

# **Počítačová analýza** **fraktálních množin**

**Petr Pauš**

**Výzkumný úkol**

**Školitel : Dr. Ing. Michal Beneš**

**Zaměření : Tvorba software**

**Katedra : KM**

**Akademický rok : 2004/2005**

**Rok studia : 4.**

# Obsah

<b>1.</b>	<b>ÚVOD</b> .....	<b>3</b>
<b>2.</b>	<b>HAUSDORFFOVA DIMENZE</b> .....	<b>4</b>
2.1	HAUSDORFFOVA MÍRA .....	4
2.2	HAUSDORFFOVA DIMENZE .....	8
2.3	VÝPOČET HAUSDORFFOVY MÍRY A DIMENZE .....	12
<b>3.</b>	<b>MŘÍŽKOVÁ DIMENZE (BOX-COUNTING DIMENSION)</b> .....	<b>15</b>
3.1	MŘÍŽKOVÁ DIMENZE.....	15
3.2	VZTAH MEZI MŘÍŽKOVOU A HAUSDORFFOVOU DIMENZÍ.....	18
3.3	VLASTNOSTI MŘÍŽKOVÉ DIMENZE.....	19
<b>4.</b>	<b>NUMERICKÝ VÝPOČET MŘÍŽKOVÉ DIMENZE</b> .....	<b>20</b>
4.1	POSTUP .....	20
4.2	KRUŽNICE, ČTVEREC A HRANICE ČTVERCE .....	21
4.3	MANDELBROTOVA MNOŽINA .....	24
4.4	JULIOVA MNOŽINA ( $C=-1+0i$ ).....	29
<b>5.</b>	<b>PROGRAMY</b> .....	<b>31</b>
5.1	GENERÁTOR MANDELBROTOVY MNOŽINY A MNOŽIN JULIOVÝCH .....	31
5.2	PROGRAM PRO VÝPOČET MŘÍŽKOVÉ DIMENZE .....	32
<b>6.</b>	<b>ZÁVĚR</b> .....	<b>34</b>
<b>7.</b>	<b>LITERATURA</b> .....	<b>35</b>

# 1. Úvod

Tato práce navazuje na moji rešeršní práci, která se týkala fraktálů a fraktálních množin obecně. Nyní jsem se zaměřil hlavně na fraktální dimenzi a její zjišťování pro různé množiny. Nejprve se budeme věnovat Hausdorffově dimenzi, protože ta je považována za základní fraktální dimenzi, takto ji označil ve svých pracích i Mandelbrot. Dále se budeme věnovat mřížkové (box-counting) dimenzi, teoreticky i prakticky.

Kapitola o Hausdorffově dimenzi obsahuje definice a věty o důležitých vlastnostech včetně důkazů. Uvedeny jsou též příklady výpočtu u několika množin. Hlavním zdrojem informací pro tuto kapitolu byly knihy [8] a [9]. Jedná se vlastně o výběr toho nejdůležitějšího z obou knih.

Další kapitoly jsou věnovány pouze mřížkové dimenzi a jejímu výpočtu. Definice a věty jsem čerpal hlavně z [9], kde je vše velmi přehledně popsáno. Informace o numerickém výpočtu mřížkové dimenze jsem získal z dokumentů [4] a [5] z VUT v Brně, kde se numerickému výpočtu mřížkové dimenze věnují a výsledky se snaží aplikovat v chemii a polygrafii.

Práce vznikla v rámci výzkumného záměru „Aplikovaná matematika v technických a fyzikálních vědách“, č. MSM 6840770010.

## 2. Hausdorffova dimenze

Pojem dimenze je při zkoumání fraktálů velmi důležitý. Jednou z nejstarších, avšak také jednou z nejdůležitějších dimenzí, je právě dimenze Hausdorffova. Je vhodná k práci z matematického hlediska, lze ji použít na libovolné množiny a je založena na mírách, se kterými se relativně lehce pracuje. Její hlavní nevýhodou je, že v některých případech je velmi obtížné spočítat její hodnotu.

### 2.1 Hausdorffova míra

Před definicí samotné Hausdorffovy dimenze je nutné zavést několik důležitých pojmů. Patří mezi ně hlavně Hausdorffova míra a Hausdorffova vnější míra. Podrobněji se o následujících pojmech hovoří v [8] a [9].

Nejprve si však připomeňme definici míry a vnější míry a několika dalších základních pojmů.

#### Definice 1 Míra

Nechť  $X$  je množina a nechť  $\mathcal{F}$  je  $\sigma$ -algebra podmnožin  $X$ . Míra na  $\mathcal{F}$  je množinová funkce  $\mathcal{M} : \mathcal{F} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  taková, že

1)  $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$ ;

2) Pokud  $A_n \in \mathcal{F}$  je disjunktí posloupnost množin, pak

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}(A_n)$$

#### Definice 2 Vnější míra

Nechť  $X$  je množina. Vnější míra na  $X$  je funkce  $\bar{\mathcal{M}}$  definovaná na všech podmnožinách množiny  $X$ , která zobrazuje do intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$  a zároveň platí:

1)  $\bar{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$ ;

2) Pokud  $A \subseteq B$ , pak  $\bar{\mathcal{M}}(A) \leq \bar{\mathcal{M}}(B)$ ;

3)  $\bar{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{M}}(A_n)$ .

#### Definice 3 Spočetné pokrytí

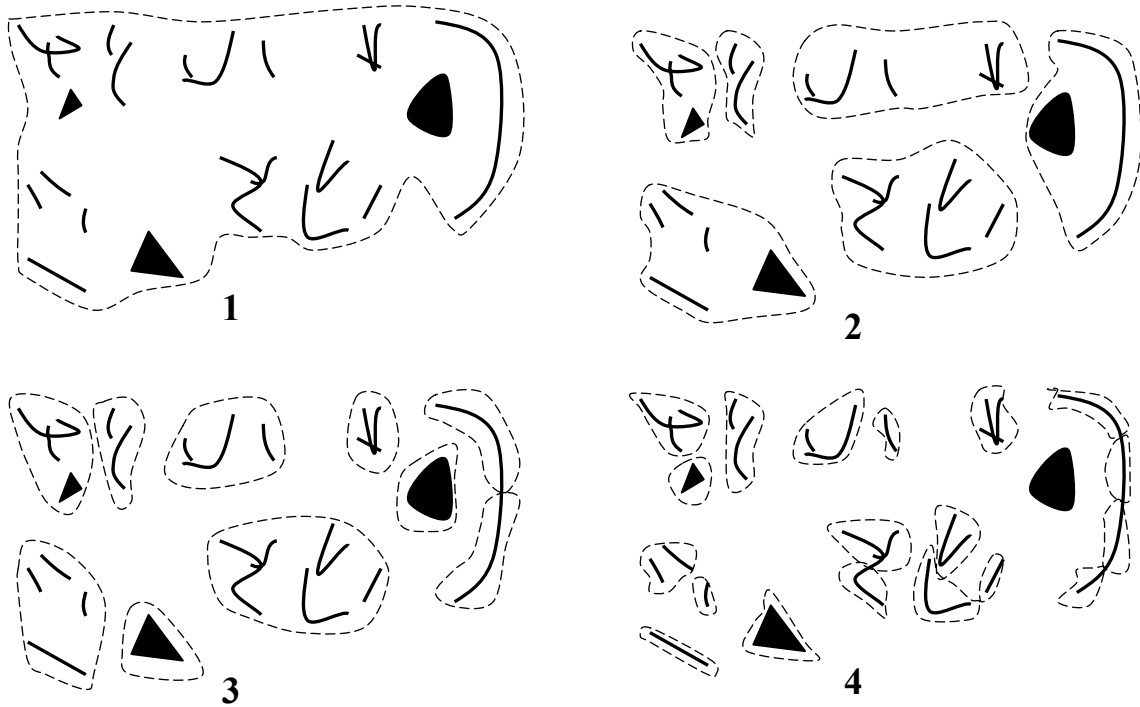
Množina množin  $\mathcal{A}$  se nazývá spočetné pokrytí množiny  $F$  právě tehdy, když

$$F \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$$

a  $\mathcal{A}$  je spočetná (často konečná) množina.

#### Definice 4 $\varepsilon$ -pokrytí

Nechť  $\varepsilon$  je kladné reálné číslo (často velmi malé). Pokrytí  $\mathcal{A}$  se nazývá  $\varepsilon$ -pokrytí, pokud platí  $\text{diam } A \leq \varepsilon$  pro všechny množiny  $A \in \mathcal{A}$ .



**Obrázek 1** Různá pokrytí množiny pro zmenšující se  $\varepsilon$ .

Nyní již máme definovány všechny potřebné pojmy a můžeme definovat Hausdorffovu míru.

**Definice 5** Hausdorffova  $s$ -rozměrná vnější míra

Definujeme

$$\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \inf \sum_{A \in \mathcal{A}} (\text{diam } A)^s$$

kde infimum je přes všechna spočetná  $\varepsilon$ -pokrytí  $\mathcal{A}$  množiny  $F$ . Když se  $\varepsilon$  bude zmenšovat, pak se  $\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$  bude zvyšovat, jelikož se sníží počet dostupných pokrytí. Má tedy smysl definovat

$$\bar{\mathcal{H}}^s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F),$$

což je Hausdorffova  $s$ -rozměrná vnější míra množiny  $F$ .

Značení:  $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$  se bude značit **vnější** míra ( $s$  pruhem) a  $\mathcal{H}^s(F)$  bude (obyčejná) míra (bez pruhu).

Hodnota limity je z intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$ , přičemž hodnot 0 a  $\infty$  nabývá velmi často. Hausdorffova míra zobecňuje obecný pojem délky, plochy a objemu. Dá se dokázat (důkaz například v [9]), že  $n$ -rozměrná Hausdorffova míra splývá s  $n$ -rozměrnou Lebesgueovou mírou. To znamená, že pro „běžné“ podmnožiny  $F \subset \mathbb{R}^n$  je  $\bar{\mathcal{H}}^0(F)$  rovna počtu bodů v množině  $F$ ,  $\bar{\mathcal{H}}^1(F)$  je délka hladké křivky  $F$ ,  $\bar{\mathcal{H}}^2(F) = (4/\pi) \cdot \text{plocha}(F)$  pokud  $F$  je hladká plocha a  $\bar{\mathcal{H}}^3(F) = (6/\pi) \cdot \text{objem}(F)$ .

V následujících větách budou uvedeny základní vlastnosti Hausdorffovy míry.

**Věta 1** Hausdorffova vnější míra  $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$  je opravdu vnější míra.

**Důkaz:** Musíme dokázat

$$1) \bar{\mathcal{H}}^s(\emptyset) = 0$$

Prázdnou množinu lze pokrýt jedinou množinou s diametrem  $0 < \varepsilon \leq \delta$ . Takže  $0 \leq \bar{\mathcal{H}}_\delta^s(\emptyset) \leq \varepsilon^s$  pro každé  $\varepsilon > 0$ . Z toho plyne, že  $\bar{\mathcal{H}}_\delta^s(\emptyset) = 0$ . Pak  $\bar{\mathcal{H}}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}_\delta^s(\emptyset) = 0$ .

$$2) F \subset G \Rightarrow \bar{\mathcal{H}}^s(F) \leq \bar{\mathcal{H}}^s(G)$$

Pokud  $F \subset G$ , pak každé  $\delta$ -pokrytí  $G$  je také  $\delta$ -pokrytí  $F$ . Pokud tedy vezmeme infimum přes všechna  $\delta$ -pokrytí, dostaneme  $\bar{\mathcal{H}}_\delta^s(F) \leq \bar{\mathcal{H}}_\delta^s(G)$  a pro  $\delta \rightarrow 0$  dostaneme  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) \leq \bar{\mathcal{H}}^s(G)$ .

3) Pokud  $A_1, A_2, \dots$  je spočetná (nebo konečná) posloupnost množin, pak

$$\bar{\mathcal{H}}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathcal{H}}^s(A_i).$$

Pokud jsou  $A_i$  disjunktní, pak nastává rovnost.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathcal{H}}_\delta^s(A_i) < \infty$ . Necht' pro každé  $\varepsilon > 0$  je

$\{U_{i,j} : j=1,2,\dots\}$   $\delta$ -pokrytí  $A_i$  takové, že  $\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } U_{i,j})^s \leq \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(A_i) + 2^{-i} \varepsilon$ .

Pak  $\{U_{i,j} : i=1,2,\dots; j=1,2,\dots\}$  je  $\delta$ -pokrytí  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

$$\bar{\mathcal{H}}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } U_{i,j})^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathcal{H}}_\delta^s(A_i) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathcal{H}}^s(A_i).$$

Toto celé platí pro libovolné  $\varepsilon > 0$ , takže

$$\bar{\mathcal{H}}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathcal{H}}^s(A_i). \quad \square$$

**Věta 2** Necht'  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Hodnota  $\bar{\mathcal{H}}^0(F)$  je rovna počtu bodů v množině  $F$ .

**Důkaz:** Necht'  $\{A_i\}$  je  $\delta$ -pokrytí  $F$ . Pro každou množinu  $A_i$  je  $|A_i|^0 = 1$  a  $\sum_i |A_i|^0$  je tím pádem počet množin v pokrytí. Takže  $\bar{\mathcal{H}}_\delta^0(F)$  je nejmenší počet množin tvořících pokrytí množiny  $F$ .

Pokud množina  $F$  obsahuje  $k$  bodů,  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , pak můžeme definovat  $\delta$ -pokrytí množiny  $F$  jako  $k$  koulí se středy v bodech  $x_i$  s poloměry  $\delta/2$ . Pak bude  $\bar{\mathcal{H}}_\delta^0(F) \leq k$ . Když  $\delta$  zvolíme tak malé, aby platilo  $|x_i - x_j| > \delta$  pro každé  $i \neq j$ , pak  $\bar{\mathcal{H}}_\delta^0(F) \geq k$ . Z toho tedy plyne, že  $\bar{\mathcal{H}}_\delta^0(F) = k$  a tedy  $\bar{\mathcal{H}}^0(F) = k$ .

Pokud množina  $F$  obsahuje nekonečně mnoho bodů, můžeme vždy vzít podmnožinu  $F_k$  množiny  $F$  tak, že obsahuje  $k$  bodů. Pak  $\bar{\mathcal{H}}^0(F) > \bar{\mathcal{H}}^0(F_k) = k$  a to pro libovolné  $k$ , tedy  $\bar{\mathcal{H}}^0(F) = \infty$ .  $\square$

**Věta 3** Pokud je  $F$  konečná množina, pak  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0$  pro každé  $s > 0$ .

**Důkaz:** Necht'  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , jako  $\varepsilon$ -pokrytí volme koule s poloměrem  $\varepsilon/2$  se středy v bodech  $x_i$ . Pak

$$\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) \leq \sum_{i=1}^k \varepsilon^s$$

pro libovolné  $\varepsilon > 0$ . Tím pádem pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  je  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0$ .  $\square$

**Věta 4** Necht'  $S$  je podobnostní transformace s měřítkem  $\lambda > 0$ . Pokud  $F \subset \mathbb{R}^n$ , pak  $\bar{\mathcal{H}}^s(S(F)) = \lambda^s \bar{\mathcal{H}}^s(F)$ .

**Důkaz:** Pokud  $\{U_i\}$  je  $\varepsilon$ -pokrytí  $F$ , pak  $\{S(U_i)\}$  je  $\lambda\varepsilon$ -pokrytí  $S(F)$ . Pak platí

$$\sum_i (\text{diam } S(U_i))^s = \lambda^s \sum_i (\text{diam } U_i)^s$$

z toho tedy

$$\bar{\mathcal{H}}_{\lambda\varepsilon}^s(S(F)) \leq \lambda^s \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F).$$

Pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostáváme  $\bar{\mathcal{H}}^s(S(F)) \leq \lambda^s \bar{\mathcal{H}}^s(F)$ . Pokud místo  $S$  vezmeme  $S^{-1}$ ,  $\lambda$  nahradíme za  $1/\lambda$  a  $F$  nahradíme za  $S(F)$ , dostaneme opačnou nerovnost.  $\square$

**Věta 5** Necht'  $F \subset \mathbb{R}^n$  a  $f: F \rightarrow \mathbb{R}^m$  je zobrazení takové, že pro konstanty  $c > 0$  a  $\alpha > 0$  platí

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (\forall x, \forall y \in F).$$

Pak pro každé  $s$  je

$$\bar{\mathcal{H}}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \bar{\mathcal{H}}^s(F).$$

**Důkaz:** Necht'  $\{U_i\}$  je  $\delta$ -pokrytí  $F$ . Z nerovnosti v předpokladu odvodíme, že

$$\text{diam } f(F \cap U_i) \leq c(\text{diam } F \cap U_i)^\alpha \leq c(\text{diam } U_i)^\alpha.$$

Z toho tedy plyne, že  $\{f(F \cap U_i)\}$  je  $\varepsilon$ -pokrytí  $f(F)$ , kde  $\varepsilon = c\delta^\alpha$ . Takže

$$\sum_i (\text{diam } F \cap U_i)^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i (\text{diam } U_i)^s$$

z toho plyne

$$\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \bar{\mathcal{H}}_\delta^s(F).$$

Pro  $\delta$  jdoucí k 0 půjde i  $\varepsilon$  k 0 a dostaneme z toho tedy tvrzení věty.  $\square$

Podmínka v předpokladu věty je známá jako Hölderova podmínka s exponentem  $\alpha$ . Funkce splňující tuto podmínku pro  $\alpha = 1$  se nazývá lipschitzovská.

**Věta 6** V metrickém prostoru  $\mathbb{R}$  splývá 1-rozměrná Hausdorffova míra  $\mathcal{H}^1$  s Lebesgueovou mírou  $\lambda$ .

**Důkaz:** Vezměme množinu  $A \subset \mathbb{R}$ , která má konečný diametr. Potom  $\sup A - \inf A = r$ , takže množina  $A$  je obsažena v uzavřeném intervalu  $I$  délky  $r$  a  $\bar{\lambda}(A) \leq \bar{\lambda}(I) = r$ . Avšak míra  $\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^1$  je největší vnější míra  $\bar{\mathcal{M}}$  splňující  $\bar{\mathcal{M}}(A) \leq \text{diam } A$  pro všechny množiny  $A$  s diametrem menším než  $\varepsilon$ . Z toho plyne, že  $\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^1(F) \geq \bar{\lambda}(F)$  pro všechny množiny  $F$ , takže  $\bar{\mathcal{H}}^1(F) \geq \bar{\lambda}(F)$ .

Nyní vezměme polootevřený interval  $\langle a, b \rangle$  a zvolme  $\varepsilon > 0$ . Interval rozdělíme pomocí bodů  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , pro které platí  $x_j - x_{j-1} < \varepsilon$  pro každé  $j$ . Interval  $\langle a, b \rangle$  je tedy pokryt spočetným systémem intervalů  $\{\langle x_{j-1}, x_j \rangle : 1 \leq j \leq n\}$ . Platí

$$\sum_{j=1}^n \text{diam} \langle x_{j-1}, x_j \rangle = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = b - a.$$

Z toho dostáváme, že  $\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^1(\langle a, b \rangle) \leq b - a$ . Ale míra  $\bar{\lambda}$  je největší vnější míra splňující  $\bar{\lambda}(\langle a, b \rangle) < b - a$  pro všechny polootevřené intervaly  $\langle a, b \rangle$ , a proto  $\bar{\lambda}(F) \geq \bar{\mathcal{H}}^1(F)$  pro každou množinu  $F$ .

Takto jsme dokázali, že vnější míry splývají. Množiny ovšem splňují Carathéodoryho kritérium a tím pádem splývají i míry  $\lambda$  a  $\mathcal{H}^1$ .  $\square$

## 2.2 Hausdorffova dimenze

Nyní budeme zkoumat  $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$  jako funkci  $s$  pro danou množinu  $F$ . Ukazuje se, že když  $s$  roste, pak  $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$  klesá. Platí však více velmi zajímavých skutečností.

**Věta 7** Necht'  $F$  je borelovská množina a necht'  $0 < s < t$  jsou reálná čísla. Pokud  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) < \infty$ , pak  $\bar{\mathcal{H}}^t(F) = 0$ . Pokud  $\bar{\mathcal{H}}^t(F) > 0$ , pak  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = \infty$ .

**Důkaz:** Pro libovolnou množinu  $A$  takovou, že  $\text{diam } A \leq \varepsilon$ , platí

$$\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^t(A) \leq (\text{diam } A)^t \leq \varepsilon^{t-s} (\text{diam } A)^s.$$

Z toho tedy dostáváme  $\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^t(F) \leq \varepsilon^{t-s} \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$  pro libovolnou množinu  $F$ . Pokud bude  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0$ , pak  $\bar{\mathcal{H}}^t(F) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{t-s} \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = 0 \cdot \bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0$ . Stejně se dokáže i druhá část věty.  $\square$

Důsledkem této věty je, že pro danou množinu  $F$  existuje jistá hodnota  $s_0 \in \langle 0, \infty \rangle$  taková, že  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = \infty$  pro každé  $s < s_0$  a  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0$  pro každé  $s > s_0$ . Tuto hodnotu  $s_0$  nazýváme Hausdorffovou dimenzí množiny  $F$ . Formálně lze definici této dimenze zapsat takto:

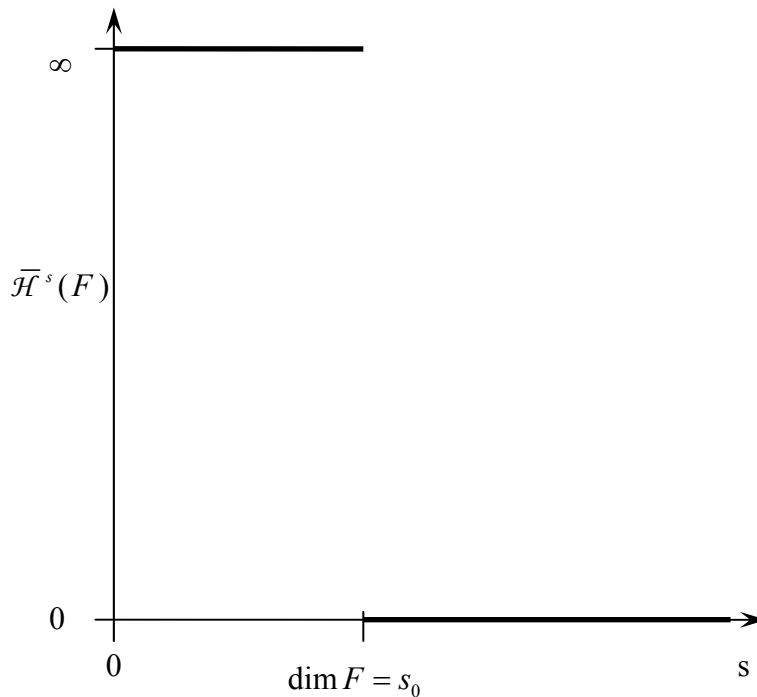
**Definice 6** Hausdorffova dimenze

Pro libovolnou množinu  $F$  definujeme Hausdorffovu dimenzi jako

$$\dim F = \inf \{s \geq 0 : \bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0\} = \sup \{s : \bar{\mathcal{H}}^s(F) = \infty\}.$$



Je samozřejmě možné, že hodnota  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0$  pro všechna  $s > 0$ . V tomto případě je  $\dim F = 0$ . Stejně tak se může stát, že  $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = \infty$  pro všechna  $s$ , pak je  $\dim F = \infty$ .



**Obrázek 2** Hodnota Hausdorffovy míry v závislosti na  $s$

Uveďme jednoduchý příklad. Za množinu  $F$  vezmeme kruh s jednotkovým poloměrem v  $\mathbb{R}^3$ . Jak již bylo řečeno výš,  $\bar{\mathcal{H}}^1(F)$  je rovno délce množiny  $F$ , v našem příkladě tedy nekonečno.  $\bar{\mathcal{H}}^2(F)$  je až na koeficient rovno ploše množiny  $F$ , tzn.  $\bar{\mathcal{H}}^2(F) = (4/\pi) \cdot \text{plocha}(F) = 4$ , což je menší než nekonečno. Podobně  $\bar{\mathcal{H}}^3(F)$  je až na koeficient rovno objemu  $F$ , tzn.  $\bar{\mathcal{H}}^3(F) = (6/\pi) \cdot \text{Objem}(F) = 0$ . Hausdorffova dimenze nám tedy vychází rovna 2.

**Věta 8** Necht'  $A, B$  jsou borelovské množiny. Pak platí, že pokud  $A \subseteq B$ , pak  $\dim A \leq \dim B$ .

**Důkaz:** Předpokládáme tedy  $A \subseteq B$ . Věta 1 říká, že pokud  $A \subseteq B$ , pak  $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$ . Když tedy bude  $s > \dim B$ , tak  $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B) = 0$  (Věta 7) a tím pádem  $\dim A \leq s$ . To ovšem platí pro všechna  $s > \dim B$ , takže  $\dim A \leq \dim B$ .

**Věta 9** Necht'  $A_1, A_2, \dots$  jsou borelovské množiny. Pak

$$\dim \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \sup_k \dim A_k.$$

**Důkaz:** Necht'  $s > \sup_k \dim A_k$ , to znamená, že  $\forall k \in \mathbb{N}$  bude  $s > \dim A_k$ . Z toho plyne, že  $\forall k \in \mathbb{N}$   $\bar{\mathcal{H}}^s(A_k) = 0$ . Víme, že  $\bar{\mathcal{H}}^s$  je vnější míra, takže platí

$$\bar{\mathcal{H}}^s \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\mathcal{H}}^s(A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 0 = 0.$$

Takže dimenze sjednocení je menší než  $s$ , a to pro všechna  $s > \sup_k \dim A_k$ . Platí tedy, že

$$\dim \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \leq \sup_k \dim A_k.$$

Podle věty 8 je dimenze podmnožiny menší nebo rovna nadmnožině, takže

$$\dim \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \geq \sup_k \dim A_k.$$

Z nerovností tedy plyne rovnost a důkaz je proveden.  $\square$

**Věta 10** *Nechť  $F \subset \mathbb{R}^n$  a nechť  $f: F \rightarrow \mathbb{R}^m$  splňuje Hölderovu podmínku*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (\forall x, \forall y \in F).$$

*Potom platí, že  $\dim f(F) \leq (1/\alpha) \dim F$ .*

**Důkaz:** Pokud  $s > \dim F$ , pak podle věty 5 je  $\overline{\mathcal{H}}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \overline{\mathcal{H}}^s(F) = 0$ . A z toho plyne, že  $\dim f(F) \leq s/\alpha$  pro všechna  $s > \dim F$ .  $\square$

Důsledkem této věty je, že pokud je funkce  $f: F \rightarrow \mathbb{R}^m$  lipschitzovská, pak  $\dim f(F) \leq \dim F$ .

Další důsledek je, že pokud je funkce  $f: F \rightarrow \mathbb{R}^m$  **bi-lipschitzovská**, což znamená, že splňuje podmínku

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (\forall x, \forall y \in F),$$

kde  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ , pak  $\dim f(F) = \dim F$ .

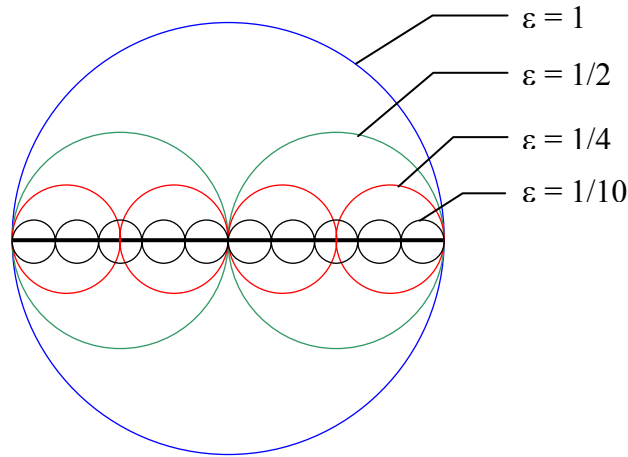
Tyto důsledky nás vedou k základní vlastnosti Hausdorffovy dimenze: **Hausdorffova dimenze je invariantní vůči bi-lipschitzovské transformaci**. Když tedy budou mít dvě množiny rozdílnou dimenzi, pak mezi nimi neexistuje bi-lipschitzovská transformace. Ve fraktální geometrii se dvě množiny považují za „stejně“ právě tehdy, když mezi nimi existuje právě bi-lipschitzovská transformace. Samotná Hausdorffova dimenze nám o topologických vlastnostech množiny moc neřekne, ale lze dokázat následující věta pro množiny s dimenzí menší než jedna.

**Věta 11** *Množina  $F \subset \mathbb{R}^n$  s  $\dim F < 1$  je úplně nesouvislá.*

**Důkaz:** Nechť  $x$  a  $y$  jsou dva rozdílné body množiny  $F$ . Definujeme zobrazení  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  jako  $f(z) = |z - x|$ . Toto zobrazení nezvětšuje vzdálenosti mezi body, protože  $|f(z) - f(w)| = ||z - x| - |w - x|| \leq |(z - x) - (w - x)| = |z - w|$ . Z důsledku věty 10 nám plyne, že pro lipschitzovské zobrazení (tzn. naše zobrazení  $f$ ) platí  $\dim f(F) \leq \dim F < 1$ . Množina  $f(F)$  je tedy podmnožinou  $\mathbb{R}$  s mírou  $\mathcal{H}^1$  (neboli délkou) rovnou nule a tudíž má hustý doplněk. Nyní zvolme bod  $r$  takový, že  $r \notin f(F)$  a  $0 < r < f(y)$ . Z toho plyne

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}.$$

Množina  $F$  je tedy obsažena ve dvou disjunktních množinách s bodem  $x$  v jedné a bodem  $y$  ve druhé. Body  $x$  a  $y$  leží tedy každý v jiné komponentě množiny  $F$ .  $\square$



**Obrázek 3** Pokrytí intervalu  $\langle 0,1 \rangle$

**Věta 12** Hausdorffova dimenze  $\mathbb{R}$  je 1.

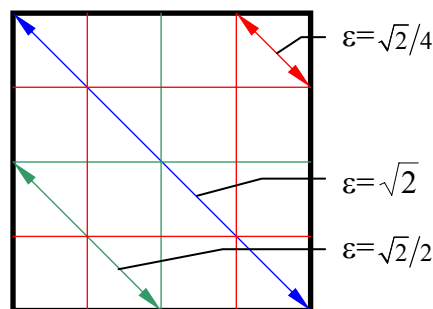
**Důkaz:** Věta 6 říká, že Hausdorffova míra  $\mathcal{H}^1$  splývá s Lebesgueovou mírou  $\lambda$ , platí tedy  $\mathcal{H}^1(\langle 0,1 \rangle) = \lambda(\langle 0,1 \rangle) = 1$ . Dimenze intervalu  $\langle 0,1 \rangle$  je tedy 1. Interval  $\langle 0,1 \rangle$  je ale částí  $\mathbb{R}$ , tzn. dimenze  $\mathbb{R}$  je větší než jeho dimenze, tedy větší než 1.

Když vezmeme libovolné  $s > 1$ , bude  $\mathcal{H}^s(\langle 0,1 \rangle) = 0$ . Intervaly  $\langle n, n+1 \rangle$  jsou izometrické s  $\langle 0,1 \rangle$ , takže  $\mathcal{H}^s(\langle n, n+1 \rangle) = 0$ . Dostáváme tedy

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^s(\langle n, n+1 \rangle) = 0.$$

Tento výraz nám tedy říká, že pro všechna  $s > 1$  je  $\dim \mathbb{R} \leq s$ . Dimenze  $\mathbb{R}$  tak menší nebo rovna 1. Když dáme dohromady nerovnosti, získáme požadovaný výsledek  $\dim \mathbb{R} = 1$ .  $\square$

Takto jsme zjistili, že jednorozměrná Lebesgueova míra je vhodná pro počítání  $\dim \mathbb{R}$ . Snadno tedy usoudíme, že pro výpočet  $\dim \mathbb{R}^2$  bude třeba použít dvourozměrnou Lebesgueovu míru.



**Obrázek 4** Pokrytí jednotkového čtverce.

**Věta 13** Hausdorffova dimenze  $\mathbb{R}^2$  je 2.

**Důkaz:** Vezmeme jednotkový čtverec  $Q = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$ . Tento čtverec lze pokrýt  $n^2$  menšími čtverci s délkou strany  $1/n$ , takže pro  $\varepsilon \geq \sqrt{2}/n$  dostáváme

$$\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^2(Q) \leq n^2(\sqrt{2}/n^2) = 2.$$

Tím pádem  $\bar{\mathcal{H}}^2(Q) \leq 2$  a tedy i  $\dim Q \leq 2$ .

Ted' je ještě třeba dokázat opačnou nerovnost. Necht'  $\mathcal{A}$  je spočetné pokrytí  $Q$  pouze uzavřenými množinami. Uvědomme si, že každá množina  $A$  s diametrem  $r$  je obsažena ve čtverci  $Q_A$  se stranou menší než nebo rovnou  $r$ . Z toho dostáváme

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} (\text{diam } A)^2 \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} \lambda^2(Q_A) \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} \lambda^2\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} Q_A\right) \geq \lambda^2(Q) = 1.$$

Takto jsme dostali  $\bar{\mathcal{H}}^2(Q) \geq 2$  a tedy i  $\dim Q \geq 2$ .

Nyní budeme postupovat podobně jako u předchozího důkazu. Protože  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , tak  $\dim \mathbb{R}^2 \geq \dim Q \geq 2$ . Pro  $s > 2$  je  $\mathcal{H}^s(Q) = 0$ , ale  $\mathbb{R}^2$  lze pokrýt spočetným systémem  $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$  čtverců o straně 1, takže

$$\bar{\mathcal{H}}^s(\mathbb{R}^2) \leq \sum_n \mathcal{H}^s(Q_n) = 0.$$

Z toho plyne, že  $\dim \mathbb{R}^2 \leq s$ , tedy  $\dim \mathbb{R}^2 \leq 2$ . Z opačných nerovností dostáváme  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ .  $\square$

### 2.3 Výpočet Hausdorffovy míry a dimenze

Určování Hausdorffovy dimenze není v praxi vůbec jednoduché. Obvykle se postupuje tak, že nalezneme horní hranici množiny, a pak se snažíme dokázat, že to je zároveň i dolní hranice. Nalezení horní hranice bývá často jednodušší. Jedna z metod spočívá v nalezení  $\varepsilon_k$  pokrytích množiny  $F$ , označme množiny těchto pokrytí  $U_{i,k}$ . Pro tato pokrytí musí platit, že  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  pro  $k \rightarrow \infty$ . Potom je třeba dokázat, že pro všechna  $k$  platí

$$\sum_i (\text{diam } U_{i,k})^s \leq C < \infty.$$

To znamená, že  $\mathcal{H}_{\varepsilon_k}^s(F) \leq C$  pro všechna  $k$  a tím pádem  $\mathcal{H}^s(F) \leq C$ . Z toho plyne, že  $\dim F \leq s$ .

Běžný způsob, jak najít spodní hranici, je využití principu rozdělení hmoty. Pro množinu  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  musíme definovat míru  $\mu$  na  $\mathbb{R}^n$  takovou, že  $\mu(F) > 0$ . Pokud tato míra bude splňovat podmínku, že  $U \subseteq F, \mu(U) \leq C(\text{diam } U)^s$ , kde  $C$  je pevná konstanta, pak  $\dim(F) \geq s$ . Toto tvrzení lze dokázat následovně.

Necht'  $\varepsilon > 0$  a necht'  $\{U_i\}$  je  $\varepsilon$ -pokrytí množiny  $F$ . Platí

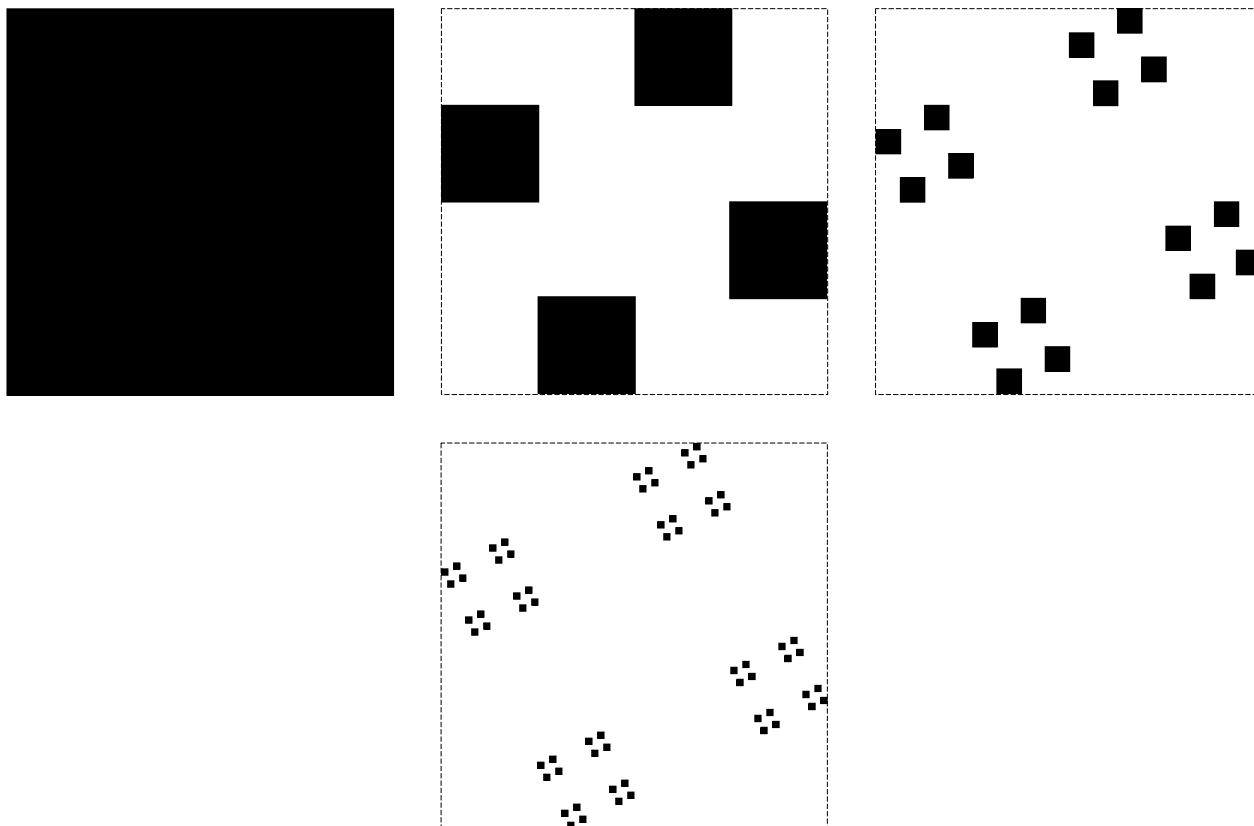
$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq C \sum_i (\text{diam } U_i)^s.$$

Pokud vezmeme infimum přes všechny  $\varepsilon$ -pokrytí množiny  $F$ , dostaneme  $C\mathcal{H}_\varepsilon^s(F) \geq \mu(F)$ , dále

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{C} > 0$$

a z toho plyne, že  $\dim F \geq s$ , protože  $\dim(F) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\}$ .

Nyní několik příkladů na výpočet Hausdorffovy dimenze. Nejprve Cantorovo diskontinuum neboli Cantor Dust.



**Obrázek 5** Konstrukce Cantorova diskontinua,  $\dim F = 1$

**Příklad 1** Necht'  $F$  je Cantorovo diskontinuum zkonstruované z jednotkového čtverce tak, že v každém kroku čtverec rozdělíme na 16 menších čtverců s délkou hrany  $1/4$  původní hrany a ponecháme pouze 4 čtverce podle obrázku. Potom platí  $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$ , takže  $\dim F = 1$ .

**Výpočet:** Označme  $E_k$   $k$ -tou iterací. Tato množina se vždy skládá ze  $4^k$  čtverců s délkou hrany  $4^{-k}$ . Jejich diametr je  $4^k \sqrt{2}$ . Tyto čtverce vezmeme jako  $\delta$ -pokrytí množiny  $F$ , kde  $\delta = 4^{-k} \sqrt{2}$ . Takto dostaneme odhad  $\mathcal{H}_\delta^1(F) \leq 4^k 4^{-k} \sqrt{2}$ . Když  $k \rightarrow \infty$ , pak  $\delta \rightarrow 0$  a dostaneme tedy  $\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$ .

Nyní se pokusíme získat dolní odhad. Necht'  $\text{proj}$  je ortogonální projekce na osu  $x$ . Ortogonální projekce nezvyšuje vzdálenost, tj.  $|\text{proj } x - \text{proj } y| \leq |x - y|$ , a pokud  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , pak  $\text{proj}$  je Lipschitzovská. Tato projekce je vlastně stín množiny  $F$  na osu  $x$  a z konstrukce množiny  $F$  zjistíme, že to je jednotkový interval  $\langle 0, 1 \rangle$ . S využitím toho, že zobrazení je Lipschitzovské (viz věta 5), můžeme psát

$$1 = \text{délka } \langle 0, 1 \rangle = \mathcal{H}^1(\langle 0, 1 \rangle) = \mathcal{H}^1(\text{proj } F) \leq \mathcal{H}^1(F). \quad \square$$

V tomto výpočtu jsme použili princip s ortogonální projekcí, abychom dostali dolní odhad Hausdorffovy míry. Ten lze ale použít pouze ve zvláštních případech, často je výpočet mnohem těžší.

V dalším příkladě vypočteme dimenzi Cantorovy množiny.

**Příklad 2** *Necht'  $F$  je Cantorova množina. Pak  $\dim F = s = \log 2 / \log 3$  a  $1/2 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$ .*

**Heuristický výpočet:** Cantorova množina se rozdělí na levou  $F_L = F \cap \langle 0, 1/3 \rangle$  a pravou  $F_R = F \cap \langle 2/3, 1 \rangle$  část. Obě tyto části jsou geometricky podobné množině  $F$ , pouze zmenšené na jednu třetinu.  $F_R$  a  $F_L$  jsou disjunktní a platí  $F = F_L \cup F_R$ . Pro každé  $s$  platí

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F).$$

Toto plyne z vlastnosti Hausdorffovy míry o změně měřítka. Budeme předpokládat, že pro správnou hodnotu  $s = \dim F$  platí  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ . Abychom dostali konečnou hodnotu, tak musí platit  $1 = 2(1/3)^s$  neboli  $s = \log 2 / \log 3$ .  $\square$

### 3. Mřížková dimenze (box-counting dimension)

V předchozí kapitole jsme se seznámili s Hausdorffovou dimenzí. Tato dimenze byla velmi obecná, použitelná pro všechny množiny, a proto také obtížná na výpočet. V praxi se ovšem používají i další (alternativní) typy dimenzí. Podrobné informace o alternativních dimenzích lze nalézt v [8].

Tyto dimenze bývají zpravidla založeny na „měření s měřítkem  $\delta$ “, kdy zanedbáváme nepravidelnosti menší než  $\delta$ . Sledujeme, jak se tato měření chovají, když  $\delta \rightarrow 0$ . Jako příklad můžeme uvést měření délky křivky  $F$  tak, že spočítáme, kolik kroků délky  $\delta$  musíme provést, abychom ji celou prošli. Toto provedeme pro dva různé kroky  $\delta$  a vypočteme mocninou závislost. Označme  $M_\delta(F)$  počet kroků při délce kroku  $\delta$ . Předpokládejme tedy, že zde existuje mocninná závislost. Pak

$$M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$$

pro konstanty  $c$  a  $s$ . Pokud toto nastane, pak říkáme, že množina  $F$  má dělicí dimenzi (divider dimension)  $s$ . Tento výraz zlogaritmuje

$$\log M_\delta(F) = \log c - s \log \delta$$

a velikost kroku  $\delta$  budeme stále zmenšovat

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Hodnota  $s$  vlastně znamená směrnici přímky v log-log grafu.

Pokud budeme definovat další verze dimenzí, pak se samozřejmě jejich výsledky na stejné množiny nemusí shodovat (dokonce ani pro „hezké“ množiny). Jejich vlastnosti budou také odlišné a je třeba je odvozovat přímo z jejich definice. Některé tyto vlastnosti si odvodíme a výsledky budeme porovnávat právě s dimenzí Hausdorffovou.

#### 3.1 Mřížková dimenze

Mřížková dimenze je v praxi jedna z nejvíce používaných dimenzí. Algoritmus se relativně jednoduše implementuje na počítači a pro velkou třídu množin dává stejné výsledky jako Hausdorffova dimenze.

##### Definice 7 Mřížková dimenze

Nechť  $F$  je neprázdná omezená podmnožina  $\mathbb{R}^n$  a necht'  $N_\delta(F)$  je nejmenší počet množin s průměrem  $\delta$ , které pokrývají  $F$ . Definujeme dolní a horní mřížkovou dimenzi množiny  $F$  jako

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$
$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Pokud se tyto výrazy rovnají, pak společnou hodnotu nazýváme mřížkovou dimenzí množiny  $F$ ,

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Předpokládáme, že číslo  $\delta$  je dostatečně malé, aby hodnota  $-\log \delta$  byla ostře větší než 0. Stejně tak nechceme dopustit situace jako „ $\log 0$ “ a „ $\log \infty$ “, proto na množinu klademe předpoklad neprázdnosti a omezenosti.

Mřížkovou dimenzi lze počítat různými způsoby. Jako množiny pro pokrytí můžeme zvolit např. krychle z mřížky se stranou  $\delta$ .

**Věta 14** *Necht'  $F \subset \mathbb{R}^n$  je neprázdna množina a množiny pro pokrytí  $F$  jsou definovány jako mřížka takto:*

$$\langle m_1\delta, (m_1+1)\delta \rangle \times \cdots \times \langle m_n\delta, (m_n+1)\delta \rangle,$$

kde  $m_1, \dots, m_n$  jsou celá čísla,  $\delta$  je krok mřížky a  $N'_\delta(F)$  je počet krychlí z mřížky, které protínají množinu  $F$ . Pak mřížkové dimenze počítané pomocí  $N'_\delta(F)$  a  $N_\delta(F)$  z definice 7 si jsou rovny.

**Důkaz:** Je zřejmé, že tyto krychle množinu  $F$  pokrývají, a tedy tvoří  $\delta\sqrt{n}$ -pokrytí. Platí, že

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Pokud  $\delta\sqrt{n} < 1$  (abychom mohli nerovnost přezásobit  $1/(-\log \delta\sqrt{n})$ ), pak

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta}.$$

A pokud  $\delta \rightarrow 0$ , pak

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}, \\ \overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}. \end{aligned}$$

Na druhou stranu, každá množina s průměrem  $\delta$  bude obsažena v maximálně  $3^n$  krychlích z mřížky o hraně  $\delta$ . To znamená, že

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F),$$

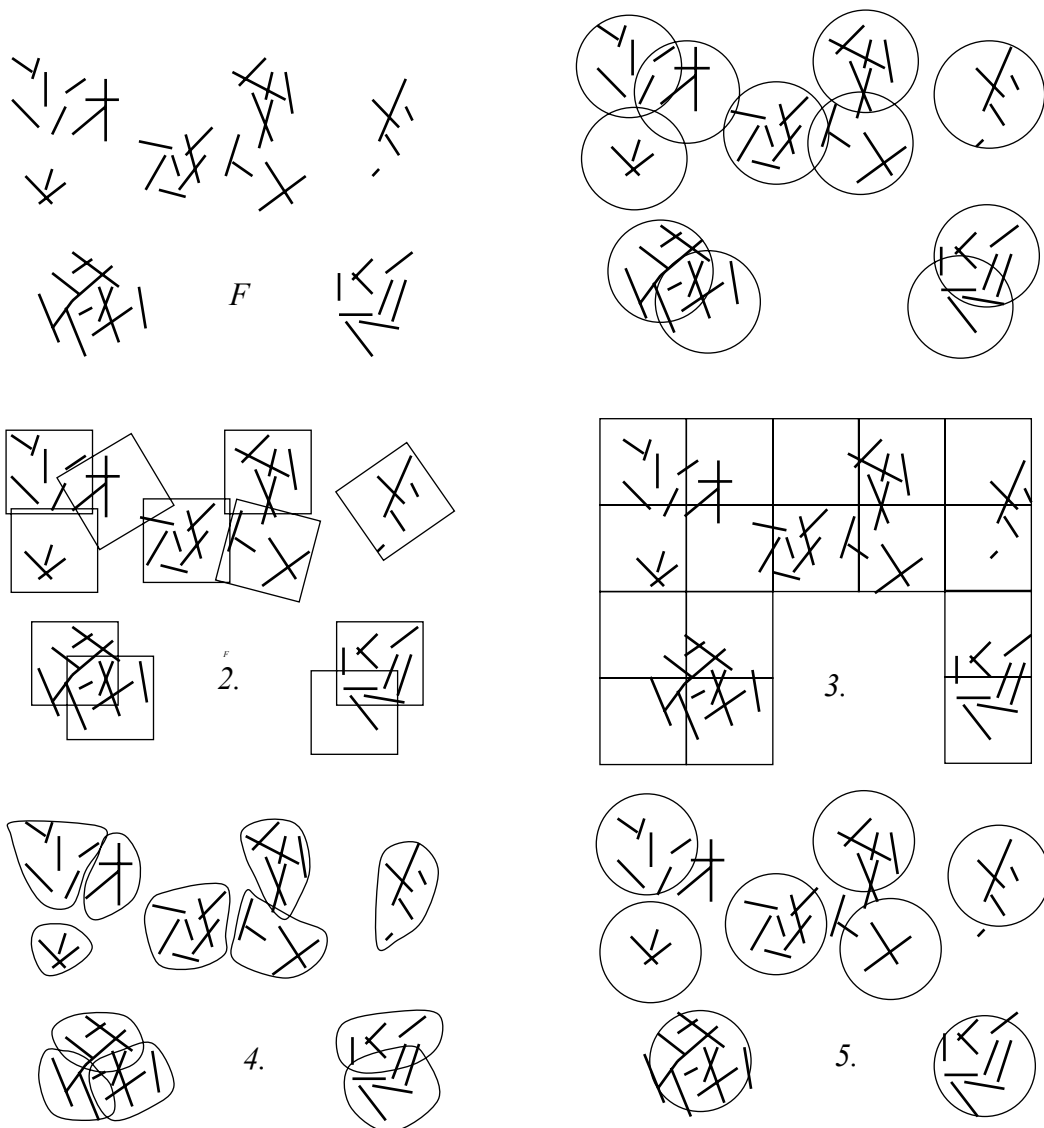
a pokud toto zlogaritmuje a  $\delta$  pošleme k nule, dostaneme opačné nerovnosti, tzn.

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &\geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}, \\ \overline{\dim}_B F &\geq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad \square \end{aligned}$$

Tato verze dimenze se využívá nejvíce empiricky, a odtud také plyne její jméno. Množinu umístíme do mřížky čtverců nebo krychlí a jednoduše spočítáme, do kolika krychlí množina zasahuje. Mřížková dimenze vlastně říká, jak rychle rostou nepravidelnosti se zmenšujícím se  $\delta$ .

Uvedli jsme si dva různé způsoby výpočtu mřížkové dimenze (buď z definice nebo pomocí věty 14), ale samozřejmě, že to nejsou všechny možné. O dalších možnostech nám říká následující věta, jejíž důkaz lze nalézt například v [8].





**Obrázek 6** Pět způsobů, jak najít mřížkovou dimenzi množiny. Obrázky odpovídají bodům předchozí věty. Výpočet  $N_\delta(F)$  je tedy 1. nejméně koulí s poloměrem  $\delta$ , 2. nejméně krychlí se stranou  $\delta$ , 3. počet krychlí z mřížky o straně  $\delta$ , 4. nejméně množin s diametrem  $\delta$ , 5. největší počet disjunktních koulí s poloměrem  $\delta$  se středy v množině.

**Věta 15** Horní a dolní mřížkové dimenze množiny  $F \subset \mathbb{R}^n$  jsou dány jako

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta''(F)}{-\log \delta},$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta''(F)}{-\log \delta}$$

a samotná mřížková dimenze je dána jako

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta''(F)}{-\log \delta}$$

(pokud limita existuje), kde  $N_\delta''(F)$  je jedno z následujících:

1. nejmenší počet uzavřených koulí s poloměrem  $\delta$ , které pokrývají  $F$ ;

2. nejmenší počet krychlí se stranou  $\delta$ , které pokrývají  $F$ ;
3. počet krychlí z mřížky se stranou  $\delta$ , které protínají  $F$ ;
4. nejmenší počet množin s diametrem maximálně  $\delta$ , které pokrývají  $F$ ;
5. největší počet disjunktních koulí s poloměrem  $\delta$ , které mají střed v  $F$ .

V praxi lze samozřejmě použít více ekvivalentních definic, které lépe odpovídají našim potřebám.

### 3.2 Vztah mezi mřížkovou a Hausdorffovou dimenzí

Nyní se pokusíme zjistit vztah mezi mřížkovou dimenzí a Hausdorffovou dimenzí. Při výpočtu mřížkové dimenze jsme našli pokrytí množiny  $F$ , ovšem nemuselo to být právě to nejvhodnější pro Hausdorffovu dimenzi.

**Věta 16** *Necht'  $F \subset \mathbb{R}^n$  je neprázdná množina. Pak  $\dim F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$ .*

**Důkaz:** Množinu  $F$  jsme pokryli  $N_\delta(F)$  množinami s diametrem  $\delta$ , proto dostáváme

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s.$$

Pokud bude  $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ , pak zlogaritmováním pravé strany nerovnosti dostaneme (pro dostatečně malé  $\delta$ )  $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$ . Odtud plyne, že

$$s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

a tedy

$$\dim F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F. \quad \square$$

Z této nerovnosti bohužel plyne, že Hausdorffova a mřížková dimenze se nerovnjají. Avšak v praxi rovnost nastává velmi často.

Vzorec z definice mřížkové dimenze nám říká, že pro malá  $\delta$  se  $N_\delta(F)$  chová jako  $\delta^{-s}$ , kde  $s = \dim_B F$ . Přesněji to můžeme zapsat jako

$$N_\delta(F) \delta^s \rightarrow \infty \text{ pro } s < \dim_B F$$

a

$$N_\delta(F) \delta^s \rightarrow 0 \text{ pro } s > \dim_B F.$$

Můžeme psát, že

$$N_\delta(F) \delta^s = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ je konečné } \delta \text{ pokrytí } F \right\}.$$

Tento zápis se velmi podobá definici Hausdorffovy míry

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam } U_i : \{U_i\} \text{ je } \delta \text{ pokrytí } F \right\}.$$

Hlavní rozdíl mezi těmito zápisy je, že Hausdorffova míra přiřazuje každé množině z pokrytí jinou váhu (danou jejím diametrem), kdežto při výpočtu mřížkové dimenze předpokládáme u všech množin stejný průměr  $\delta$ .

Můžeme definovat výraz  $\nu(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F)\delta^s$ , ale narozdíl od  $\mathcal{H}^s(F)$  to není míra na  $\mathbb{R}^n$ . Toto dokazuje, že mřížkové dimenze nemají některé příjemné vlastnosti a proto se s nimi pracuje hůře matematicky. Ale na druhou stranu, díky tomu, že množiny pokrytí mají stejný průměr, tak se mřížková dimenze mnohem lehčeji počítá.

### 3.3 Vlastnosti mřížkové dimenze

**Věta 17** Pro mřížkovou dimenzi platí:

1. hladká plocha  $F$  dimenze  $m$  v  $\mathbb{R}^n$  má  $\dim_B F = m$ ;
2.  $\underline{\dim}_B$  a  $\overline{\dim}_B$  jsou monotónní;
3.  $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$ ; neplatí pro  $\underline{\dim}_B$ ;
4.  $\underline{\dim}_B$  a  $\overline{\dim}_B$  jsou invariantní vůči bi-lipschitzovské transformaci.

Důkaz lze nalézt např. v [8].

**Věta 18** Necht'  $F \subset \mathbb{R}^n$  a  $\overline{F}$  je její uzávěr (tzn. nejmenší uzavřená množina, která  $F$  obsahuje). Pak

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F$$

a

$$\overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F.$$

**Důkaz:** Necht'  $B_1, B_2, \dots, B_k$  je konečná posloupnost uzavřených koulí s poloměry  $\delta$ . Pokud množina  $\bigcup_{i=1}^k B_i$  obsahuje množinu  $F$ , pak obsahuje i množinu  $\overline{F}$ . Z toho plyne, že nejmenší počet koulí s poloměrem  $\delta$ , které pokryjí  $F$ , se rovná nejmenšímu počtu koulí potřebných k pokrytí větší množiny  $\overline{F}$ . Z toho již plynou uvedené rovnosti.  $\square$

## 4. Numerický výpočet mřížkové dimenze

V předchozí kapitole byla mřížková dimenze popsána teoreticky, byly uvedeny její vlastnosti, výhody a nevýhody. Jako výhoda byla zmíněna možnost jejího výpočtu numericky pomocí výpočetní techniky. Pokusil jsem se tedy vypočítat mřížkovou dimenzi hranice Mandelbrotovy množiny, Juliovy množiny, kružnice, čtverce a hranice čtverce.

### 4.1 Postup

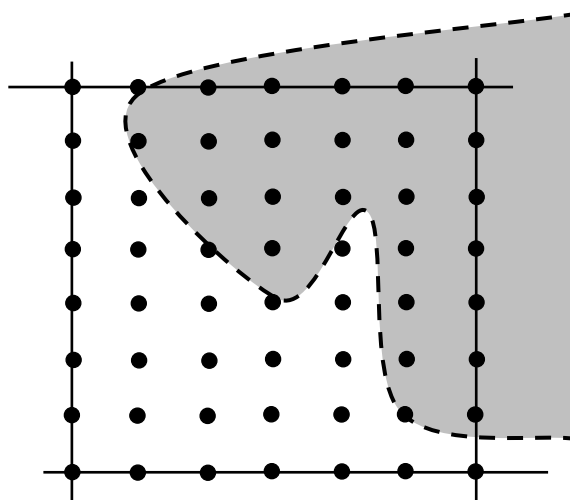
V definici mřížkové dimenze se objevuje limita, kdy velikost mřížky zmenšujeme k nule. Toho samozřejmě na počítači nelze dosáhnout, proto musíme pouze přibližný postup.

Množinu, u které chceme měřit dimenzi, umístíme na mřížku a spočítáme, kolik čtverců z mřížky obsahuje nějakou část množiny. Potom vezmeme hustější mřížku a opět zjistíme počet čtverců obsahujících množinu. Takto pokračujeme pro několik různých mřížek. Získané hodnoty vyneseme do log-log grafu, kde na ose  $x$  bude  $\log(1/s)$  a na ose  $y$  bude  $\log(N(s))$ . Strana jednoho čtverce z mřížky je označena jako  $s$  a  $N(s)$  znamená počet čtverců obsahujících množinu v závislosti na  $s$ . Body v grafu proložíme přímkou a směrnice této přímky udává právě mřížkovou dimenzi.

Mřížková dimenze závisí na několika parametrech, které velmi ovlivňují výslednou hodnotu. Nesprávná volba těchto parametrů může způsobit velmi velké chyby při výpočtu. Mezi tyto parametry patří

- volba funkce pro výpočet směrnice přímky v log-log grafu;
- volba vhodného rozsahu velikostí mřížky;
- orientace a umístění mřížky na množině.

Program pro měření mřížkové dimenze, který jsem vytvořil, pracuje tak, že každou buňku mřížky rozdělí na ještě jemnější mřížku (20 až 50-krát jemnější) a na té zjišťuje, zda body patří nebo nepatří do množiny. Když se v jedné buňce mřížky podaří najít bod, který do množiny patří a zároveň i bod, který tam nepatří, pak danou buňkou prochází hranice množiny. Algoritmus schématicky znázorňuje obrázek 7, kde tečky znamenají jemnější mřížku a čáry představují buňku původní mřížky.



Obrázek 7 Hledání hranice množiny

## 4.2 Kružnice, čtverec a hranice čtverce

Nejprve jsem se pokusil numericky vypočítat dimenzi „jednoduchých“ množin jako je kružnice, čtverec a hranice čtverce. Kružnice a hranice čtverce jsou hladké a po částech hladké křivky, jejichž Hausdorffova dimenze se rovná jedné a čtverec má Hausdorffovu dimenzi dvě.

**Tabulka 1** Hranice čtverce (strany rovnoběžné s osami)

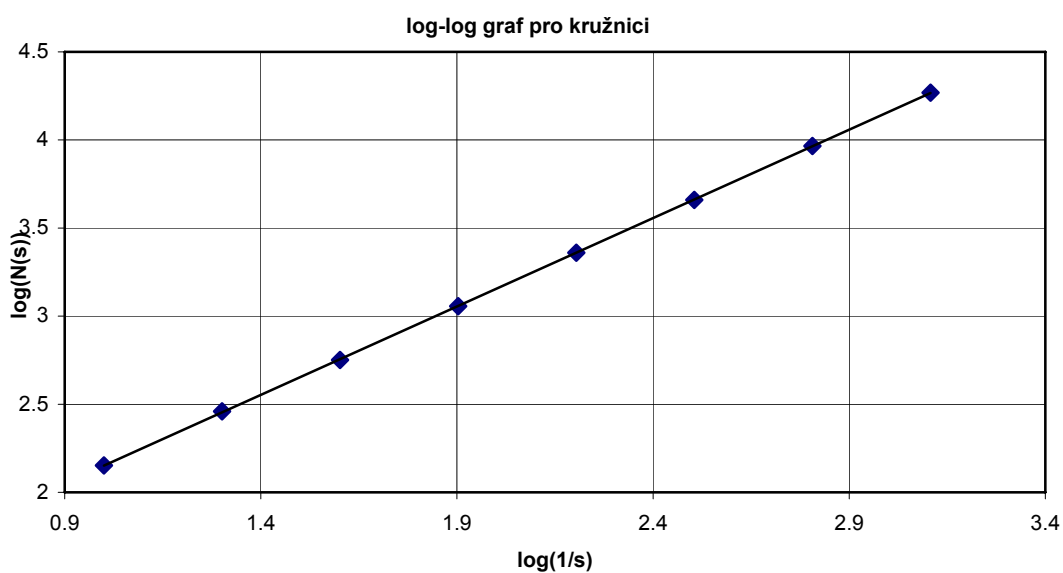
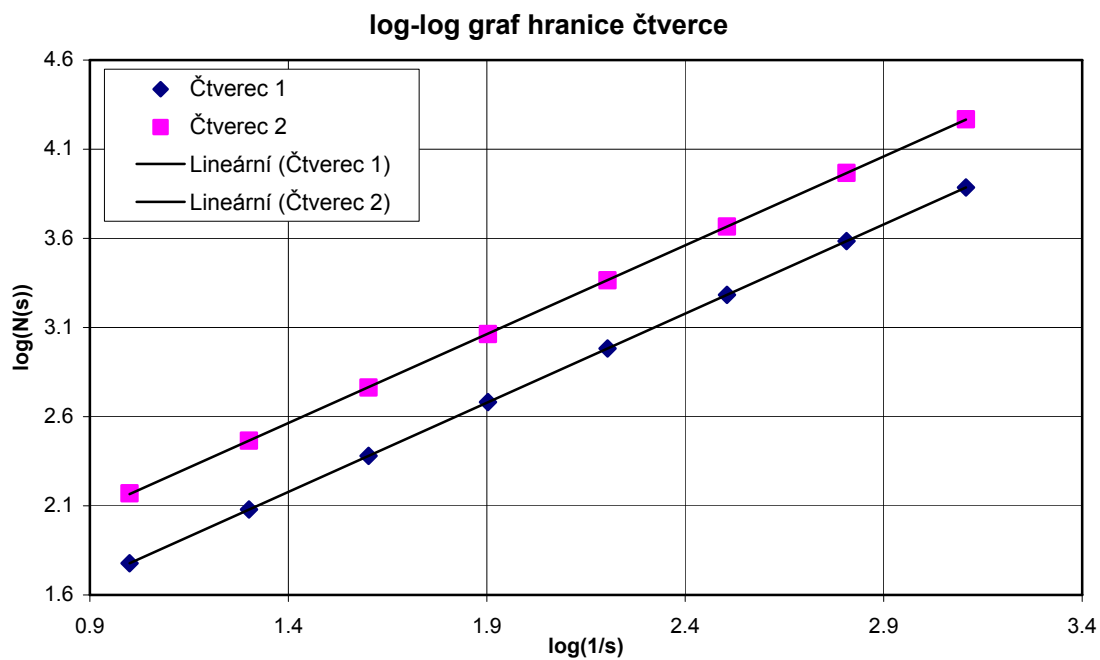
$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	60	1.0000000	1.778151	1.0000000000000000
0.05000000	120	1.3010300	2.079181	0.9999999999999999
0.02500000	240	1.6020600	2.380211	1.0000000000000000
0.01250000	480	1.9030900	2.681241	1.0000000000000000
0.00625000	960	2.2041200	2.982271	0.9999999999999997
0.00312500	1920	2.5051500	3.283301	1.0000000000000000
0.00156250	3840	2.8061800	3.584331	1.0000000000000000
0.00078125	7680	3.1072100	3.885361	

**Tabulka 2** Hranice čtverce (strany otočené o 45° vůči osám)

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	148	1.000000000	2.170262	0.980371
0.05000000	292	1.301029996	2.465383	0.990085
0.02500000	580	1.602059985	2.763428	0.995017
0.01250000	1156	1.903089981	3.062958	1.002494
0.00625000	2316	2.204119976	3.364739	1.001245
0.00312500	4636	2.505149972	3.666143	1.000622
0.00156250	9276	2.806179968	3.967361	0.999689
0.00078125	18548	3.107209963	4.268297	

**Tabulka 3** Kružnice

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	142	1	2.152288	1.020178
0.05000000	288	1.30103	2.459392	0.969626
0.02500000	564	1.60206	2.751279	1.015267
0.01250000	1140	1.90309	3.056905	1.006314
0.00625000	2290	2.20412	3.359835	0.996847
0.00312500	4570	2.50515	3.659916	1.015074
0.00156250	9236	2.80618	3.965484	1.005924
0.00078125	18548	3.10721	4.268297	

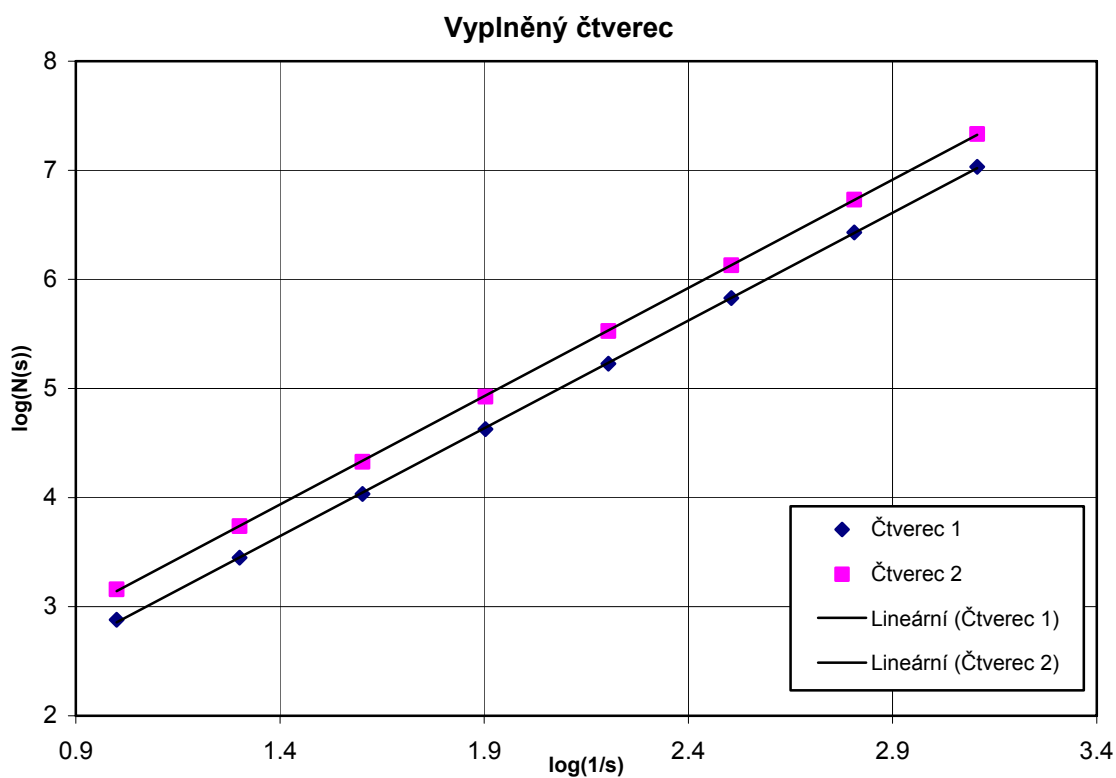


**Tabulka 4** Vyplněný čtverec (strany rovnoběžné s osami)

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.1000000	1444	1.000000	3.159567	1.923051704
0.0500000	5476	1.301030	3.738463	1.960742387
0.0250000	21316	1.602060	4.328706	1.980169062
0.0125000	84100	1.903090	4.924796	2.000000000
0.0062500	336400	2.204120	5.526856	2.000000000
0.0031250	1345600	2.505150	6.128916	2.000000000
0.0015625	5382400	2.806180	6.730976	1.998756029
0.00078125	21511044	3.107210	7.332661	

**Tabulka 5** Vyplněný čtverec (strany otočené o 45° vůči osám)

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	760	1.000000000	2.880814	1.887525271
0.05000000	2812	1.301029996	3.449015	1.941897087
0.02500000	10804	1.602059985	4.033585	1.970455724
0.01250000	42340	1.903089981	4.626751	1.995050784
0.00625000	168780	2.204119976	5.227321	1.997519010
0.00312500	673960	2.505149972	5.828634	1.998757903
0.00156250	2693520	2.806179968	3.967361	1.998134848
0.00078125	10760160	3.107209963	4.268297	



Objekt	Směrnice přímky v log-log grafu	Hausdorffova dimenze	Chyba [%]
kružnice	1.003355174	1	0.3355
hranice čtverce	1.000000000	1	0.0000
hranice čtverce (45°)	0.996818246	1	0.3182
čtverec (45°)	1.975332313	2	1.2330
čtverec	1.984334508	2	0.7830

**Tabulka 6** Směrnice přímek v log-log grafech a chyba dimenze

Z tabulek a grafů je vidět, že mřížková dimenze odpovídá skutečné dimenzi, ale s určitou chybou. Když body log-log grafu proložíme přímkou, získáme aproximaci mřížkové dimenze. Pro čtverec, který je rovnoběžný s osami (tedy i s mřížkou), je použití velmi přesné. Směrnice

přímky je rovna 1.0, tzn. odchylka od správné hodnoty je 0%. Pro čtverec otočený o 45° vůči osám a pro kružnici je měření již nepřesnější, ale stále je chyba relativně malá. Zde je vidět, že volba správná orientace mřížky je velmi důležitá. Stačilo čtverec potočit a přesnost výpočtu dimenze se hned zhoršila. Směrnice proložené přímkou je 0.996818 pro čtverec a 1.003355174 pro kružnici, tzn. oboje se liší od správné hodnoty přibližně „pouze“ o 0.3%. Ještě horší hodnoty dostáváme u vyplněného čtverce. Pro čtverec rovnoběžný s osami je směrnice 1.984334508, což se liší od správné hodnoty o 0.783%. U čtverce otočeného o 45° vychází směrnice 1.975332313, chyba je tedy 1.233%.

Z těchto měření vyplývá, že při numerickém výpočtu mřížkové dimenze dochází k chybám i pro jednoduché „nefraktální“ množiny. Výsledky ale nejsou příliš odlišné od správné hodnoty. Podívejme se dále na mnohem složitější množinu - Mandelbrotovu.

### 4.3 Mandelbrotova množina

Mitsushiro Shihikura v roce 1994 v [6] dokázal, že Hausdorffova dimenze hranice Mandelbrotovy množiny  $M$  (označme ji  $\partial M$ ) je rovna 2. Shishikura též dokázal, že dimenzi rovnou dvěma má i Juliova množina, kde jako konstantu vezmeme bod z hranice Mandelbrotovy množiny. Naším cílem bylo zjistit, zda bude mřížková dimenze vypočítaná numericky odpovídat dimenzi Hausdorffově.

Pro jistotu připomeňme, jak je Mandelbrotova množina definována:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid c \rightarrow c^2 + c \rightarrow \dots \text{ je omezená} \} .$$

Pro výpočet jsem použil svůj program, který dle zadaných parametrů počítá Mandelbrotovu množinu na jemné mřížce a sečte, do kolika větších čtverců padne hranice této množiny. Numericky počítaná mřížková dimenze má jednu z nevýhod v tom, že závisí na velmi mnoha parametrech. Mezi hlavní parametry při výpočtu dimenze právě Mandelbrotovy množiny patří volba velikosti základní mřížky, volba velikosti mřížky pro výpočet počtu zobrazených čtverců a volba počtu iterací pro rozhodnutí, zda posloupnost pro daný bod roste do nekonečna nebo ne.

Při mém měření jsem se pokusil měnit všechny hlavní parametry, ale ani pro jednu volbu jsem nedosáhl čísla dvě. Naopak, výsledky se velmi lišily. V kapitole o mřížkové dimenzi bylo uvedeno, že se tato dimenze rovná Hausdorffově dimenzi, ale nemusí to být ve všech případech. Toto bude zřejmě příklad, kdy rovnost nenastává.

**Tabulka 7** Mandelbrotova množina, 100 iterací, základní mřížka 0.001

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	131	1.00000	2.117271	1.363182
0.05000000	337	1.30103	2.527630	1.314202
0.02500000	838	1.60206	2.923244	1.356628
0.01250000	2146	1.90309	3.331630	1.421912
0.00625000	5750	2.20412	3.759668	1.494449
0.00312500	16201	2.50515	4.209542	1.354872
0.00156250	41438	2.80618	4.617399	

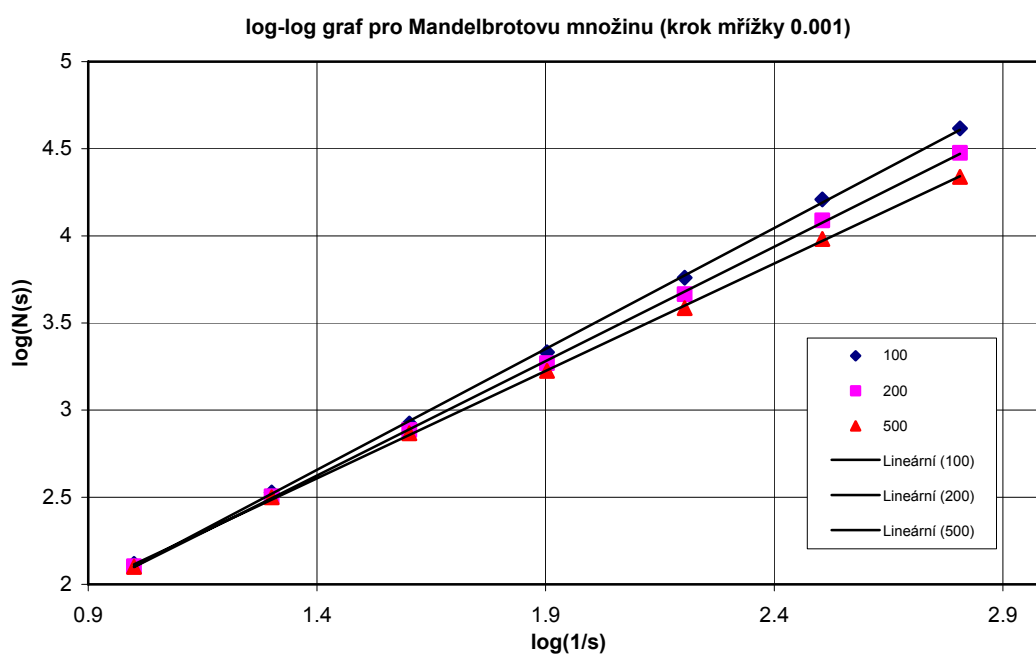


**Tabulka 8** Mandelbrotova množina, 200 iterací, základní mřížka 0.001

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	127	1.00000	2.103804	1.333243
0.05000000	320	1.30103	2.50515	1.264912
0.02500000	769	1.60206	2.885926	1.275023
0.01250000	1861	1.90309	3.269746	1.313063
0.00625000	4624	2.20412	3.665018	1.408275
0.00312500	12273	2.50515	4.088951	1.288561
0.00156250	29981	2.80618	4.476846	

**Tabulka 9** Mandelbrotova množina, 500 iterací, základní mřížka 0.001

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	126	1.00000	2.100371	1.326501
0.05000000	316	1.30103	2.499687	1.221740
0.02500000	737	1.60206	2.867467	1.188725
0.01250000	1680	1.90309	3.225309	1.195273
0.00625000	3847	2.20412	3.585122	1.318699
0.00312500	9596	2.50515	3.982090	1.183294
0.00156250	21792	2.80618	4.338297	



**Tabulka 10** Mandelbrotova množina, 100 iterací, základní mřížka 0.00025

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	142	1.00000	2.152288	1.397147
0.05000000	374	1.30103	2.572872	1.418890
0.02500000	1000	1.60206	3.000000	1.361207
0.01250000	2569	1.90309	3.409764	1.431232
0.00625000	6928	2.20412	3.840608	1.480107
0.00312500	19327	2.50515	4.286164	1.532618
0.00156250	55915	2.80618	4.747528	1.564434
0.00078125	165375	3.10721	5.218470	

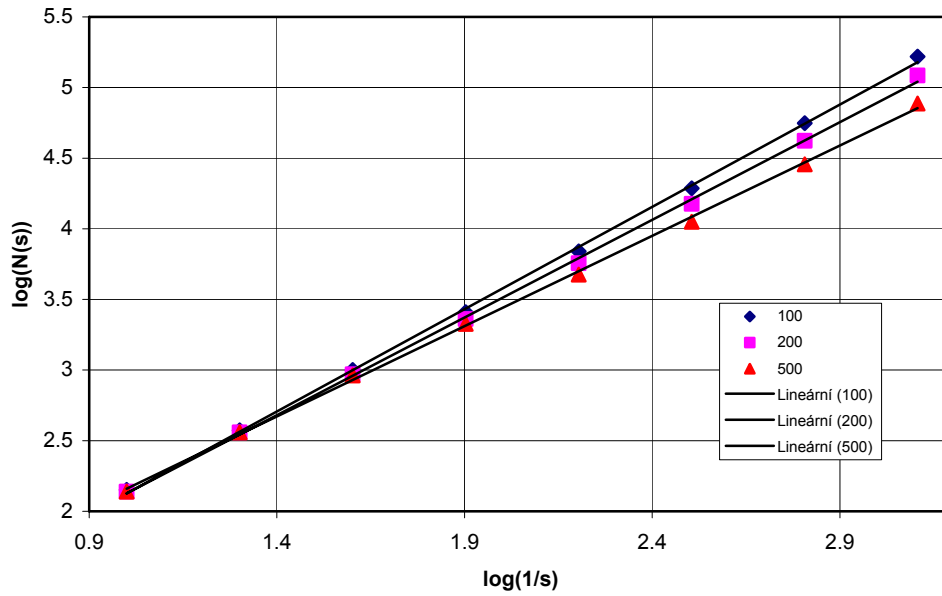
**Tabulka 11** Mandelbrotova množina, 200 iterací, základní mřížka 0.00025

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	138	1.00000	2.139879	1.391321
0.05000000	362	1.30103	2.558709	1.367433
0.02500000	934	1.60206	2.970347	1.295742
0.01250000	2293	1.90309	3.360404	1.314991
0.00625000	5705	2.20412	3.756256	1.398122
0.00312500	15036	2.50515	4.177132	1.482003
0.00156250	42001	2.80618	4.623260	1.536137
0.00078125	121810	3.10721	5.085683	

**Tabulka 12** Mandelbrotova množina, 500 iterací, základní mřížka 0.00025

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	138	1.00000	2.139879	1.391321
0.05000000	362	1.30103	2.558709	1.339358
0.02500000	916	1.60206	2.961895	1.210645
0.01250000	2120	1.90309	3.326336	1.162040
0.00625000	4744	2.20412	3.676145	1.241254
0.00312500	11215	2.50515	4.049799	1.350686
0.00156250	28602	2.80618	4.456396	1.432074
0.00078125	77178	3.10721	4.887494	

log-log graf pro Mandelbrotovu množinu (mřížka 0.00025)



**Tabulka 13** Mandelbrotova množina, 100 iterací, základní mřížka 0.0001

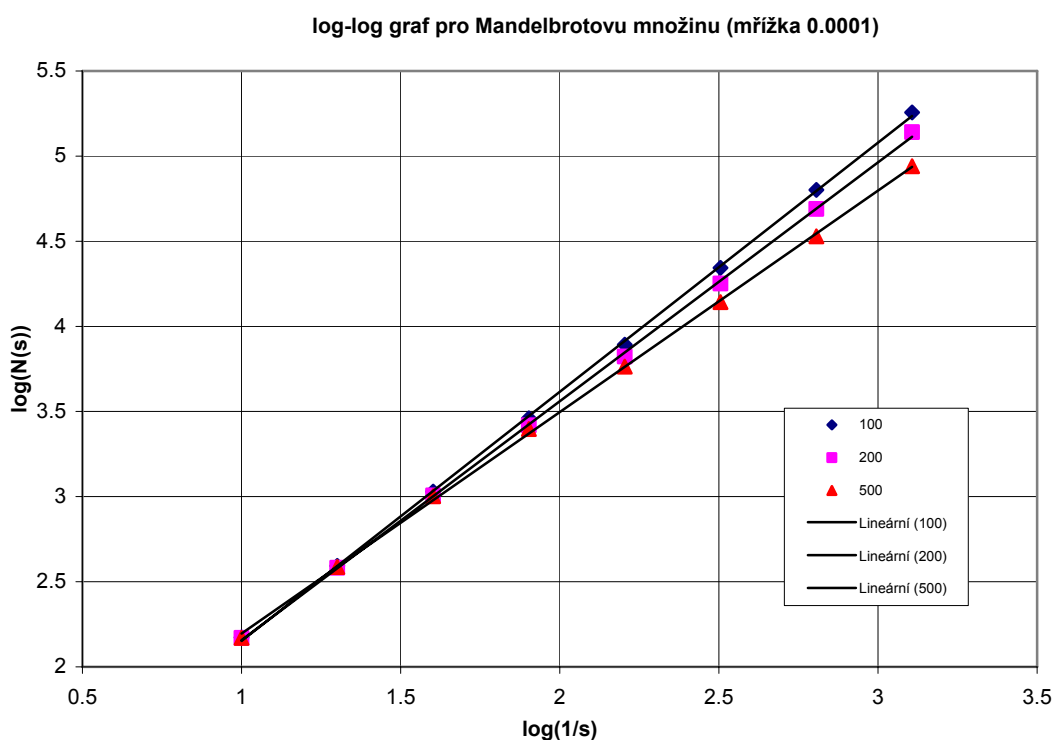
$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	149	1.00000	2.173186	1.395541
0.05000000	392	1.30103	2.593286	1.447336
0.02500000	1069	1.60206	3.028978	1.432309
0.01250000	2885	1.90309	3.460146	1.437490
0.00625000	7814	2.20412	3.892873	1.498280
0.00312500	22075	2.50515	4.343901	1.518994
0.00156250	63265	2.80618	4.801164	1.513846
0.00078125	180666	3.10721	5.256876	

**Tabulka 14** Mandelbrotova množina, 200 iterací, základní mřížka 0.0001

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	148	1.00000	2.170262	1.367975
0.05000000	382	1.30103	2.582063	1.409835
0.02500000	1015	1.60206	3.006466	1.368638
0.01250000	2621	1.90309	3.418467	1.344105
0.00625000	6654	2.20412	3.823083	1.422175
0.00312500	17832	2.50515	4.251200	1.456811
0.00156250	48949	2.80618	4.689744	1.498502
0.00078125	138305	3.10721	5.140838	

**Tabulka 15** Mandelbrotova množina, 500 iterací, základní mřížka 0.0001

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	148	1.00000	2.170262	1.383004
0.05000000	386	1.30103	2.586587	1.379087
0.02500000	1004	1.60206	3.001734	1.311545
0.01250000	2492	1.90309	3.396548	1.220986
0.00625000	5809	2.20412	3.764101	1.255918
0.00312500	13873	2.50515	4.14217	1.283334
0.00156250	33767	2.80618	4.528492	1.370533
0.00078125	87310	3.10721	4.941064	



Proložíme-li body v grafu přímkami, pak pro různou velikost mřížky dostaneme následující hodnoty:

**Tabulka 16** Hodnota mřížkové dimenze v závislosti na počtu iterací a velikosti mřížky

Mřížka \ Iterace	0.001	0.00025	0.0001
100	1.388166	1.448435	1.463338
200	1.312852	1.382539	1.402773
500	1.233413	1.278755	1.300851

Tabulka 16 ukazuje výsledky výpočtu mřížkové dimenze pro Mandelbrotovu množinu. Výsledky vůbec neodpovídají tomu, co bychom očekávali, a to číslu 2. Je zde ale vidět jistá souvislost mezi výsledky. Čím jemnější základní mřížka, tím je dimenze vyšší, ale naopak čím více iterací (tzn. přesnější určení množiny), tím menší dimenze.

V dostupné literatuře jsem bohužel nenašel žádnou zmínku o tom, že by se někdo pokoušel dimenzi Mandelbrotovy množiny měřit.

#### 4.4 Juliova množina ( $c=-1+0i$ )

Další z množin, u které jsem se snažil změřit mřížkovou dimenzi, je Juliova množina s konstantou  $-1+0i$ . Pro tento bod není sice známa Hausdorffova dimenze, ale podařilo se mi v literatuře nalézt pokus o její změření. Na internetových stránkách [7] autor zveřejnil své hodnoty z výpočtu. Jeho postup spočíval v tom, že si nechal nakreslit tuto množinu jako dvoubarevný obrázek (bitovou mapu), a pak použil program na měření mřížkové dimenze z obrázku.

**Tabulka 17** Juliova množina  $c=-1+0i$ , 100 iterací (můj výpočet)

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
0.10000000	315	1	2.498311	1.249614
0.05000000	749	1.30103	2.874482	1.301365
0.02500000	1846	1.60206	3.266232	1.258338
0.01250000	4416	1.90309	3.645029	1.269906
0.00625000	10649	2.20412	4.027309	1.258591
0.00312500	25479	2.50515	4.406182	1.277598
0.00156250	61770	2.80618	4.790778	

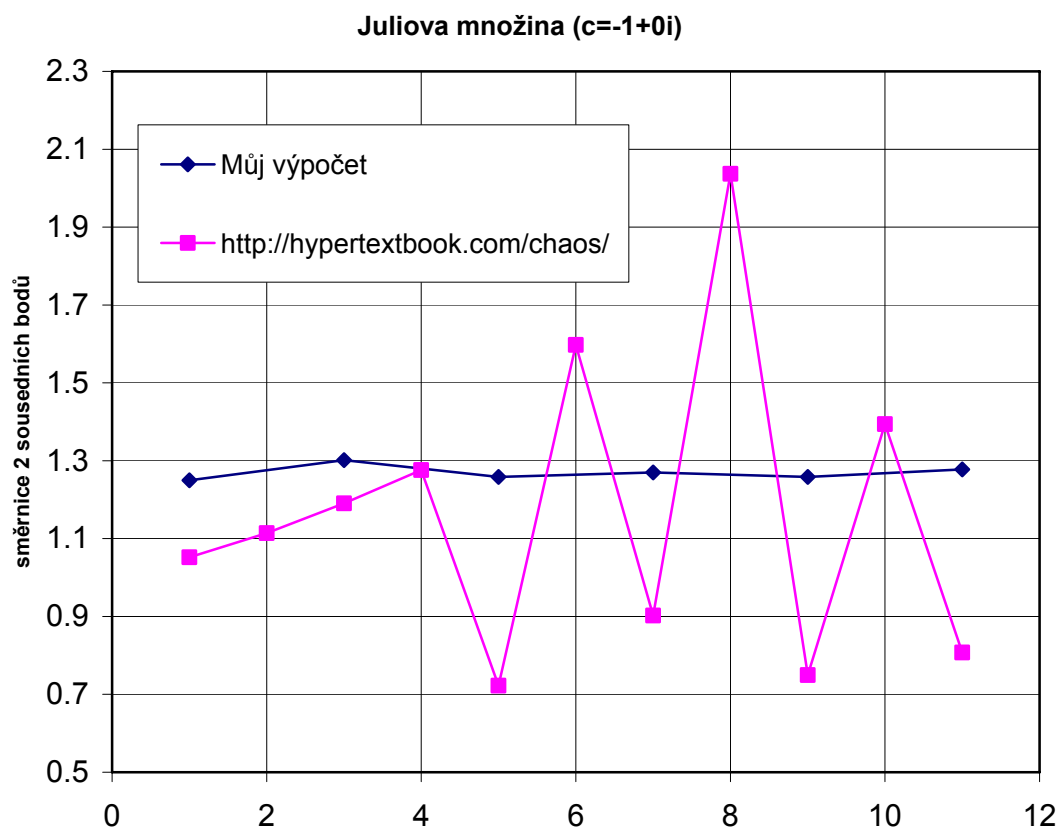
V tabulce 18 parametr  $s$  neznamena velikost buňky mřížky v komplexní rovině, ale udává délku strany této buňky v pixelech (obrazových bodech).

**Tabulka 18** Výsledky měření z [7] pro Juliovu množinu  $c=-1+0i$

$s$	$N(s)$	$\log(1/s)$	$\log(N(s))$	směrnice mezi 2 body
1	3052	0.00000	8.02355	1.051966
2	1472	-0.69315	7.29438	1.114190
4	680	-1.38629	6.52209	1.190681
14	153	-2.63906	5.03044	1.276224
25	73	-3.21888	4.29046	0.722197
37	55	-3.61092	4.00733	1.597376
50	34	-3.91202	3.52636	0.902608
62	28	-4.12713	3.3322	2.036983
75	19	-4.31749	2.94444	0.749427
87	17	-4.46591	2.83321	1.394155
100	14	-4.60517	2.63906	0.807358
200	8	-5.29832	2.07944	

Z výsledků je vidět, že měření z bitové mapy není tak přesné jako metoda, kdy se počty obsazených buněk mřížky získají výpočtem na jemnější mřížce. Směrnice log-log grafu v případě mých hodnot vyšla 1.27 a pro hodnoty z [7] 1.16. Zde je rozdíl 0.11, což není málo. Bohužel hodnoty nemůžeme hned srovnávat a říci, co je lepší, neboť u výpočtu z literatury nemám informace o důležitých parametrech jako jsou počet iterací a způsob výpočtu směrnice. Z hodnot je ale zřejmé, že pro výpočet dimenze autor použil obrázek v relativně

malém rozlišení. Porovná-li to se svým měřením, tak pokud bychom každou buňku mřížky nakreslili jako jeden obrazový bod, dostali bychom obrázek v rozlišení 5120x5120.



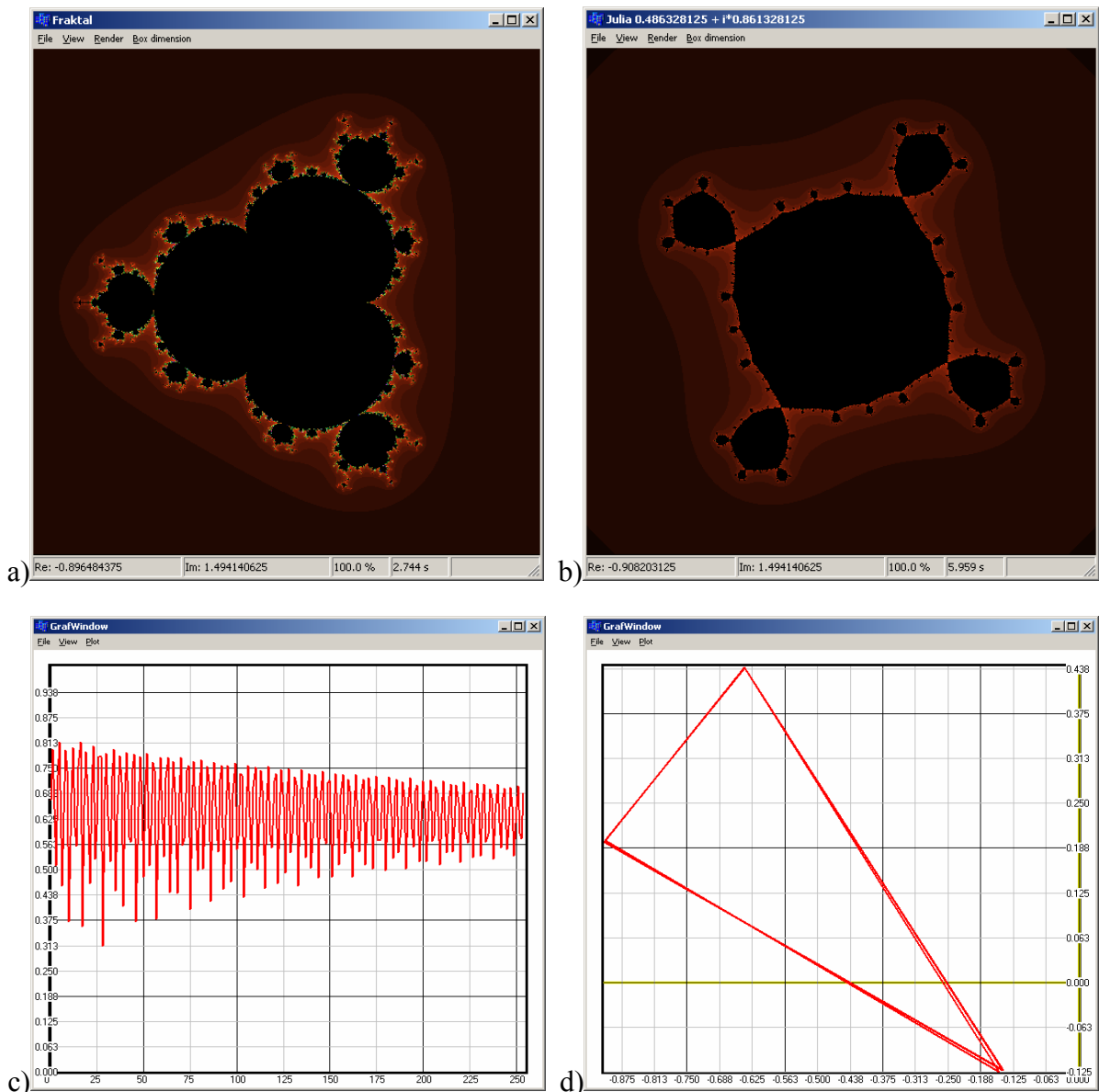
## 5. Programy

### 5.1 Generátor Mandelbrovovy množiny a množin Juliových

Tento program slouží pro generování a průzkum Mandelbrovovy množiny a Juliových množin. Je napsán v Borland C++ Builderu 6.0. Jazyk C++ jsem zvolil hlavně kvůli jeho rychlosti, která je pro tento typ úloh důležitá.

Mezi hlavní funkce programu patří:

- generování Mandelbrovovy množiny s exponentem 2, 3 a 4;
- generování příslušných Juliových množin;
- zobrazení iteračních posloupností v komplexní rovině i v absolutních hodnotách;
- jednoduché zvětšování částí množiny.



**Obrázek 8** Program pro zobrazení Mandelbrovovy množiny. a) Mandelbrotova množina s exponentem 4; b) Juliova množina s exponentem 4; c) Posloupnost iterací zobrazená v absolutní hodnotě; d) posloupnost iterací zobrazená v komplexní rovině.

Program jsem se snažil udělat co nejvíce uživatelsky přátelský. Stisknutím levého tlačítka myši lze nakreslit obdélník, který se po uvolnění tlačítka zvětší do celého okna. Kliknutím pravým tlačítkem myši se zobrazí Juliova množina pro bod, který se nachází pod kurzorem myši. Kliknutí levým tlačítkem myši a současným podržením klávesy CTRL se zobrazí nové okno s grafem iterační posloupnosti pro příslušný bod. Zde si lze zvolit, zda má graf být zobrazen v komplexní rovině nebo jen jako absolutní hodnoty. Komplexní posloupnost je zároveň zakreslena do původního obrázku, aby byl lépe vidět vztah posloupnosti k množině.

Zkoumáme-li iterační posloupnosti, zjistíme, že pro Mandelbrotovu množinu tyto posloupnosti klesají k nule pouze pro body z největší „bubliny“. Ostatní posloupnosti oscilují a platí, že čím je menší bublina, tím více vrcholů bude mít zobrazený n-úhelník. Bohužel se mi v literatuře nepodařilo najít nějaké podrobnosti o tomto jevu, pouze to, že ostatní tuto skutečnost také zjistili.

Při programování tohoto programu jsem musel využít možností vláken, jinak by program po dobu výpočtu nereagoval na vstupy uživatele. Výpočet jsem se snažil co nejvíce optimalizovat, ale i tak může nakreslení většího obrázku trvat až desítky sekund.

## 5.2 Program pro výpočet mřížkové dimenze

Tento program napsaný v C++ vypočítá mřížkovou dimenzi kružnice, čtverce, hranice čtverce, Mandelbrotovy množiny a Juliovy množiny. Jeho výstupem je tabulka obsahující velikost mřížky a odpovídající počet obsazených čtverců, dále bitmapový obrázek množiny a soubor obsahující souřadnice obsazených čtverců.

Na vstupu programu se zadávají následující hodnoty:

- Typ množiny (kružnice, čtverec, hranice čtverce, Mandelbrotova množina a Juliovy množiny);
- Jemnost základní mřížky – tzn. na kolik menších čtverečků rozdělit buňku základní mřížky, důležité pro hledání hranice množiny;
- Počáteční velikost mřížky – tzn. velikost mřížky, se kterou program začne pracovat;
- Konečná velikost mřížky - tzn. velikost mřížky, kdy program skončí;
- Krok mřížky – koeficient pro zjemňování mřížky (např. 0.5 znamená, že následující mřížka bude dvakrát jemnější);
- U Mandelbrotovy a Juliovy množiny se ještě zadává počet iterací, kdy rozhodnout, zda bod jde nebo nejde do nekonečna.

### Algoritmus:

Program obsahuje několik funkcí, které zjistí, zda bod patří nebo nepatří do dané množiny. Příklad jedné z těchto funkcí:

```
bool test_circle(double x,double y,double r)
{
    if ((x*x+y*y-r*r)<=0)
        return true;
    else
        return false;
}
```



Další důležitou funkcí je funkce `test_box`, která rozhoduje, zda čtvercem prochází hranice. Do proměnných `outside` a `inside` zapíšeme hodnotu `false`. Funkce pak prochází čtverec mřížky (o velikosti `size`) po kroku z jemnější mřížky (proměnná `step`). Funkce `test_mandel` vrací, zda bod patří či nepatří do množiny. Pokud se stane, že v tomto čtverci nějaký bod patřil do množiny (proměnná `inside` bude `true`) a zároveň tam nějaký nepatřil (proměnná `outside` bude `true`), pak se to proměnné `end` uloží `true`, což znamená, že tento čtverec obsahuje hranici množiny. V ostatních případech bude `end` rovno `false`. Moje implementace této funkce:

```
bool test_box(double x0,double y0,double step,double size,int
iter,int type)
{
    double y = y0;
    bool end = false;
    bool outside = false;
    bool inside = false;

    do
    {
        double x=x0;
        do
        {
            //test pro Mandelbrotovu množinu.
            bool test = test_mandel2(x,y,iter);
            if (test) inside = true;
            else outside = true;

            x+=step;
            end = (inside && outside);
        } while ((!end) && (x<(x0+size)));
        y+=step;
    } while ((!end) && (y<(y0+size)));
    return end;
}
```

Poslední důležitou funkcí, je funkce, která rozdělí plochu na mřížku podle zadání. Pro každý čtverec z mřížky zavolá funkci `test_box`. Pokud `test_box` vrátí `true`, zvýší se hodnota `N`, která znamená počet započtených čtverců. Pro každý čtverec zároveň zapíše pixel do výstupního obrázku a souřadnice obsazeného čtverce do výstupního textového souboru. Výstupní data program nijak nezpracovává, a proto je třeba použít nějakého tabulkového editoru.

## 6. Závěr

Cílem toho výzkumného úkolu pro mne bylo detailnější seznámení s fraktálními dimenzemi, jejich výpočet a vlastnosti. Získané informace jsem se snažil podat v této práci co nejsrozumitelněji a hlavně v českém jazyce. Anglických materiálů je dostatek, ale česky jsem nenašel skoro nic.

V kapitole o Hausdorffově dimenzi jsem shrnul její důležité vlastnosti. Důkazy k větám jsem většinou použil z literatury, ale snažil jsem se, aby byly lépe pochopitelné, některé úvahy jsem více rozvedl a podrobněji popsal. Některé věty byly v literatuře uvedeny jako cvičení, ke kterým bylo za úkol důkazy dodělat. Většinu jsem zvládnul, ale samozřejmě jsem je zkontroloval se správným řešením.

Mřížková dimenze je v praxi velmi často používaná, proto jsem se jí také intenzivně věnoval. Teoretická část shrnuje důležité vlastnosti a vztah k Hausdorffově míře. Tyto informace jsem využil dále a snažil jsem se numericky vypočítat dimenze různých množin. Pro měření dimenze jsem napsal program v jazyce C++, který dle zadaných parametrů počítá mřížkovou dimenzi. Výsledky jsem porovnal buď s dimenzí Hausdorffovou nebo s údaji z literatury.

Výsledky měření pro „jednoduché“ množiny vyšly podle očekávání, ovšem i zde docházelo k chybám v řádu desetin až jednotek procent. Pro Mandelbrotovu množinu byly výsledky úplně rozdílné než jsem čekal. Moje další práce by se měla týkat právě těchto jevů. Budu se snažit nalézt odpověď, proč dochází k chybám pro jednoduché množiny a proč mřížková dimenze Mandelbrotovy množiny vyšla úplně jinak. V případě Mandelbrotovy množiny se nabízí otázka, zda je pro tuto množinu mřížková dimenze rozdílná od Hausdorffovy nebo zda pouze není Mandelbrotova množina generována nepřesně. V programu jsem použil běžný způsob generování této množiny. Je možné, že při generování jiným algoritmem bych dostal lepší výsledky.

Pomocí mého programu pro generování Mandelbrotovy množiny lze provádět její průzkum a zároveň si i zobrazit iterační posloupnosti jak v komplexní rovině, tak v absolutních hodnotách. Díky tomu se mi podařilo objevit, že pro největší „bublínu“ Mandelbrotovy množiny klesají posloupnosti k nule, zatímco pro menší „bublíny“ posloupnost vždy osciluje. Zjistil jsem také, že čím je bublina menší, tím má iterační posloupnost více různých bodů. V literatuře se o tomto jevu příliš nepíše, ověřil jsem pouze, že to je pravdivý výsledek.

Nově jsem začal pracovat na programu pro generování fraktálů typu Kochovy křivky. Program by měl být univerzální s možností vykreslení libovolného fraktálu a příjemným uživatelským rozhraním.

Myslím, že nevyřešených úkolů v oblasti fraktální geometrie je ještě mnoho, a proto bych i svoji další práci chtěl věnovat právě této oblasti matematiky.

## 7. Literatura

- [1] Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.: "Chaos and Fractals: New Frontiers of Science", Springer-Verlag, New York, 1992
- [2] Peitgen H.-O., Richter P. H.: "The Beauty of Fractals", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986.
- [3] Barnsley M. F.: "Fractals Everywhere", Academic Press Inc., San Diego, 1988.
- [4] Bochníček M., Nežádal M., Zmeškal O.: "Numeric Calculation of Fractal Dimension", <http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/>
- [5] Bochníček M., Nežádal M., Zmeškal O.: "The Box-counting: Critical Study", <http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/>
- [6] Shishikura M.: "The Boundary of the Mandelbrot Set has Hausdorff Dimension Two.", *Astérisque*, No. 222, 7, 389-405, 1994
- [7] Elert G.: "The Chaos Textbook", <http://www.hypertextbook.com/chaos>
- [8] Falconer K.: "Fractal Geometry", John Wiley & Sons, 2003
- [9] Edgar G.: "Measure, Topology and Fractal Geometry", Springer-Verlag, Berlin, 1989