Příklad.
Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \cos\sqrt{\ln^2 x}\ \mathrm{d}x.$$

Řešení. Definiční obor integrandu je $\mathbb{R}^+$. Funkce $\cos$ je sudá, takže $\cos z = \cos|z|$ pro každé z . Proto

$$\int \cos\sqrt{\ln^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \cos|\ln x|\ \mathrm{d}x = \underset{\substack{\ln x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t}}{\int \cos\ln x\ \mathrm{d}x} = \int \cos t\cdot e^t\ \mathrm{d}t.$$

Poslední integrál vypočteme integrací po částech:

$$\underbrace{\int \cos t\cdot e^t\ \mathrm{d}t}_{I} = \cos t\cdot e^t + \int \sin t\cdot e^t\ \mathrm{d}t = \cos t\cdot e^t + \sin t\cdot e^t - I,$$

odkud

$$I = \frac{1}{2}\left(\cos t\cdot e^t + \sin t\cdot e^t\right).$$

Původní integrál je proto roven

$$\int \cos\sqrt{\ln^2 x}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x).$$

Primitivní funkci jsme nalezli na $\mathbb{R}^+$.

□

Příklad.
Vypočtěte zobecněný integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}}.$$

Řešení. Je

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^x}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2[\operatorname{arctg} t]_0^{+\infty} = \pi.$$

$$\sqrt{e^x-1} = t \Leftrightarrow e^x = t^2+1$$
$$\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

□

Příklad.
Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n\sin^2 n}{n^2+1}.$$

Řešení. Protože zlomek v sumandu je nezáporný, jedná se o řadu se střídavými znaménky. Využijeme vztah $\sin^2 n = \frac{1-\cos 2n}{2}$. Díky němu lze přepsat

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n\sin^2 n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n\cos 2n}{n^2+1},$$

což je rozdíl dvou konvergentních řad. První řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ konverguje totiž podle Leibnizova kritéria, neboť funkce $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ je na $\langle 1, +\infty)$ ostře klesající, jak ukážeme snadno např. výpočtem

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ pro } x > 1.$$

Druhá řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n\cos 2n}{n^2+1}$ konverguje podle Dirichletova kritéria: posloupnost $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{+\infty}$ je monotónní a její limita je zřejmě rovna 0 , a řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cos 2n$ má omezenou posloupnost částečných součtů: je

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(\cos 2k + i\sin 2k) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{-(\cos 2 + i\sin 2)}_{q}\Big)^k = \operatorname{Re} q\frac{q^n-1}{q-1},$$

takže

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k\right| \leq \left|q\frac{q^n-1}{q-1}\right| \leq \frac{2}{|q-1|}.$$

Co se týče absolutní konvergence, opět využijeme přepis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\sin^2 n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos 2n}{n^2+1}.$$

Jedná se o rozdíl podstatně divergentní a konvergentní řady: řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$ podstatně diverguje, neboť má stejný charakter jako harmonická řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos 2n}{n^2+1}$ konverguje podle Dirichletova kritéria (posloupnost $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{+\infty}$ je monotónní a její limita je zřejmě rovna 0 , řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\cos 2n$ má omezenou posloupnost částečných součtů).

□

Příklad.

Určete a zdůvodněte pravdivost následujícího tvrzení: Nechť zobecněný integrál $\int\limits_0^{+\infty} f$ konverguje. Pak $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. (Návod: uvažujte $f(x) = \sin e^x$.)

Řešení. Tvrzení je nepravdivé. Pro uvedenou funkci totiž příslušný zobecněný integrál konverguje, je totiž

$$\int_0^{+\infty} \sin e^x \, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t,$$
$$e^x = t$$
$$e^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

poslední integrál konverguje podle Dirichletova kritéria. Přitom ale

$$\lim_{x \to +\infty} \sin e^x$$

neexistuje, jak lze snadno ukázat pomocí Heineovy věty volbou dvou posloupností $x_n^{(1)} = \ln\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ a $x_n^{(2)} = \ln 2n\pi$.

□

Příklad.

Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergují. Lze něco říci o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$? Změní se situace, pokud bude konvergence původních dvou řad absolutní?

Řešení. Pokud víme pouze, že řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergují, pak o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ nelze obecně nic říci. Zvolme například $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, pak řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergují podle Leibnizova kritéria, ale $a_n b_n = \frac{1}{n}$, tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ diverguje (je to harmonická řada). Naopak při volbě $a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$ je $a_n b_n = \frac{1}{n^4}$, řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ tedy konverguje (třeba podle integrálního kritéria). Zesílení předpokladu, tj. předpoklad absolutní konvergence obou řad, je postačující podmínkou pro absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$. Ze základní nutné podmínky konvergence dostáváme, že $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} |b_n| = 0$, a tedy od jistého indexu n_0 jsou členy posloupnosti $(|a_n|)$ a $(|b_n|)$ menší než 1 . Od tohoto indexu platí proto nerovnost

$$|a_n b_n| \leq \sqrt{|a_n||b_n|} \leq \frac{|a_n| + |b_n|}{2}$$

a tedy

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{+\infty} |b_n| \right) < +\infty.$$

□