Řešení

Příklad.
Vypočtěte zobecněný integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Příklad lze řešit standardním rozkladem na parciální zlomky. Lepší je však tento postup. Především je jasné, že integrál konverguje (z limitního srovnávacího kritéria). Nejprve ukážeme, že integrály $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ a $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ jsou si rovny:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^{0} \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y^4}+1}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\mathrm{d}y.$$
$$y = \frac{1}{x}$$
$$\mathrm{d}y = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

Proto

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2+2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}y$$
$$y = x - \frac{1}{x}$$
$$\mathrm{d}y = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

□

Příklad.
Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. 0 je jediný kritický bod. Podle věty o substituci je

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = -\int_{+\infty}^{2} \frac{\sin t}{\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}\cdot t^2}\mathrm{d}t = -\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{t\ln t}\mathrm{d}t.$$
$$\frac{1}{x} = t$$
$$-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

Poslední integrál přitom podle Dirichletova kritéria konverguje, neboť funkce $\frac{1}{t\ln t}$ je zřejmě monotónní a $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t\ln t} = 0$ a $F(t) = \int_2^t \sin z\,\mathrm{d}z$ je omezená funkce.

Co se týče absolutní konvergence, podobně jako výše stačí díky substituci $\frac{1}{x} = t$ vyšetřovat konvergenci integrálu $\int\limits_2^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$. Z odhadu $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$ vidíme, že integrál diverguje, neboť $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t$ diverguje a integrál $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t\ln t}\mathrm{d}t$ konverguje (opět podle Dirichletova kritéria).
Závěr: integrál v zadání konverguje pouze neabsolutně.

□

Příklad.
Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 n}{\ln n}.$$

Řešení. Druhá mocnina i logaritmus jsou kladní, jedná se proto o řadu se střídavými znaménky. Použijme vztah $\cos^2 n = \frac{1+\cos 2n}{2}$. Řada $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ zřejmě konverguje podle Leibnizova kritéria. Řada $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos 2n}{\ln n}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť posloupnost $\left(\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \cos 2k\right)_{n=2}^{+\infty}$ je omezená (jak bychom ukázali snadno např. pomocí Moivreovy věty) a $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n=2}^{+\infty}$ je monotónní a má za limitu nulu.
Co se týče absolutní konvergence, použijeme stejný vztah, a dostaneme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{\ln n} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{\ln n}.$$

Řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ podstatně diverguje (srovnáním např. s harmonickou řadou). Řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{\ln n}$ je pak konvergentní podle Dirichletova kritéria (neboť řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \cos 2n$ má omez. posl. část. součtů).
Závěr: řada v zadání konverguje pouze neabsolutně.

□

Příklad.
Dokažte větu o nerovnostech pro určitý Riemannův integrál.
Řešení. Jedná se o toto tvrzení: Nechť f, g jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$ a $(\forall x \in \langle a, b\rangle)(f(x) \geq g(x))$. Pak platí

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g. \tag{1}$$

K důkazu použijeme základní lemma integrálního počtu. Zvolme libovolnou posloupnost (σ_n) rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ takovou, že $\lim_{n\to+\infty} \nu(\sigma_n) = 0$; označíme jako obvykle $\sigma_n = \{x_0^{(n)}, \dots, x_{m_n}^{(n)}\}$, kde $x_0^{(n)} = a < x_1^{(n)} < \dots < x_{m_n}^{(n)} = b$ (dělicí body $\tau_j^{(n)}$ jsou voleny libovolně, platí $x_{j-1}^{(n)} \leq \tau_j^{(n)} \leq x_j^{(n)}$). Pak platí pro všechna j a n

$$f(\tau_j^{(n)}) \geq g(\tau_j^{(n)}),$$

odkud

$$f(\tau_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) \geq g(\tau_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}),$$

takže i

$$\sum_{j=1}^{m_n} f(\tau_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) \geq \sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}),$$

odkud konečně limitním přechodem $n \to +\infty$ dostaneme .

□

Příklad.
Lze v podílovém kritériu v nelimitním tvaru (které říká „*pokud pro každé n platí podmínka* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *, pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *s kladnými členy diverguje*“) zaměnit „každé n “ za „nekonečně mnoho n “?
Řešení. Nelze. I když bude podmínka platit pro nekonečně mnoho n , divergenci řady to nezaručuje. Označme např. $a_{2n-1} = \frac{1}{2^n}$, $a_{2n} = \frac{2}{2^n}$. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jistě konverguje (její součet je $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^n}\right) = 1 + 2 = 3$), ale přitom pro lichá n je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \geq 1$.

□