Příklad.
Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\sin x}\ \mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrand je spojitá funkce na $\mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, proto k ní na této množině existuje primitivní funkce. Použijeme první substituční metodu.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

a po substituci $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = y$, $\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ přejde integrál na

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y|.$$

Proto

$$\int \frac{1}{\sin x}\ \mathrm{d}x = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|$$

na $\mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

□

Příklad.
Vypočtěte derivaci funkce

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Řešení. Pro $x \geq 0$ označme

$$G(x) = \int_0^{x} e^{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Pak pro $x > 0$ je

$$G'(x) = e^{x^2}$$

a tedy

$$F'(x) = \left(G(\sqrt{x})\right)' = G'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}.$$

V bodě 0 je

$$F'(0) = \lim_{x\to 0+} F'(x) = +\infty.$$

□

Příklad.
Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}.$$

Řešení. Je

$$\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi(n-1)\right) = \cos\frac{\pi n^2}{n+1}\cos\pi(n-1) + \sin\frac{\pi n^2}{n+1}\sin\pi(n-1) = \cos\frac{\pi n^2}{n+1}(-1)^{n+1},$$

takže řadu lze přepsat na tvar

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi(n-1)\right)}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n}.$$

Řada proto konverguje podle Abelova kritéria, neboť posloupnost $\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)_{n=2}^{+\infty}$ je monotónní, její limita je rovna 1 a řada $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln^2 n}$ konverguje podle Dirichletova kritéria.

Co se týče absolutní konvergence, řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}\right|$ diverguje, neboť ji lze srovnat třeba se zřejmě divergentní řadou $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$. Celkem je tedy konvergence původní řady pouze neabsolutní.

□

Příklad.

Určete a zdůvodněte pravdivost následujících tvrzení: a) Každá primitivní funkce k funkci, která je lichá na $\mathbb{R}$, je sudá. b) Každá primitivní funkce k funkci, která je sudá na $\mathbb{R}$, je lichá.
Řešení. a) Tvrzení je pravdivé. Označme F nějakou primitivní funkci k f na $\mathbb{R}$ a dále vezměme zúžení $G = F/_{\langle 0,+\infty)}$. Dodefinujeme-li pomocí vztahu $G(-x) = G(x)$ na celé $\mathbb{R}$, je G jistě primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ a je (z definice) sudá. Protože všechny primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ tím pádem musejí mít tvar $G + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta, a všechny funkce $G + C$ jsou také sudé, ukázali jsme, že skutečně každá primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ je sudá.
b) Tvrzení neplatí, je např. $\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 10$, přitom funkce $F(x) = \frac{x^3}{3} + 10$ zřejmě není lichá.

□

Příklad.

Nechť řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ konverguje. Lze něco říci o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$?
Řešení. Poměrně jednoduchý je případ, kdy je $a_n \in \mathbb{R}$. Pak $a_n^2 = |a_n|^2 \geq 0$ a podle nerovnosti

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

je

$$\frac{1}{n} \cdot |a_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |a_n|^2\right).$$

Protože $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, je podle srovnávacího kritéria (užitím nerovnosti výše) řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n}$ konvergentní a tedy řada v zadání $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ konverguje absolutně.

□