *úplný vzhledem k normě*

$$\|\psi\|_\mathfrak{t} := \sqrt{\mathfrak{t}[\psi] + (1-M)\|\psi\|}.$$

Lemma E.3: *Poloomezená forma* $\mathfrak{t}$ *je uzavřená, právě když pro libovolnou posloupnost* $\{\varphi_n\} \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}$ *takovou, že* $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{H},\ n} \varphi$ *a* $\mathfrak{t}[\varphi_n - \varphi_m] \xrightarrow{n,m} 0$*, je* $\varphi \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}$ *a* $\mathfrak{t}[\varphi_n - \varphi] \to 0$*.*

Buď A samosdružený poloomezený operátor s mezí M na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Potom podle spektrálního teorému existuje rozklad jedničky P_λ tak, že

$$A \ = \int \lambda \mathrm{d}P_\lambda.$$

Definujme obor formy operátoru A

$$\mathrm{Q}(A) := \left\{\psi \in \mathscr{H} \middle| \int_{\mathbb{R}} |\lambda| \mathrm{d}\langle\psi, P_\lambda\psi\rangle < \infty\right\}$$

a kvadratickou formu $\mathfrak{t}_A$ příslušnou operátoru A následovně

$$\mathfrak{t}_A := \int \lambda \mathrm{d}\langle\psi, P_\lambda\psi\rangle.$$

Pokud je $\psi \in \operatorname{dom}A \ \subset \mathrm{Q}(A)$ potom $\mathfrak{t}_A[\psi] = \langle\psi, A\psi\rangle$.

Lemma E.4: *Forma* $\mathfrak{t}_A$ *příslušející samosdruženému a poloomezenému operátoru* A *s mezí* M *definovaná výše je poloomezená s mezí* M *a uzavřená.*

Důkaz. Ukažme poloomezenost. Podle předpokladů je $\sigma(A) \subset [M, \infty)$, takže pro $\psi \in \mathrm{Q}(A)$ je

$$0 \leq \int_M^\infty (\lambda - M)\mathrm{d}\langle\psi, P_\lambda\psi\rangle = \mathfrak{t}_A[\psi] - M\|\psi\|^2,$$

odkud plyne hledaná nerovnost.

Dále ověřme uzavřenost. Uvažme operátor $B = \sqrt{A - M} = \int \sqrt{\lambda - M} \mathrm{d}P_\lambda$, který je uzavřený a[1] $\mathrm{dom}\, B = Q(A)$. Takže pro libovolné $\psi \in Q(A)$ platí

$$\|\psi\|^2 + \|B\psi\|^2 = \|\psi\|^2 + \int (\lambda - M) \mathrm{d}\langle \psi, P_\lambda \psi \rangle = \mathfrak{t}_A[\psi] + (1 - M)\|\psi\|^2 \equiv \|\psi\|^2_{\mathfrak{t}_A}. \qquad \text{(E.1)}$$

Protože je B uzavřený je jeho graf $\Gamma(B) = \{(\phi, B\phi) | \phi \in \mathrm{Q}(A)\}$ uzavřený a proto je $\mathrm{Q}(A)$ úplný vzhledem k normě v (E.1). □

Lemma E.5: *Buďte* $\mathfrak{t}$ *a* $\mathfrak{s}$ *uzavřené a poloomezené formy s definičními obory* $\mathrm{dom}\, \mathfrak{t}$ *a* $\mathrm{dom}\, \mathfrak{s}$. *Definujme formu* $\mathfrak{q} = \mathfrak{t} + \mathfrak{s}$ *na* $\mathrm{dom}\, \mathfrak{q} = \mathrm{dom}\, \mathfrak{t} \cap \mathrm{dom}\, \mathfrak{s}$ *a předpokládejme, že* $\mathrm{dom}\, \mathfrak{q}$ *je hustý. Potom je* $\mathfrak{q}$ *uzavřená a poloomezená.*

Důkaz. Poloomezenost je zřejmá. Uzavřenost plyne přímočaře z Lemmatu E.3. □

Na závěr zde připomeňme některé věty používané v Kapitole 2.6. Důkazy a další podrobnosti lze nalézt například v [MR75], Kapitola X.2 a [Kat66] Kapitola VI, §2.

Věta E.6 (KLMN)**:** *Buď* A *pozitivní samosdružený operátor a* $\mathfrak{q}$ *symetrická kvadratická forma na* $\mathrm{Q}(A)$ *taková, že*

$$|\mathfrak{q}[\psi]| \leq a\langle \psi, A\psi \rangle + b\|\psi\|^2, \ \forall \psi \in \mathrm{dom}\, A$$

pro nějaké $a < 1$ *a* $b \in \mathbb{R}$. *Potom existuje právě jeden samosdružený operátor* C *s* $\mathrm{Q}(C) = \mathrm{Q}(A)$ *a*

$$\mathfrak{t}_C(\varphi, \psi) = \mathfrak{t}_A(\varphi, \psi) + \mathfrak{q}(\varphi, \psi), \ \forall \varphi, \psi \in \mathrm{Q}(C),$$

C *je zdola omezený* $-b$.

Definice E.7: *Buďte* A *a* B *hustě definované operátory na Hilbertově prostoru* $\mathscr{H}$. *Předpokládejme, že*

(i) $\mathrm{dom}\, A \ \subset \mathrm{dom}\, B$,

(ii) Pro nějaké $a, b \in \mathbb{R}$ *a všechna* $\psi \in \mathrm{dom}\, A$ *je*

$$\|B\psi\| \leq a\|A\ \psi\| + b\|\psi\|.$$

Potom B *nazveme* A*-omezeným. Infimum všech* a *splňujících výše uvedenou podmínku se nazývá relativní mez* B *vzhledem k* A. *Je-li relativní mez rovna* 0 *říkáme, že* B *je infinitesimálně malý vzhledem k* A *a píšeme* $B \ll A$.

Věta E.8 (Katova-Rellichova)**:** *Buďte* A *samosdružený,* B *symetrický operátor a předpokládejme že* B *je* A*-omezený s relativní mezí* $a < 1$. *Potom* $A + B$ *je samosdružený na* $\mathrm{dom}\, A$ *a je-li* A *zdola omezený je i* $A + B$ *zdola omezený.*

Věta E.9 (Reprezentační)**:** *Je-li* $\mathfrak{t}$ *symetrická, hustě definovaná, uzavřená a omezená zdola potom existuje právě jeden samosdružený operátor* T *takový, že*

(i) $\mathrm{dom}\, T \subset \mathrm{dom}\, \mathfrak{t}$ *a*

$$\mathfrak{t}(\psi, \phi) = \langle \psi, T\phi \rangle, \ \psi \in \mathrm{dom}\, \mathfrak{t}, \ \phi \in \mathrm{dom}\, T.$$

[1] viz důkaz Lemmatu 2.34.

(ii) Pokud $\psi \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}$ *a* $\phi \in \mathscr{H}$ *jsou taková, že*

$$\mathfrak{t}(\eta, \psi) = \langle \eta, \phi \rangle, \ \forall \eta \in \operatorname{dom} T,$$

potom $\psi \in \operatorname{dom} T$ *a* $T\psi = \phi$.

T je dán jednoznačně podmínkou (i).

Rejstřík

U-kompaktnost, 14
časově omezená energie, 15

autokorelační funkce, 40
autokorelační míra, 41

bodová část, 1

dynamicky stabilní Hamiltonián, 40

Floquetův operátor, 5
Floquetův tvar, 5, 48
forma
    operátoru, 57
    poloomezená, 57
    seskvilineární, 57
    uzavřená, 57

operátor monodromie, 5

relativní kompaktnost, 1, 56

spojitá část, 1
stavy
    geometricky neomezené, 14
    geometricky omezené, 13
    s prekompaktní trajektorií, 6

věta
    abstraktní RAGE, 15
    Katova-Rellichova, 58
    KLMN, 58
    RAGE, 1

Literatura

[dO95] C.R. de Oliveira, *Some remarks concerning stability for nonstationery quantum systems*, J. Stat. Phys. **78** (1995), 1055–1066.

[Ens83] V. Enss, *Propagation properties of quantum scattering states*, J. Func. Anal. **46** (1983), 219–251.

[JB93] M. Havlíček J. Blank, P. Exner, *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Univerzita Karlova, 1993.

[Kat66] Tosio Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, 1966.

[MR75] B. Simon M. Reed, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, 1975.

[Rud03] Walter Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, 2003.

[Smi73] V. I. Smirnov, *Lehrgang der höheren mathematik*, Dt. Verl. der Wissenschaften, Berlin, 1973.

[VE83] K. Veselič V. Enss, *Bound states and propagating states for time-dependent hamiltonians*, Ann. Inst. H. Poincaré **39** (1983), 159–191.