ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

POČÍTAČOVÉ METODY ANALÝZY FRAKTÁLNÍCH MNOŽIN

METHODS OF COMPUTER ANALYSIS OF FRACTAL SETS

PETR PAUŠ

ŠKOLITEL: DR. ING. MICHAL BENEŠ

2005/2006

Vložené zadání.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a uvedl jsem veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 8. května 2005

Název práce:
Počítačové metody analýzy fraktálních množin

Autor: Petr Pauš

Obor: Inženýrská Informatika
Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Dr. Ing. Michal Beneš. Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Konzultant: ---

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá počítačovou analýzou fraktálních množin, obsahuje teoretické základy fraktální dimenze, hlavně dimenze Hausdorffovy a mřížkové, způsoby analytického i numerického výpočtu dimenze. Důležitou součástí jsou také ukázky analytického výpočtu dimenzí pro různé fraktální množiny. V práci je navrženo a na příkladech uvedeno vylepšení standardního numerického výpočtu mřížkové dimenze. Součástí práce jsou programy vhodné pro generování, analýzu a měření dimenze fraktálních množin.

Klíčová slova: Fraktální geometrie, Hausdorffova dimenze, mřížková dimenze, vizualizace.

Title:
Methods of computer analysis of fractal sets

Author: Petr Pauš

Abstract: This diploma work deals with the computer analusis of fractal sets, contains basics of fractal dimension, especially Hausdorff and box-counting dimension, ways how to analytically and numerically determine fractal dimension and examples of dimension calculations for various fractals. This work also describes an enhancement for numerical box-counting dimension shown on many examples. There are three programs suitable for generation and analysis of fractal sets and for measuring their dimension with this work.

Key words: *Fractal geometry, Hausdorff dimension, Box-counting dimension, visualization.*

Obsah

1. Úvod

Fraktální geometrie mě vždy velice zajímala, protože se zde prolínají nejen různé matematické obory, ale i algoritmizace a počítačová grafika. Z tohoto důvodu jsem si vybral toto téma, jehož vypracováním snad alespoň trochu přispěji k jeho rozvoji a zároveň i zlepším své vědomosti ve zmíněných oborech.

Fraktální geometrie se využívá v mnoha oblastech vědy, namátkou v biologii nebo při výzkumu vlastností materiálů. Umožňuje, na rozdíl od běžné euklidovské geometrie, simulovat složité děje a struktury, které se nacházejí v reálném světě. V praxi je často potřebné správně určit fraktální dimenzi zkoumaného objektu, např. struktury lomu v materiálu, složitosti růstu nádoru apod.

Fraktálních dimenzí existuje celá řada, avšak ve své práci jsem zaměřil pouze na dvě – Hausdorffovu dimenzi, která je použitelná pro všechny množiny, avšak složitá na analytický výpočet a naprosto nevhodná po numerický výpočet, a na mřížkovou dimenzi, která naopak není tak „dokonalá“ jako dimenze Hausdorffova, ale zase lze velmi lehce implementovat na počítači.

Cílem této práce je uvést a vysvětlit základní pojmy fraktální geometrie, popsat základní vlastnosti a způsoby výpočtu fraktální dimenze, ukázat výpočty dimenzí analyticky i numericky a pokusit se vylepšit přesnost numerického měření mřížkové dimenze.

Práce je rozdělena na dvě hlavní části – teoretickou a praktickou. V teoretické části se zabývám teorií míry a definicí a vlastnostmi Hausdorffovy a mřížkové dimenze. Vlastnosti dimenzí jsou popsány matematickými větami, jejichž většina je doplněna důkazy, které dle mého názoru velice usnadňují pochopení tématu. Tato část obsahuje také mnoho příkladů výpočtů, které rovněž pomáhají pochopení.

V praktické části se zabývám numerickým výpočtem mřížkové dimenze a jejím možným vylepšením. Výpočty jsou provedeny postupně na různých množinách počínaje jednoduchými až po nejsložitější fraktální množiny typu Mandelbrotovy množiny.

K práci nedílně patří programy, které jsem vytvořil pro potřeby své práce. Tyto programy nejsou jen jednoúčelové, ale mohou posloužit ostatním při průzkumu fraktálů.

Práce vznikla v rámci projektů MŠMT – výzkumného záměru „Aplikovaná matematika v technických a fyzikálních vědách“ č. MSM 6840770010 a „Centra J. Nečase pro matematické modelování“ č. LC 06052.

2. Základní pojmy fraktální geometrie

2.1. Fraktál

Fraktál je geometrický objekt, který po rozdělení na menší části vykazuje tvarovou podobnost s těmito částmi. Fraktálními objekty se zabývá samostatná vědní disciplína nazývaná fraktální geometrie. Tato disciplína je intenzivně rozvíjena zhruba od šedesátých let minulého století. Za jejího zakladatele je dnes považován matematik Benoit B. Mandelbrot, který jako první matematicky definoval pojem fraktál (podrobně v [17] a [18]). I před zavedením pojmů fraktál a fraktální geometrie se vědci a umělci zabývali geometrickými útvary, které dnes nazýváme fraktály, jako například sněhovou vločku Kochovu (Koch snowflake) nebo Sierpińského trojúhelník (Sierpiński triangle) – více v [1] a [2].

Slovo „fraktál“ pochází z latinského slova „fractus“, což znamená zlomený. Mandelbrot zvolil toto slovo ve svých pracích jako název pro objekty příliš nepravidelné pro běžnou matematiku.

Protože velká část fraktálů je využívána v počítačové grafice a fraktály lze nejlépe popsat jako geometrické objekty, můžeme fraktál nejjednodušeji definovat jako nekonečně členitý útvar. Opakem nekonečně členitého útvaru je geometricky hladký útvar, který lze popsat klasickou Euklidovskou geometrií.

2.2. Soběpodobnost, systémy iterovaných funkcí

Soběpodobnost (matematicky se tato vlastnost nazývá *invariance vůči změně měřítka*) je taková vlastnost objektu, že objekt vypadá stejně, ať se na něj díváme v jakémkoliv zvětšení.

Soběpodobnost je hlavním znakem fraktálních útvarů a většinou je také považována za jejich definici. To nám také pomáhá při vyhledávání fraktálních útvarů v přírodě. Soběpodobný je například kámen, hory, mraky, stromy, rostliny ale i krátery atd., tedy objekty živé i neživé přírody.

Matematicky je soběpodobná množina definována takto: (více v [1],[2],[8] a [13])

Definice 1 *Soběpodobnost*

*Soběpodobná množina A n-*dimenzionálního *Euklidovského prostoru E_n je taková množina, pro níž existuje konečně mnoho kontrahujících zobrazení $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ takových, že A vznikne jako:*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi(A). \tag{1}$$

Takto definovaná množina má několik velmi zajímavých vlastností:

- Soběpodobná množina vzniká opakováním sebe sama při určité transformaci (změna měřítka, rotace, posunutí, zkosení).
- Soběpodobné množiny jsou invariantní vůči změně měřítka. Při libovolném zvětšení, či zmenšení vypadají podobně.
- Soběpodobná množina vzniká sama ze sebe, respektive vzniká opakováním téhož motivu.
- Soběpodobná množina je velmi často fraktál.

Pro tyto množiny platí věta, že iterací vždy dojdeme k jednoznačně dané množině.

Věta 1 *Nechť $S_1, S_2, \ldots, S_m$ jsou kontrahující zobrazení na $D \subset \mathbb{R}^n$ taková, že*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \le c_i |x - y| \quad (x, y \in D),$$

kde $c_i<1$ pro každé i. Pak existuje jednoznačná neprázdná kompaktní množina F invariantní k S_i, tzn. splňuje

$$F=\bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Navíc pokud definujeme transformaci S na třídě neprázdných kompaktních množin jako

$$S(E)=\bigcup_{i=1}^{m} S_i(E),$$

pak

$$F=\bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E),$$

kde S^k je k-tá iterace S, $S^0(E)=E$, $S^k(E)=S\left(S^{k-1}(E)\right)$ pro každé $k\geq 1$, a kde E je libovolná množina ze třídy neprázdných kompaktních množin taková, že $S_i(E)\subset E$ pro každé i.

Důkaz této věty lze nalézt například v [8]. Posloupnost $S^k(E)$ konverguje k F pro libovolnou počáteční množinu E. Pomocí $S^k(E)$ získáme postupně se zlepšující aproximace množiny F, pokud F je fraktál, pak jsou tyto aproximace někdy nazývány jako *předfraktály* (*pre-fractals*).

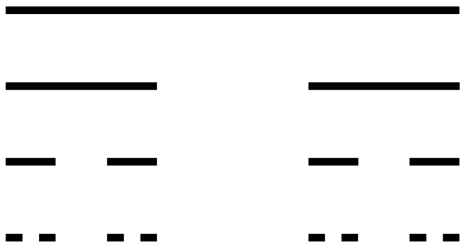
Princip opakování podobných tvarů ve zmenšené podobě je vidět prakticky u jakékoliv komplexní, složité struktury, která je vytvářena i pomocí velmi jednoduchých pravidel. Způsob, jakým probíhá větvení stromů či cév a žil v tělech živočichů, nebo hromadění baktérií a řas v koloniích, se dá matematicky uspokojivě popsat pouze fraktální geometrií.

2.3. Klasické fraktály

Jedny z prvních fraktálů vznikly jako pokus o nalezení hranic matematických pojmů. Slavní matematici jako Georg Cantor, Giuseppe Peano, David Hilbert, Niels Fabian Helge von Koch, Waclaw Sierpiński, Gaston Julia či Felix Hausdorff vymysleli různé matematické objekty vyhovující definicím, ale svými vlastnostmi velmi podivné. Například Kochova křivka, která je spojitá, avšak nikde nemá ani první derivaci. Tyto objekty byly považovány spíše za výjimky, za „matematická monstra“. Uveďme některé z těchto objektů.

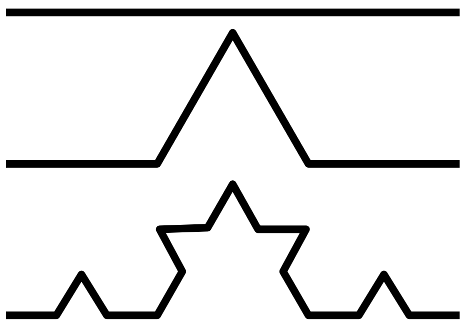
Začneme asi nejznámější a také nejjednodušeji zkonstruovatelnou množinou, a to **Cantorovou množinou**. Cantorova množina je množina bodů z uzavřeného intervalu $\langle 0;1\rangle$. Nejjednodušší definicí této množiny je popis, jak ji získat. Interval $\langle 0;1\rangle$ rozdělíme na tři shodné a otevřený interval $(1/3;2/3)$ vyjmeme. Čísla $1/3$ a $2/3$ nám tedy zůstanou v množině. Takto jsme získali dva uzavřené intervaly $\langle 0;1/3\rangle$ a $\langle 2/3;1\rangle$ o délce $1/3$. Nyní opakujeme tento postup na nové intervaly, tj. Z obou intervalů vyjmeme prostředek. To provádíme až do nekonečna. Body které zbudou prohlásíme za Cantorovu množinu, viz obrázek 1.

Které body tedy patří do množiny? Jistě to jsou 0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9..., tedy krajní body všech intervalů, kterých je spočetně mnoho. Nejsou to ale všechny body. Cantorova množina je nespočetná, zbývá tedy ještě nespočetně mnoho bodů, které náleží množině. Dále je třeba zmínit, že Cantorova množina je soběpodobná. Už z konstrukce je zřejmé, že např. části množiny v intervalech $\langle 0;1/3\rangle$ a $\langle 2/3;1\rangle$ jsou geometricky podobné celé množině, jen jsou zmenšeny v měřítku $1/3$. Kdybychom chtěli body patřící do této množiny popsat běžným způsobem, tak bychom narazili na problém. Nelze ji popsat několika podmínkami ani zapsat jako řešení nějaké jednoduché rovnice.



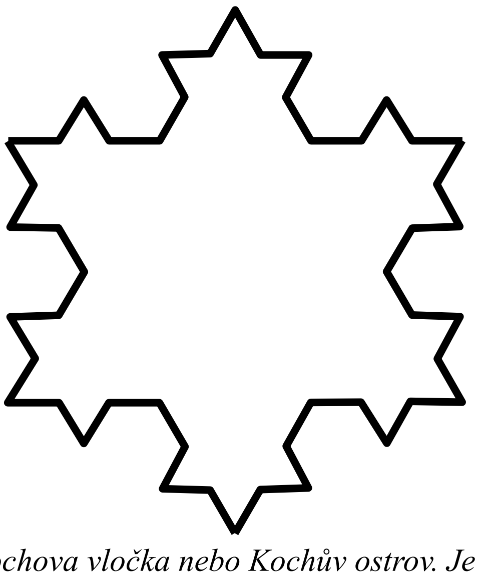
Obrázek 1 *Konstrukce Cantorovy množiny*

Velmi známá je i **Kochova křivka** na obrázku 2 (pojmenovaná po svém autorovi Nielsu Fabianovi Helge von Kochovi). Někdy je upravena a nazývána též Kochova vločka nebo Kochův ostrov (obrázek 3).



Obrázek 2 *Konstrukce Kochovy křivky*

Konstrukce množiny je následující: začneme s úsečkou délky 1, rozdělíme ji na tři části o délce $1/3$. Prostřední třetinu nahradíme rovnostranným trojúhelníkem. Stejný postup aplikujeme na všechny čtyři vzniklé úsečky. Takto pokračujeme až do nekonečna. Postup znázorňuje obrázek 2. První krok, v tomto případě úsečka délky 1, se nazývá **iniciátor**. Útvar v druhém kroku, kterým úsečku nahradíme se nazývá **generátor**. Takže generování množiny spočívá v tom, že v každém kroku nahradíme každý iniciátor za generátor.

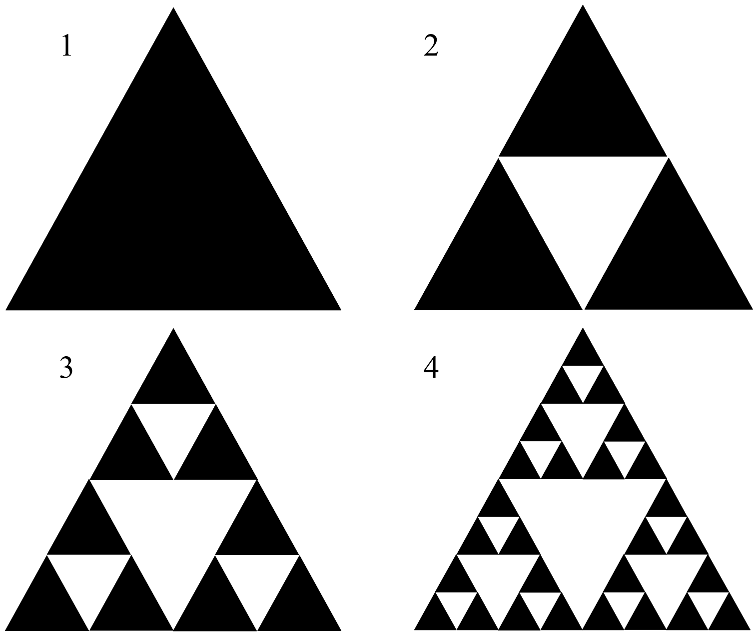


Obrázek 3 *Kochova vločka nebo Kochův ostrov. Je získán tak, že místo úsečkou začneme rovnostranným trojúhelníkem*

Tato křivka má několik zajímavých vlastností, mnoho jich je shodných s Cantorovou množinou. Je tvořena čtyřmi částmi, které jsou shodné s původní množinou, ale zmenšené v měřítku $1/3$. Křivka neobsahuje žádné úsečky nebo hladké segmenty, nemá derivaci v žádném bodě. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že délka k-té iterace při konstrukci množiny je rovna $(4/3)^k$, pro

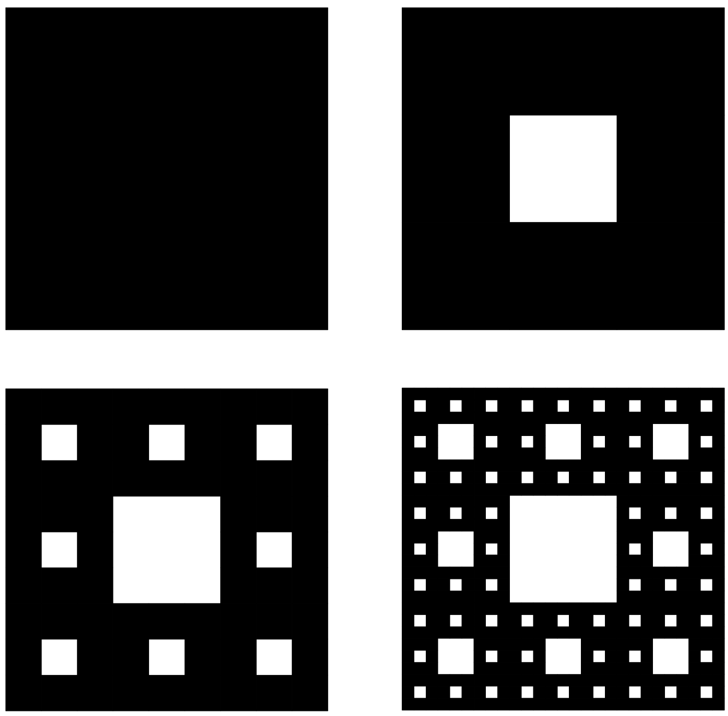
$k \to \infty$ je tedy její délka rovna nekonečnu. Na druhou stranu Kochova křivka zabírá nulovou plochu. Ani délka ani plocha tedy nejsou vhodné pro její popis.

Pomocí principu soběpodobnosti a iterací lze vytvořit mnoho různých fraktálů různých vlastností a jak se dozvíme dále, tak i různých dimenzi (například dalších kapitolách v příkladech 1 a 5). Uveďme ještě další dva klasické fraktály, které vymyslel polský matematik Wacław Sierpiński. Nejprve uveďme Sierpińského trojúhelník.



Obrázek 4 *Konstrukce Sierpińského trojúhelníku*

Konstrukce **Sierpińského trojúhelníku**: začneme s rovnostranným trojúhelníkem o hraně 1, ten rozdělíme na 4 stejné trojúhelníku s délkou hrany 1/2 a prostřední vyjmeme. Tento proces opakujeme nekonečně krát, názorněji je to zobrazeno na obrázku 4.



Obrázek 5 *Konstrukce Sierpińského koberce*

Dalším fraktálem, který vymyslel Sierpiński, je **Sierpińského koberec**. Konstruuje se následovně: Vezmeme jednotkový čtverec, rozdělíme jej na 9 čtverců o straně 1/3 a prostřední vyjmeme. Takto postupujeme pro každý další vzniklý čtverec až do nekonečna.

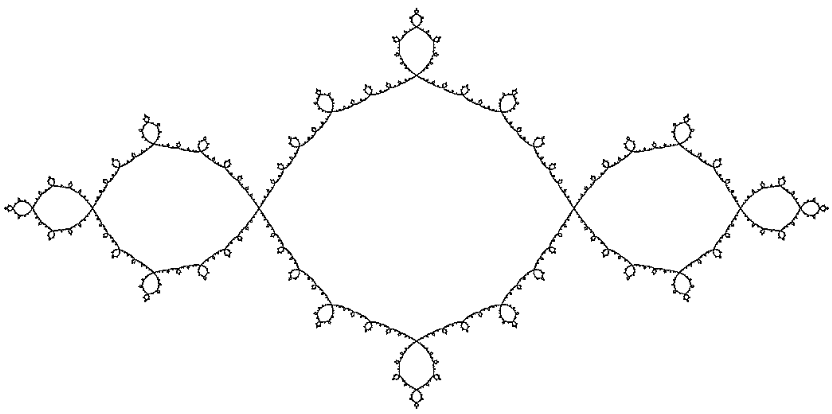
Existuje samozřejmě i řada dalších fraktálních množin, které nejsou konstruovány pomocí soběpodobnosti, například Mandelbrotova množina a Juliovy množiny. Těm se budeme věnovat dalších kapitole.

2.4. Juliovy množiny

Juliovy množiny (více v [1], [2], [3] a [8]) nesou jméno po svém objeviteli Gastonu Juliovi, francouzském matematikovi, který je zkoumal už v době, kdy neexistovaly počítače, které by mu práci usnadnily. Juliovy množiny jsou totiž vytvářeny pomocí iterace funkce komplexní paraboly

$$z_{n+1}=z_n^2+c, \tag{2}$$

kde proměnné z_n a c leží v komplexní rovině. Počáteční hodnota z_0 v případě Juliových množin reprezentuje pozici bodu v komplexní rovině. Komplexní hodnota c je zvolena libovolně a pro všechny počítané body v jednom obrazci zůstává konstantní. Juliových množin je tedy nekonečně mnoho. Příklady Juliových množin jsou uvedeny v kapitole o vizualizaci, na obrázku 6 je hranice Juliovy množiny pro $c=1+0i$.



Obrázek 6 *Hranice Juliovy množiny pro* $c=1+0i$

Juliova množina J je definována jako množina všech komplexních čísel z_0, pro které posloupnost z_n nediverguje, tzn.:

$$J_c=\left\{z_0\in\mathbb{C} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} z_n\neq\infty\right\}$$

kde z_n je samozřejmě posloupnost (2).

Při počítačovém generování Juliových množin máme k dispozici pouze konečný počet iterací, z kterých musíme usoudit, zda posloupnost konverguje či nikoliv. Platí následující věta.

Věta 2 *Nechť* z_n *je posloupnost zadaná jako v* (2). *Existuje číslo* $r(c)$ *závislé na konstantě* c *takové, že pokud pro nějaké* $n\in\mathbb{N}_0$ *je* $|z_n|>r(c)$, *pak posloupnost diverguje. Číslo* $r(c)$ *je dáno vzorcem*

$$r(c)=max\{|c|,2\}. \tag{3}$$

Důkaz: Předpokládejme tedy, že $|z|\geq|c|$ a $|z|\geq 2$. Potom existuje $\varepsilon>0$ tak, že $|z|=2+\varepsilon$. Dále využijeme trojúhelníkové nerovnosti pro komplexní čísla :

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \le |z^2 + c| + |c| .$$

Po převedení $|c|$ na druhou stranu rovnice získáme $|z^2 + c| \ge |z^2| - |c|$, což lze dále upravit

$$|z^2 + c| \ge |z^2| - |c| = |z|^2 - |c| \ge |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) = (1 + \varepsilon)|z| \ge |z| .$$

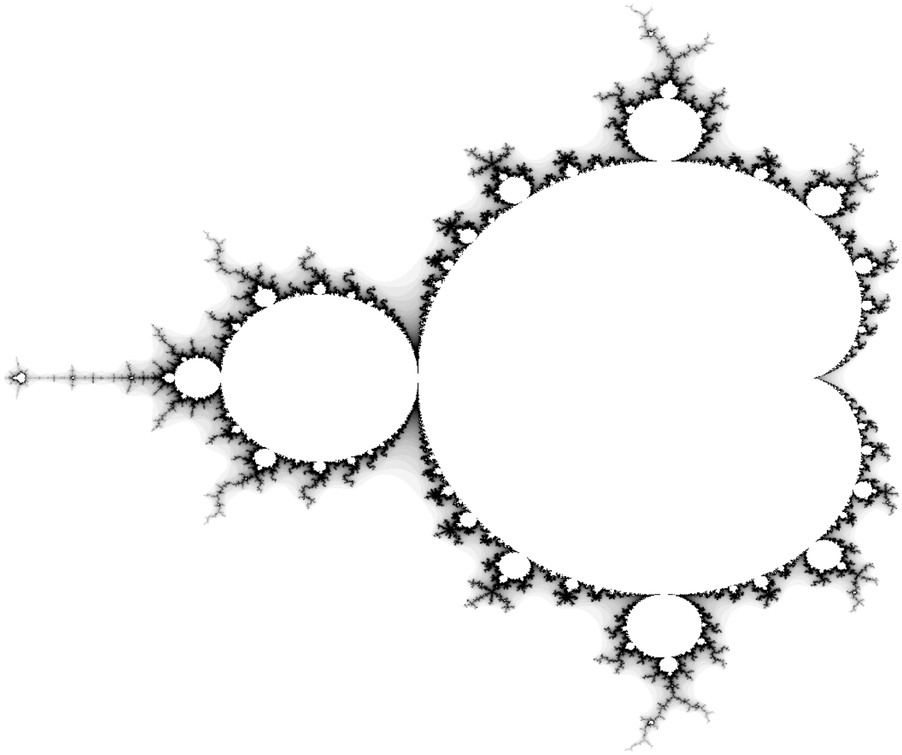
Z toho plyne, že při splnění předpokladů, vzroste v každé iteraci hodnota alespoň o faktor $1 + \varepsilon$. V k-té iteraci tedy alespoň o $(1 + \varepsilon)^k$ a z toho plyne, že absolutní hodnota jde k nekonečnu. □

2.5. Mandelbrotova množina

Mandelbrotova množina je na rozdíl od Juliových množin jen jedna. Je opět vytvářena pomocí iterace funkce komplexní paraboly (2), kde proměnné z_n a c leží v komplexní rovině. Mandelbrotovu množinu lze definovat jako množinu

$$M = \{c \in \mathbb{C} | c \to c^2 + c \to \cdots \text{ je omezená}\},$$

což je původní Mandelbrotova definice z roku 1979 (více v [17]). Lze ji ovšem také definovat jako množinu všech komplexních čísel c, kdy je Juliova množina J_c souvislá.



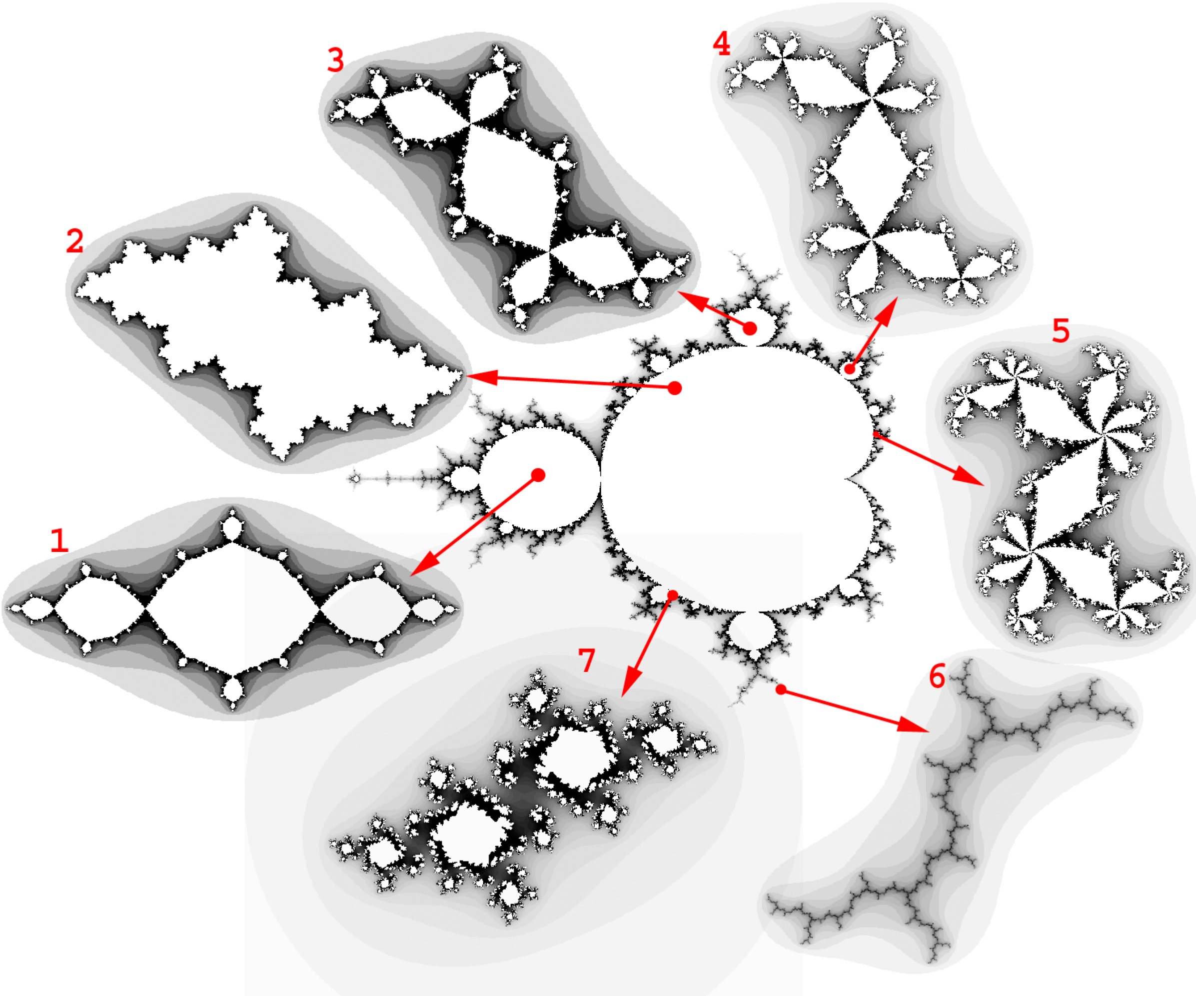
Obrázek 7 *Mandelbrotova množina*

Nyní si uvedeme základní vlastnosti Mandelbrotovy množiny. Základní rozdíl oproti Juliovým množinám je ten, že Mandelbrotova množina je jen jedna (tedy pro exponent 2). Dále platí, že Mandelbrotova množina je souvislá. Toto tvrzení dokázali roku 1982 A. Douady a J. H. Hubbard (podrobně v [19]).

Při zkoumání Mandelbrotovy množiny zjistíme, že po obvodu jsou množiny stejného tvaru. Tyto množiny nejsou pouze po obvodu, ale i „osamoceny“ v okolí. Ovšem vždy jsou spojeny s hlavní částí, množina M je souvislá.

Mandelbrotova množina má úzký vztah k množinám Juliovým. V definici bylo zmíněno, že pro bod z množiny M je odpovídající Juliova množina souvislá. Čím blíže bude bod c hranici M, tím nepravidelnější bude příslušná Juliova množina. Zajímavé je také vybrat body z menších podmnožin po obvodu.

Stejně jako v případě Juliových množin, musíme i teď z konečného počtu členů posloupnosti rozhodnout, zda konverguje či diverguje. Pro Mandelbrotovu množinu platí, že posloupnost jde k nekonečnu právě tehdy, když velikost nějakého členu posloupnosti překročí hodnotu 2. Důkaz se provádí velmi podobně jako pro Juliovy množiny.



Obrázek 8 *Ukázky Juliových množin v závislosti na pozici v Mandelbrotově množině.*
1) $c = -1.0155 + 0.00590551181 i$; 2) $c = -0.46 + 0.496062992 i$;
3) $c = -0.119 + 0.761811024 i$; 4) $c = 0.2935 + 0.537401575 i$; 5) $c = 0.3925 + 0.212598425 i$;
6) $c = 0 + 1 i$; 7) $c = -0.451805 + 0.572113894 i$ (*je mimo množinu*)

Při průzkumu Mandelbrotovy množiny pomocí mého programu, kdy jsem vynášel iterační posloupnosti do grafu v komplexní rovině, jsem zjistil, že posloupnosti konvergují k nule pouze pro body z největší „bubliny“ Mandelbrotovy množiny. V bublinách po obvodu posloupnosti vždy oscilují. Čím je větší je bublina, tím méně „cípů“ v posloupnosti nalezneme. Například v bublině obsahující bod $-0{,}12 + 0{,}75 i$ tvoří posloupnost bodů přibližně trojúhelník (viz obrázek 9a). Pokusme se vyřešit, pro který počáteční bod posloupnosti je to přesný trojúhelník. Musíme vyřešit rovnici, kdy se počáteční bod rovná bodu po třetí iteraci, tj. $z_0 = z_3$. Bod z_3 si přepíšeme jako

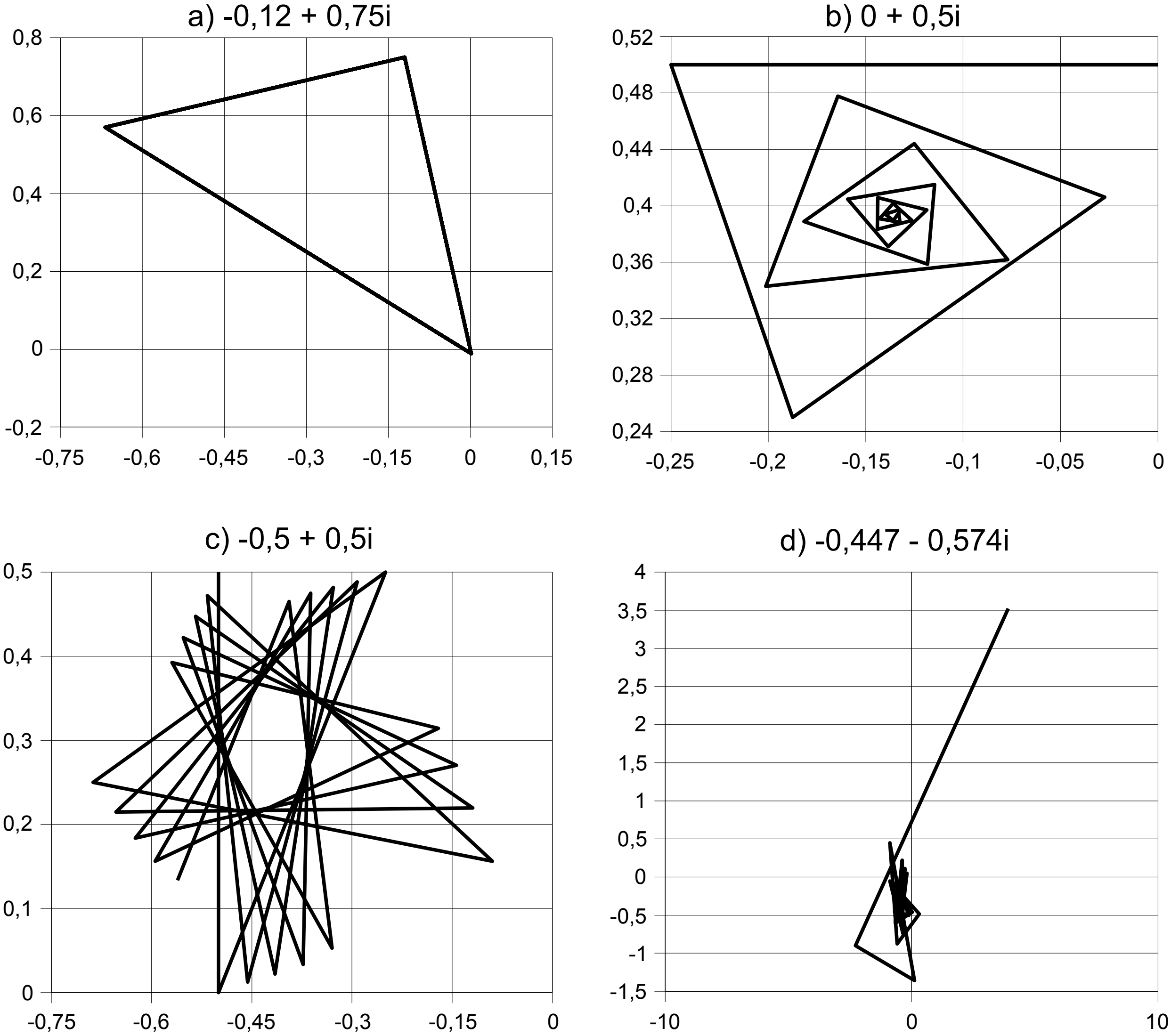
$$z_3 = [(z_0^2 + z_0)^2 + z_0]^2 + z_0$$

a řešíme rovnici

$$z_0=[(z_0^2+z_0)^2+z_0]^2+z_0.$$

Po úpravě se rovnice zjednoduší na

$$0=z_0^2(1+z_0+2z_0^2+z_0^3)^2.$$



Obrázek 9 *Iterační posloupnosti pro různé body Mandelbrotovy množiny.*
a) Osciluje b) Konverguje c) Velmi pomalu konverguje d) Diverguje

Vyřešit tuto rovnici analyticky není úplně snadné, protože obsahují třetí mocninu. K řešení jsem tedy použil program Mathematica, pomocí kterého jsem vypočítal následující přesná řešení:

$$z_0= -\frac{2}{3}+\frac{1}{6\sqrt[3]{3}}\left(1-\sqrt{3}\,i\right)\left(25-3\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1+\sqrt{3}\,i}{3\sqrt[3]{4}\left(25-3\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx -0{,}12256116+0{,}74486176\,i$$

$$z_0= -\frac{2}{3}+\frac{1}{6\sqrt[3]{3}}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)\left(25-3\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1+\sqrt{3}\,i}{3\sqrt[3]{4}\left(25-3\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx -0{,}12256116-0{,}74486176\,i$$

$$z_0= 0$$

$$z_0 = \frac{1}{3}\left(-2-\left(\frac{2}{25-3\sqrt{69}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{2}\left(25-3\sqrt{69}\right)\right)^{\frac{1}{3}}\right) \approx -1,75487766624669$$

Všechny kořeny jsou dvojnásobné. Dostáváme tedy osm řešení, ale pro nás jsou zajímavá hlavně první dvě. Ty se totiž nacházejí v bublině nahoře a symetricky dole. Pokud tedy zvolíme pro iteraci body z bubliny obsahující některý z těchto dvou bodů, pak bude výsledný graf připomínat trojúhelník. Čím blíže bude vybraný bod námi spočítané hodnotě, tím přesnější trojúhelník dostaneme.

Výpočty jsem ověřil, že pro každou bublinu existují body, kde posloupnost osciluje jen mezi několika body a počet těchto bodů závisí právě na velikosti bubliny.

3. Teoretická část

3.1. Míra a dimenze

Při studiu fraktálů do větší hloubky je potřebná alespoň částečná znalost teorie míry. Není ovšem zase třeba být v této oblasti expert. Nás budou zajímat pouze míry na podmnožinách $\mathbb{R}^n$. Míra je v podstatě způsob, jak číselně popsat velikost množiny. Matematicky je definována takto:

Definice 1 *Míra*

Nechť X je množina a nechť $\mathcal{F}$ je σ-algebra podmnožin X. Míra na $\mathcal{F}$ je množinová funkce $\mathcal{M}: \mathcal{F} \to \langle 0, \infty \rangle$ taková, že

1. $\mathcal{M}(\emptyset) = 0,$
2. *Pokud $A_n \in \mathcal{F}$ je disjunktní posloupnost množin, pak*

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}(A_n).$$

Definice 2 *Vnější míra*

Nechť X je množina. Vnější míra na X je funkce $\overline{\mathcal{M}}$ definovaná na všech podmnožinách množiny X, která zobrazuje do intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ a zároveň platí:

1. $\mathcal{M}(\emptyset) = 0,$
2. *Pokud $A \subseteq B$, pak $\overline{\mathcal{M}}(A) \le \overline{\mathcal{M}}(B)$,*
3. $\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_n A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}(A_n)$ *pro libovolnou posloupnost množin $A_n \in \mathcal{F}$.*

První podmínka požaduje, aby prázdná množina měla vždy míru 0, druhá podmínka zase požaduje, aby větší množina měla i větší míru a poslední podmínka zajišťuje, aby míra množiny nebyla větší než součet měr částí při spočetném rozložení množiny.

Pro každou míru existují množiny, na kterých se míra chová aditivně. Tyto množiny se nazývají μ-měřitelné množiny a matematicky jsou definovány takto:

Definice 3 *μ-měřitelná množina*

Množina $A \subset X$ se nazývá μ-měřitelná množina právě tehdy, když

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A)$$

pro všechna $E \subset X$.

V některých případech se setkáme se speciální verzí míry, tzv. rozložením hmoty (mass distribution).

Definice 4 *Rozdělení hmoty*

Nechť μ je míra na omezené podmnožině $A \subset \mathbb{R}^n$. Nechť pro ni platí $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Pak tuto míru nazýváme rozdělením hmoty a $\mu(A)$ nazýváme hmotou množiny A.

Definice měr a dimenzí pro matematicky složité množiny se často zakládají na tom, že měřenou složitou množinu pokryjí jinými množinami (jednoduššími) a dle vlastností těchto množin (počet, diametr…) pak definují hodnotu míry. Spočetné pokrytí je definováno takto:

Definice 5 *Spočetné pokrytí*

Množina množin $\mathcal{A}$ *se nazývá spočetné pokrytí množiny F právě tehdy, když*

$$F \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

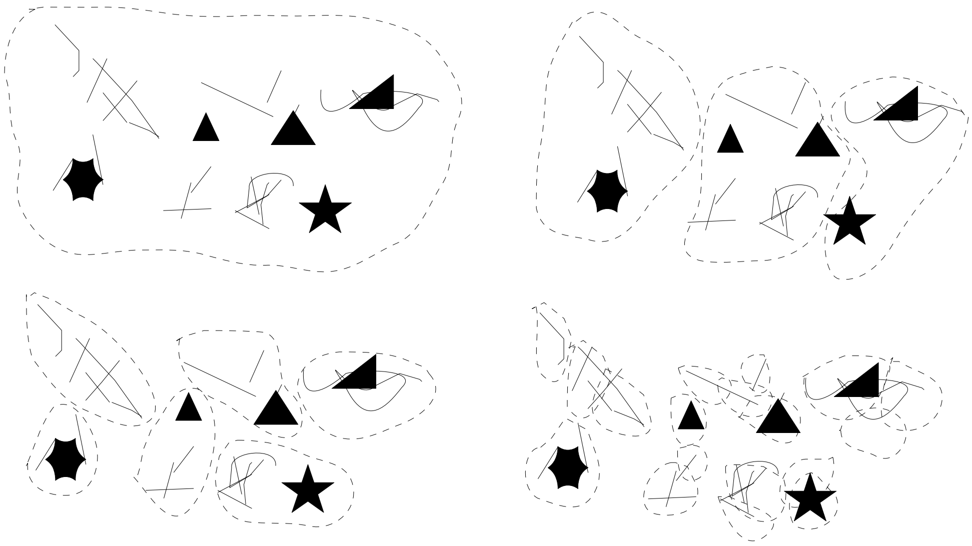
a $\mathcal{A}$ *je konečná (často spočetná) množina.*

V této definici vůbec nehraje roli velikost množin v pokrytí. Proto definujeme ještě ε-pokrytí, kde je na množiny tohoto pokrytí kladen požadavek, jaký mohou mít maximální diametr.

Definice 6 *ε-pokrytí*

Nechť ε je kladné reálné číslo (často velmi malé). Pokrytí $\mathcal{A}$ *se nazývá ε-pokrytí, pokud platí* $\operatorname{diam} A \leq \varepsilon$ *pro všechny množiny* $A \in \mathcal{A}$.

Princip ε-pokrytí je znázorněn na obrázku 10. Obecně mohou být v pokrytí libovolné množiny v libovolném počtu, ale v praxi se snažíme dosáhnout toho, aby jich byl co nejmenší počet a tvarem co nejlépe kryli danou množinu. Někdy je třeba vzít například pokrytí pouze čtverci, kruhy nebo jinými množinami. Setkáme se s tím hlavně v kapitole o mřížkové dimenzi.



Obrázek 10 *Různá pokrytí množiny pro zmenšující se ε.*

Dále definujeme dolní a horní induktivní dimenzi. Jejich hodnoty jsou vždy celá čísla. Tato vlastnost je zcela logická, ale při studiu fraktálních množin bychom se moc daleko nedostali. Tyto dimenze pak nahradíme obecnějšími, které dávají reálná čísla jako svůj výsledek. Tyto definice jsem uvedl hlavně k porovnání s fraktálními dimenzemi.

Definice 7 *Dolní induktivní dimenze*

Dolní induktivní dimenze prostoru (S, ρ) *je definována jako*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind} S = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad S = \emptyset \\
\operatorname{ind} S \leq k \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists \mathcal{B} \subset \tau \ \textit{báze})(\forall B \in \mathcal{B})(\operatorname{ind} \partial B \leq k-1) \\
\operatorname{ind} S = k \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{ind} S \leq k \wedge \neg \operatorname{ind} S \leq k-1 \\
\operatorname{ind} S = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall k \in \mathbb{N})(\neg \operatorname{ind} S \leq k)
\end{aligned}$$

Tato definice v podstatě říká, že množina má dimenzi k, pokud její hranice má dimenzi $k-1$. Tedy například krychle má dimenzi 3, protože je ohraničena čtverci, které mají dimenzi 2. Čtverce mají dimenzi 2, protože jsou ohraničeny úsečkami, které mají dimenzi 1.

Definice 8 *Horní induktivní dimenze*

Horní induktivní dimenze metrického prostoru (S, ρ) je definována jako

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Ind} S = -1 & \Leftrightarrow & S = \emptyset \\ \operatorname{Ind} S \le k & \Leftrightarrow & (\forall A, B \subset S \ \ \textit{uzavřené}, \textit{disjunktní})(\exists L \subset S)(\operatorname{Ind} L \le k-1 \wedge L \ \ \textit{odděluje} \ \ A, B) \\ \operatorname{Ind} S = k & \Leftrightarrow & \operatorname{Ind} S \le k \wedge \neg \operatorname{Ind} S \le k-1 \\ \operatorname{Ind} S = +\infty & \Leftrightarrow & (\forall k \in \mathbb{N})(\neg \operatorname{Ind} S \le k) \end{array}$$

3.2. Hausdorffova míra

Pojem dimenze je při zkoumání fraktálů velmi důležitý. Jednou z nejstarších, avšak také jednou z nejdůležitějších dimenzí, je právě dimenze Hausdorffova. Je vhodná k práci z matematického hlediska, lze ji použít na libovolné množiny a je založena na mírách, se kterými se relativně lehce pracuje. Její hlavní nevýhodou je, že v některých případech je velmi obtížné spočítat její hodnotu. V této kapitole definujeme Hausdorffovu míru a díky tomu potom i Hausdorffovu dimenzi.

Definice 9 *Hausdorffova s-rozměrná vnější míra*

Definujeme

$$\bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F) = \inf \sum_{A \in \mathcal{A}} (\operatorname{diam} A)^s, \tag{4}$$

kde infimum je přes všechna ε-pokrytí $\mathcal{A}$ množiny F. Když se ε bude zmenšovat, pak se $\bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F)$ bude zvyšovat, jelikož se sníží počet dostupných pokrytí. Má tedy smysl definovat

$$\bar{\mathcal{H}}^s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F), \tag{5}$$

což je Hausdorffova s-rozměrná vnější míra množiny F.

Značení: $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$ se bude značit vnější míra (s pruhem) a $\mathcal{H}^s(F)$ bude (obyčejná) míra (bez pruhu).

Hodnota limity je v intervalu $\langle 0, \infty \rangle$, přičemž hodnot 0 a ∞ nabývá velmi často. Hausdorffova míra zobecňuje obecný pojem délky, plochy a objemu. Dá se dokázat (důkaz lze nalézt například v [9]), že *n*-rozměrná Hausdorffova míra splývá s *n*-rozměrnou Lebesgueovou mírou. To znamená, že pro „běžné“ podmnožiny $F \in \mathbb{R}^n$ je $\bar{\mathcal{H}}^0(F)$ rovna počtu bodů v množině F, $\bar{\mathcal{H}}^1(F)$ je délka hladké křivky F, $\bar{\mathcal{H}}^2(F) = (4/\pi) \cdot \operatorname{plocha}(F)$, pokud F je hladká plocha a $\bar{\mathcal{H}}^3(F) = (6/\pi) \cdot \operatorname{objem}(F)$.

Z definice není přímo vidět, zda jsou opravdu splněny podmínky pro to, aby $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$ resp. $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$ byla opravdu vnější míra, resp. míra. Splnění těchto podmínek jsem ověřil a dokázal následující větu. Důkaz jsem se snažil provést sám, ověřil jsem dle literatury [8], zda jsem postupoval správně a také jsem následně podle literatury [8] upravil zápis.

Věta 3 *Hausdorffova vnější míra $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$ je opravdu vnější míra.*

Důkaz: Musíme dokázat

1. $\bar{\mathcal{H}}^s(\emptyset) = 0$.
   Prázdnou množinu můžeme pokrýt jedinou množinou s diametrem v rozmezí $0 < \varepsilon \le \delta$. Takže $0 \le \bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(\emptyset) \le \varepsilon^s$ pro každé $\varepsilon > 0$. Z toho plyne, že $\bar{\mathcal{H}}^s_\delta(\emptyset) = 0$. Pak $\bar{\mathcal{H}}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \to 0} \bar{\mathcal{H}}^s_\delta(\emptyset) = 0$.
2. $F \subset G \Rightarrow \bar{\mathcal{H}}^s(F) \le \bar{\mathcal{H}}^s(G)$

Pokud $F \subset G$, pak každé δ-pokrytí G je také pokrytí F. Pokud tedy vezmeme infimum přes všechna δ-pokrytí, dostaneme $\mathcal{H}^s_\delta(F) \le \mathcal{H}^s_\delta(G)$ a pro $\delta \to 0$ dostaneme $\mathcal{H}^s(F) \le \mathcal{H}^s(G)$.

3. Pokud $A_1, A_2, \ldots$ je spočetná (nebo konečná) posloupnost množin, pak

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i).$$

Pokud jsou A_i disjunktní, pak nastává rovnost.

Tento bod dokážeme následovně. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A_i) < \infty.$$

Nechť pro každé $\varepsilon > 0$ je $\{U_{i,j} : j = 1, 2, \ldots\}$ δ-pokrytí A_i takové, že

$$\sum_{j=1}^{\infty} (U_{i,j})^s \le \mathcal{H}^s_\varepsilon(A_i) + 2^{-i}\varepsilon.$$

Pak $\{U_{i,j} : i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots\}$ je δ-pokrytí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_{i,j})^s \le \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) \le \varepsilon + \mathcal{H}^s(A_i).$$

Toto celé platí pro libovolné $\varepsilon > 0$, takže

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i). \; \square$$

Již bylo zmíněno výše, že $\mathcal{H}^0(F)$ se rovná počtu bodů v množině. Toto se mi podařilo celkem snadno dokázat.

Věta 4 *Nechť* $F \subset \mathbb{R}^n$. *Hodnota* $\mathcal{H}^0(F)$ *je rovna počtu bodů v množině.*

Důkaz: Nechť $\{A_i\}$ je δ-pokrytí F. Pro každou množinu A_i je $|A_i|^0 = 1$ a $\sum_i |A_i|^0$ je tím pádem počet množin v pokrytí. Takže $\mathcal{H}^0_\delta(F)$ je nejmenší počet množin tvořících pokrytí množiny F.

Pokud množina F obsahuje *k* bodů, $x_1, x_2, \ldots x_k$, pak můžeme definovat δ-pokrytí množiny F jako *k* koulí se středy v bodech x_i s poloměry $\delta/2$. Pak bude $\mathcal{H}^0_\delta(F) \le k$. Když δ zvolíme tak malé, aby platilo $|x_i - x_j| > \delta$ pro každé $i \ne j$, pak $\mathcal{H}^0_\delta(F) = k$, a tedy $\mathcal{H}^0(F) = k$.

Pokud množina F obsahuje nekonečně bodů, můžeme vždy vzít podmnožinu F_k množiny F tak, že obsahuje k bodů. Pak $\mathcal{H}^0(F) > \mathcal{H}^0(F_k) = k$, a to pro libovolné k, tedy $\mathcal{H}^0(F) = \infty$. $\square$

Pro konečné množiny si uvedeme ještě jednu vlastnost. Pro $s > 0$ je Hausdorffova *s*-rozměrná míra konečné množiny vždy rovna nule. Důkaz tohoto tvrzení není obtížný, pro jistotu jsem ale jeho platnost ověřil v literatuře [8].

Věta 5 *Pokud je* F *konečná množina, pak* $\mathcal{H}^s(F) = 0$ *pro každé* $s > 0$.

Důkaz: Nechť $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, jako ε-pokrytí volme koule s poloměrem $\varepsilon/2$ se středy v bodech x_i. Pak

$$\bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F) \le \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^s$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$. Tím pádem pro $\varepsilon \to 0$ je $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0$. □

Další věta podává informaci o jedné z velmi důležitých vlastností Hausdorffovy míry. Popisuje chování Hausdorffovy míry, když množinu zmenšíme nebo zvětšíme. Mnoho fraktálních množin obsahuje zmenšenou verzi sama sebe, takže při výpočtu dimenze se tato vlastnost velmi hodí.

Věta 6 *Nechť S je podobnostní transformace s měřítkem $\lambda > 0$. Pokud $F \subset \mathbb{R}^n$, pak $\bar{\mathcal{H}}^s(S(F)) = \lambda^s \bar{\mathcal{H}}^s(F)$.*

Důkaz: Pokud $\{U_i\}$ je ε-pokrytí F, pak $\{S(U_i)\}$ je $\lambda\varepsilon$-pokrytí $S(F)$. Pak platí

$$\sum_i \left(\operatorname{diam} S(U_i)\right)^s = \lambda^s \sum_i \left(\operatorname{diam} U_i\right)^s$$

z toho tedy

$$\bar{\mathcal{H}}^s_{\lambda\varepsilon}(S(F)) \le \lambda^s \bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F).$$

Pro $\varepsilon \to 0$ dostáváme $\bar{\mathcal{H}}^s(S(F)) \le \lambda^s \bar{\mathcal{H}}^s(F)$. Pokud místo S vezmeme S^{-1}, λ nahradíme za $1/\lambda$ a F nahradíme za $S(F)$, dostaneme opačnou nerovnost. □

Věta 7 *Nechť $F \subset \mathbb{R}^n$ a $f : F \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení takové, že pro konstanty $c > 0$ a $\alpha > 0$ platí*

$$|f(x) - f(y)| \le c|x-y|^\alpha \quad (\forall x, \forall y \in F). \tag{6}$$

Pak pro každé s je

$$\bar{\mathcal{H}}^{s/\alpha}(f(F)) \le c^{s/\alpha} \bar{\mathcal{H}}^s(F). \tag{7}$$

Důkaz: Nechť $\{U_i\}$ je $\delta-$pokrytí F. Z nerovnosti v předpokladu odvodíme, že

$$\operatorname{diam} f(F \cap U_i) \le c\left(\operatorname{diam} F \cap U_i\right)^\alpha \le c\left(\operatorname{diam} U_i\right)^{s/\alpha}.$$

Z toho tedy plyne, že $\{f(F \cap U_i)\}$ je ε-pokrytí $f(F)$, kde $\varepsilon = c\,\delta^\alpha$. Takže

$$\sum_i \left(\operatorname{diam} F \cap U_i\right)^{s/\alpha} \le c^{s/\alpha} \sum_i \left(\operatorname{diam} U_i\right)^s$$

z toho plyne

$$\bar{\mathcal{H}}^{s/\alpha}_\varepsilon(f(F)) \le c^{s/\alpha} \bar{\mathcal{H}}^s_\delta(F).$$

Pro δ jdoucí k 0 půjde i ε k 0 a dostaneme z toho tedy tvrzení věty. □

Podmínka (7) v předpokladu věty je známá jako Hölderova podmínka s exponentem α. Funkce splňující tuto podmínku pro $\alpha = 1$ se nazývá lipschitzovská.

Pro $\mathcal{H}^0$ jsme dokázali, že se rovná počtu bodů v množině, zmínili jsme, že $\mathcal{H}^1$ odpovídá délce množiny. Tuto vlastnost dokážeme nyní.

Věta 8 *V metrickém prostoru $\mathbb{R}$ splývá* 1*-rozměrná Hausdorffova míra $\mathcal{H}^1$ s Lebesgueovou mírou λ.*

Důkaz: Vezměme množinu $A \subset \mathbb{R}$, která má konečný diametr. Potom $\sup A - \inf A = r$, takže množina A je obsažena v uzavřeném intervalu I délky r a $\bar{\lambda}(A) \leq \bar{\lambda}(I) = r$. Avšak míra $\bar{\mathcal{H}}^1_\varepsilon$ je největší vnější míra $\bar{\mathcal{M}}$ splňující $\bar{\mathcal{M}}(A) \leq \operatorname{diam} A$ pro všechny množiny A s diametrem menším než ε. Z toho plyne, že $\bar{\mathcal{H}}^1_\varepsilon(F) \geq \bar{\lambda}(F)$ pro všechny množiny F, takže $\bar{\mathcal{H}}^1(F) \geq \bar{\lambda}(F)$.

Nyní vezmeme polootevřený interval $\langle a, b)$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Interval rozdělíme pomocí bodů $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, pro které platí $x_j - x_{j-1} < \varepsilon$ pro každé j. Interval $\langle a, b)$ je tedy pokryt spočetným systémem intervalů $\{\langle x_{j-1}, x_j \rangle : 1 \leq j \leq n\}$. Platí

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam} \langle x_{j-1}, x_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = b - a .$$

Z toho dostáváme, že $\bar{\mathcal{H}}^1_\varepsilon(\langle a, b)) \leq b - a$. Ale míra $\bar{\lambda}$ je největší vnější míra splňující $\bar{\lambda}(\langle a, b)) \leq b - a$ pro všechny polootevřené intervaly $\langle a, b)$, a proto $\bar{\lambda}(F) \geq \bar{\mathcal{H}}^1(F)$ pro každou množinu F.

Takto jsme dokázali, že vnější míry splývají. Množiny ovšem splňují Carathéodoryho kritérium, tím pádem splývají i míry λ a $\mathcal{H}^1$. □

3.3. Hausdorffova dimenze

Nyní budeme zkoumat $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$ jako funkci s pro danou množinu F. Ukazuje se, že když s roste, pak $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$ klesá. Dále se budeme zabývat dalšími vlastnostmi.

Věta 9 *Nechť F je borelovská množina a nechť $0 < s < t$ jsou reálná čísla. Pokud je $\bar{\mathcal{H}}^s(F) < \infty$, pak $\bar{\mathcal{H}}^t(F) = 0$. Pokud je $\bar{\mathcal{H}}^t(F) > 0$, pak $\bar{\mathcal{H}}^s(F) = \infty$.*

Důkaz: Pro libovolnou množinu A takovou, že $\operatorname{diam} A \leq \varepsilon$, platí

$$\bar{\mathcal{H}}^t_\varepsilon(A) \leq (\operatorname{diam} A)^t \leq \varepsilon^{t-s} (\operatorname{diam} A)^s .$$

Z toho tedy dostáváme $\bar{\mathcal{H}}^t_\varepsilon(F) \leq \varepsilon^{t-s} \bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F)$ pro libovolnou množinu F. Pokud bude $\bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F) = 0$, pak

$$\bar{\mathcal{H}}^t(F) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{t-s} \bar{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F) = 0 \cdot \bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0 .$$

Stejně se dokáže i druhá část věty. □

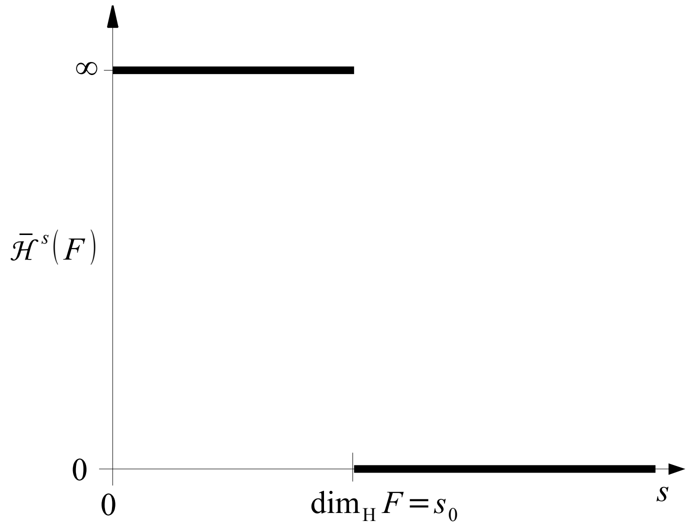
Vlastnost, která je uvedena v předchozí větě, dovoluje definovat Hausdorffovu dimenzi. Říká, že existuje číslo s, pro které platí, že Hausdorffova míra j $\bar{\mathcal{H}}^t$ je rovna nekonečno pro $t < s$ a rovna nule pro $t > s$. Pokud takové číslo najdeme, nazýváme ho Hausdorffovou dimenzí. Přesná definice následuje.

Definice 10 *Hausdorffova dimenze*

Pro libovolnou množinu F definujeme Hausdorffovu dimenzi jako

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \inf\{s \geq 0 : \bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \bar{\mathcal{H}}^s(F) = \infty\} .$$

Hodnota Hausdorffovy míry pro správné s je většinou nenulové konečné číslo. Je ale samozřejmě možné, že hodnota $\bar{\mathcal{H}}^s(F)$ se rovná nule pro všechna $s > 0$. V tomto případě je $\dim_{\mathrm{H}} F = 0$. Stejně tak se může stát, že $\dim_{\mathrm{H}} F = \infty$ pro všechna s, pak je $\dim_{\mathrm{H}} F = \infty$.



Obrázek 11 *Hodnota Hausdorffovy míry v závislosti na s*

Uveďme jednoduchý příklad. Za množinu F vezměme kruh s jednotkovým poloměrem v $\mathbb{R}^3$. Jak již bylo řečeno výše, $\bar{\mathcal{H}}^1(F)$ je rovno délce množiny F, v našem případě tedy nekonečno. $\bar{\mathcal{H}}^2(F)$ Je až na koeficient rovno ploše množiny F, tzn. $\bar{\mathcal{H}}^2(F)=(4/\pi)\cdot \text{plocha}(F)=4$, což je menší než nekonečno. Podobně $\bar{\mathcal{H}}^3(F)$ je až na koeficient rovno objemu množiny F, tzn. $\bar{\mathcal{H}}^3(F)=(6/\pi)\cdot \text{objem}(F)=0$. Hausdorffova dimenze vychází tedy rovna 2. Tato situace je ilustrována na obrázku 11, kde pro $s<2$ je hodnota míry nekonečno a pro $s>2$ je to nula.

Pro Hausdorffovu míru platí, že je monotónní.

Věta 10 *Nechť A, B jsou borelovské množiny. Pak platí, že pokud $A\subseteq B$, pak* $\dim_{\mathrm{H}} A \le \dim_{\mathrm{H}} B$.

Důkaz: Předpokládejme tedy $A\subseteq B$. Věta 3 říká, že pokud $A\subseteq B$, pak $\mathcal{H}^s(A)\le \mathcal{H}^s(B)$. Když tedy bude $s>\dim_{\mathrm{H}} B$, tak $\mathcal{H}^s(A)\le \mathcal{H}^s(B)=0$ (z věty 9) a tím pádem $\dim_{\mathrm{H}} A\le s$. To ovšem platí pro všechna $s>\dim_{\mathrm{H}} B$, takže $\dim_{\mathrm{H}} A\le \dim_{\mathrm{H}} B$. □

Další věta hovoří o tom, jak vypadá dimenze sjednocení. Tuto větu se mi podařilo dokázat, ale samozřejmě jsem postup ověřil podle literatury.

Věta 11 *Nechť $A_1, A_2, \ldots$ jsou borelovské množiny. Pak*

$$\dim_{\mathrm{H}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \sup_k \dim_{\mathrm{H}} A_k \tag{8}$$

Důkaz: Nechť $s>\sup_k \dim_{\mathrm{H}} A_k$, to znamená, že $\forall k\in\mathbb{N}$ bude $s>\dim_{\mathrm{H}} A_k$. Z toho plyne, že $\forall k\in\mathbb{N}$ $\bar{\mathcal{H}}^s(A_k)=0$. Víme, že $\bar{\mathcal{H}}^s$ je vnější míra, takže platí

$$\bar{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\le \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\mathcal{H}}^s(A_k)=\sum_{k\in\mathbb{N}} 0=0.$$

Takže dimenze sjednocení je menší než s, a to pro všechna $s>\sup_k \dim_{\mathrm{H}} A_k$. Platí tedy, že

$$\dim_{\mathrm{H}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \le \sup_k \dim_{\mathrm{H}} A_k.$$

Podle věty 10 je dimenze podmnožiny menší nebo rovna dimenzi nadmnožiny, takže

$$\dim_{\mathrm{H}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \ge \sup_k \dim_{\mathrm{H}} A_k.$$

Z nerovností tedy plyne rovnost a důkaz je proveden. □

Věta 12 *Nechť* $F \subset \mathbb{R}^n$ *a nechť* $f: D \to \mathbb{R}^m$ *splňuje Hölderovu podmínku*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha \quad (\forall x, \forall y \in F).$$

Potom platí, že $\dim_H f(F) \leq (1/\alpha) \cdot \dim_H F$.

Důkaz: Pokud $s > \dim_H F$, pak podle věty 7 je $\bar{\mathcal{H}}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \bar{\mathcal{H}}^s(F) = 0$. Z toho plyne, že $\dim_H f(F) \leq s/\alpha$ pro všechna $s > \dim_H F$. □

Důsledkem této věty je, že pokud je funkce $f: F \to \mathbb{R}^m$ lipschitzovská, pak $\dim_H f(F) \leq dim_H F$.

Další důsledek je, že pokud je funkce $f: F \to \mathbb{R}^m$ **bi-lipschitzovská**, což znamená, že splňuje podmínku

$$c_1|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x-y| \quad (\forall x, \forall y \in F), \tag{9}$$

kde $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, pak $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

Tyto důsledky nás vedou k základní vlastnosti Hausdorffovy dimenze: **Hausdorffova dimenze je invariantní vůči bi-lipschitzovské transformaci**. Když tedy budou mít dvě množiny rozdílnou dimenzi, pak mezi nimi neexistuje bi-lipschitzovská transformace. Ve fraktální geometrii se dvě množiny považují za ‚stejné' právě tehdy, když mezi nimi existuje právě bi-lipschitzovská transformace. Samotná Hausdorffova dimenze nám o topologických vlastnostech množiny mnoho neřekne, ale lze dokázat následující věta pro množiny s dimenzí menší než jedna.

Věta 13 *Množina* $F \subset \mathbb{R}^n$ *s* $\dim_H F < 1$ *je úplně nesouvislá.*

Důkaz: Nechť x a y jsou dva rozdílné body z množiny F. Definujme zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \langle 0, \infty)$ jako $f(z) = |z-x|$. Toto zobrazení nezvětšuje vzdálenost mezi body, protože $|f(z) - f(w)| = \big||z-x| - |w-x|\big| \leq |(z-x) - (w-x)| = |z-w|$. Z důsledku věty 12 nám plyne, že pro lipschitzovské zobrazení (tzn. naše zobrazení f) platí $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$. Množina $f(F)$ je tedy podmnožinou $\mathbb{R}$ s mírou $\mathcal{H}^1$ (neboli délkou) rovnou nule. Z toho plyne, že má hustý doplněk. Nyní zvolme bod r takový, že $r \notin f(F)$ a $0 < r < f(y)$. Z toho plyne

$$F = \{z \in F : |z-x| < r\} \cup \{z \in F : |z-x| > r\}.$$

Množina F je tedy obsažena ve dvou disjunktních množinách s bodem x v jedné a bodem y ve druhé. Body x a y leží tedy každý v jiné komponentě množiny F. □

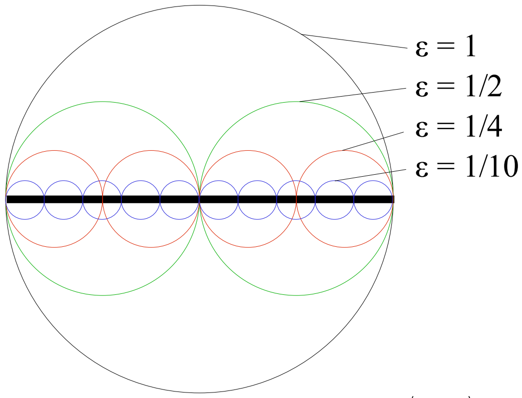
Věta 14 *Hausdorffova dimenze* $\mathbb{R}$ *je* 1.

Důkaz: Věta 8 říká, že Hausdorffova míra $\mathcal{H}^1$ splývá s Lebesgueovou mírou λ, platí tedy $\mathcal{H}^1(\langle 0, 1\rangle) = \lambda(\langle 0, 1\rangle) = 1$. Dimenze intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je tedy rovna 1. Interval $\langle 0, 1\rangle$ je ale částí $\mathbb{R}$, tzn. dimenze $\mathbb{R}$ je větší nebo rovna než jeho dimenze, tedy větší nebo rovna 1.

Když vezmeme libovolné $s > 1$, bude $\mathcal{H}^s(\langle 0, 1\rangle) = 0$. Intervaly $\langle n, n+1\rangle$ jsou izometrické s $\langle 0, 1\rangle$, takže $\mathcal{H}^s(\langle n, n+1\rangle) = 0$. Dostáváme tedy

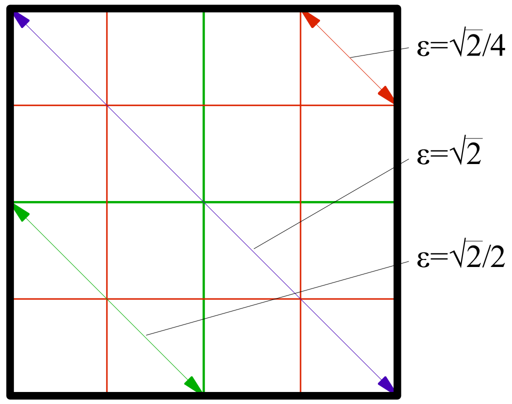
$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^s(\langle n, n+1\rangle) = 0.$$

Tento výraz nám tedy říká, že pro všechna $s > 1$ je $\dim_H \mathbb{R} \leq s$. Dimenze $\mathbb{R}$ je proto menší nebo rovna 1. Po spojení obou nerovností získáme požadovaný výsledek $\dim_H \mathbb{R} = 1$. □



Obrázek 12 *Pokrytí intervalu* $\langle 0,1\rangle$

Takto jsme zjistili, že jednorozměrná Lebesgueova míra je vhodná pro počítání Hausdorffovy dimenze $\mathbb{R}$. Snadno tedy usoudíme, že pro výpočet Hausdorffovy dimenze $\mathbb{R}^2$ bude potřeba použít dvourozměrnou Lebesgueovu míru λ^2.



Obrázek 13 *Pokrytí jednotkového čtverce*

Věta 15 *Hausdorffova dimenze* $\mathbb{R}^2$ *je* 2.

Důkaz: Vezměme jednotkový čtverec $Q=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$. Tento čtverec lze pokrýt n^2 menšími čtverci s délkou strany $1/n$ (viz. obrázek 13), takže pro $\varepsilon\geq\sqrt{2}/n$ dostáváme

$$\bar{\mathcal{H}}^2_\varepsilon(Q)\leq n^2\left(\sqrt{2}/n\right)^2=2.$$

Tím pádem $\bar{\mathcal{H}}^2(Q)\leq 2$ a tedy i $\dim_{\mathrm{H}} Q\leq 2$.

Teď je ještě třeba dokázat opačnou nerovnost. Nechť $\mathcal{A}$ je spočetné pokrytí Q pouze uzavřenými množinami. Uvědomme si, že každá množina A s diametrem r je obsažena ve čtverci Q_A se stranou menší nebo rovnou r. Z toho dostáváme

$$\sum_{A\in\mathcal{A}}(\operatorname{diam} A)^2\geq\sum_{A\in\mathcal{A}}\lambda^2(Q_A)\geq\sum_{A\in\mathcal{A}}\lambda^2\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}}Q_A\right)\geq\lambda^2(Q)=1.$$

Takto jsme dostali $\bar{\mathcal{H}}^2(Q)\geq 2$ a tedy i $\dim_{\mathrm{H}} Q\geq 2$.

Nyní budeme postupovat jako u důkazu předchozí věty. Protože $Q\subset\mathbb{R}^2$, tak $\dim_{\mathrm{H}}\mathbb{R}^2\geq\dim_{\mathrm{H}} Q\geq 2$. Pro $s>2$ je $\mathcal{H}^s(Q)=0$, ale $\mathbb{R}^2$ lze pokrýt spočetným systémem $\{Q_n : n\in\mathbb{N}\}$ čtverců o straně 1, takže

$$\mathcal{H}^s\left(\mathbb{R}^2\right)\leq\sum_n\mathcal{H}(Q_n)=0.$$

Z toho plyne, že $\dim_H \mathbb{R}^2 \leq s$, tedy $\dim_H \mathbb{R}^2 \leq 2$. Z opačných nerovností dostáváme požadovaný výsledek $\dim_H \mathbb{R}^2 = 2$. □

3.4. Mřížková (box-counting) dimenze

V předchozím textu jsme se seznámili s Hausdorffovou dimenzí. Tato dimenze byla velmi obecná, použitelná pro všechny množiny, a proto také obtížná na výpočet. V praxi se ovšem používají i další (alternativní) typy dimenzí. Podrobné informace o alternativních dimenzích lze nalézt v [8].

Tyto dimenze bývají zpravidla založeny na „měření s měřítkem δ", kdy zanedbáváme nepravidelnosti menší než δ. Sledujeme, jak se tato měření chovají, když $\delta \to 0$. Jako příklad můžeme uvést měření délky křivky F tak, že spočítáme, kolik kroků délky δ musíme provést, abychom ji celou prošli. Toto provedeme pro dva různé kroky δ a vypočteme mocninou závislost. Označme $M_\delta(F)$ počet kroků při délce kroku δ. Předpokládejme tedy, že zde existuje mocninná závislost. Pak

$$M_\delta(F) \approx c\,\delta^{-s}$$

pro konstanty c a s. Pokud toto nastane, pak říkáme, že množina F má dělící dimenzi (anglicky divider dimension) s. Tento výraz zlogaritmujeme

$$\log M_\delta(F) \approx \log c - s \log \delta$$

a velikost kroku δ budeme stále zmenšovat

$$s = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}. \tag{10}$$

Hodnota s vlastně znamená směrnici přímky v log-log grafu.

Pokud budeme definovat další verze dimenzí, pak se samozřejmě jejich výsledky na stejných množinách nemusí shodovat (dokonce ani pro „hezké" množiny). Jejich vlastnosti budou také odlišné a je třeba je odvozovat přímo z jejich definice. Některé tyto vlastnosti si odvodíme a výsledky budeme porovnávat právě s dimenzí Hausdorffovou.

Z podobného principu vychází i dimenze, kterou se budeme nyní zabývat. Je to **mřížková dimenze**. Tato dimenze je v praxi jednou z nejvíce používaných. Algoritmus se relativně jednoduše implementuje na počítači a pro velkou třídu množin dává stejné výsledky jako Hausdorffova dimenze. Mřížková dimenze je definovaná takto:

Definice 11 *Mřížková dimenze*

Nechť F je neprázdná omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a nechť $N_\delta(F)$ je nejmenší počet množin s diametrem δ, které pokrývají množinu F. Definujeme dolní a horní mřížkovou dimenzi množiny F jako

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta_k} \tag{11}$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta_k}. \tag{12}$$

Pokud se tyto výrazy rovnají, pak společnou hodnotu nazýváme mřížkovou dimenzí množiny F, tedy

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta_k} \tag{13}$$

Předpokládáme, že číslo δ je dostatečně malé, aby hodnota $-\log\delta$ byla ostře větší než 0. Stejně tak nechceme dopustit situace jako „$\log 0$“ a „$\log\infty$“, proto na množinu klademe předpoklad neprázdnosti a omezenosti.

Mřížkovou dimenzi lze počítat různými způsoby. Jako množiny pro pokrytí můžeme zvolit např. krychle z mřížky se stranou δ.

Věta 16 *Nechť $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina a množiny pro pokrytí F jsou definovány jako mřížka takto:*

$$\langle m_1\delta, (m_1+1)\delta\rangle \times \cdots \times \langle m_n\delta, (m_n+1)\delta\rangle m,$$

kde $m_1, \ldots, m_n$ jsou celá čísla, δ je krok mřížky. $N^*_\delta(F)$ je počet krychlí, které protínají množinu F. Pak mřížkové dimenze počítané pomocí $N^*_\delta(F)$ a $N_\delta(F)$ z definice 11 jsou si rovny.

Důkaz: Je zřejmé, že tyto krychle množinu F pokrývají, a tedy tvoří $\delta\sqrt{n}$-pokrytí. Platí, že

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \le N^*_\delta(F).$$

Pokud $\delta\sqrt{n} < 1$ (abychom mohli nerovnost přenásobit $1/(-\log\delta\sqrt{n})$), pak

$$\frac{N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log\delta\sqrt{n}} \le \frac{N^*_\delta(F)}{-\log\sqrt{n} - \log\delta}.$$

A pokud $\delta \to 0$, pak

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta\to 0} \frac{N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log\delta\sqrt{n}} \le \liminf_{\delta\to 0} \frac{N^*_\delta(F)}{-\log\delta},$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta\to 0} \frac{N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log\delta\sqrt{n}} \le \limsup_{\delta\to 0} \frac{N^*_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Na druhou stranu, každá množina s diametrem δ bude obsažena v maximálně 3^n krychlích z mřížky o hraně δ. To znamená, že

$$N^*_\delta(F) \le 3^n N_\delta(F),$$

a pokud toto zlogaritmujeme a δ pošleme k nule, dostaneme tak opačné nerovnosti, tzn.

$$\underline{\dim}_B F \ge \liminf_{\delta\to 0} \frac{N^*_\delta(F)}{-\log\delta},$$

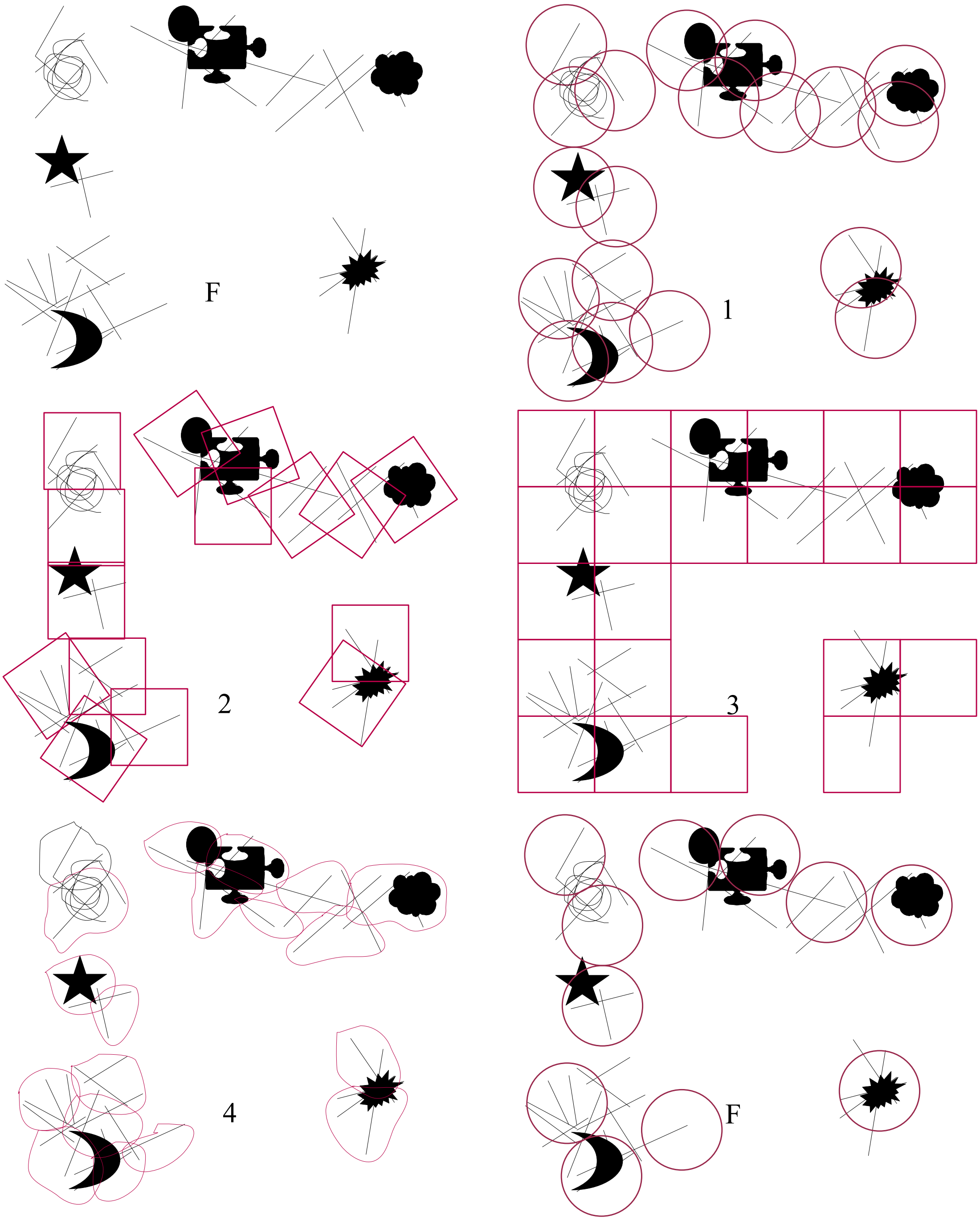
$$\underline{\dim}_B F \ge \limsup_{\delta\to 0} \frac{N^*_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Z opačných nerovností plyne rovnost. □

Tato verze výpočtu mřížkové dimenze se využívá nejčastěji empiricky, a odtud také plyne její jméno. Množinu umístíme do mřížky čtverců nebo krychlí a jednoduše spočítáme, do kolika krychlí množina zasahuje. Mřížková dimenze vlastně říká, jak rychle rostou nepravidelnosti se zmenšujícím se δ.

Uvedli jsme si dva různé způsoby výpočtu mřížkové dimenze (buď z definice nebo pomocí věty

16), ale samozřejmě, že to nejsou všechny možné. O dalších možnostech nám říká následující věta, jejíž důkaz lze nalézt například v [8].



Obrázek 14 *Pět způsobů, jak najít mřížkovou dimenzi množiny. Obrázky odpovídají bodům ve větě 17. Hodnota* $N_\delta(F)$ *je tedy v prvním případě (1) nejmenší počet koulí s poloměrem* δ*, v druhém případě (2) nejméně krychlí se stranou* δ*, ve třetím (3) je to počet krychlí z mřížky o straně* δ*, které protínají* F*, ve čtvrtém (4) nejméně množin s diametrem* δ *a v pátém (5) je to největší počet disjunktních koulí s poloměrem* δ *se středy v množině* F.

Věta 17 *Horní a dolní mřížková dimenze množiny* $F \subset \mathbb{R}^n$ *jsou dány jako*

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta^{**}(F)}{-\log \delta_k},$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta^{**}(F)}{-\log \delta_k}$$

a samotná mřížková dimenze je dána jako

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta^{**}(F)}{-\log \delta_k}$$

(pokud limita existuje), kde $N_\delta^{**}(F)$ *je jedno z následujících :*

1. *nejmenší počet uzavřených koulí s poloměrem* δ*, které pokrývají* F*;*
2. *nejmenší počet krychlí se stranou* δ*, které pokrývají* F*;*
3. *počet krychlí z mřížky se stranou* δ*, které protínají* F*;*
4. *nejmenší počet množin s diametrem maximálně* δ*, které pokrývají* F*;*
5. *největší počet disjunktních koulí s poloměrem* δ*, které mají střed v* F*.*

V praxi lze samozřejmě použít více ekvivalentních definic, které lépe odpovídají našim potřebám.

Nyní se pokusíme zjistit vztah mezi mřížkovou dimenzí a Hausdorffovou dimenzí. Při výpočtu mřížkové dimenze jsme našli pokrytí množiny F, ovšem nemuselo to být právě to nejvhodnější pro Hausdorffovu dimenzi.

Věta 18 *Nechť* $F \subset \mathbb{R}^n$ *je neprázdná množina. Pak*

$$\dim_{\mathrm{H}} F \le \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \le \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F. \tag{14}$$

Důkaz: Množinu F jsme pokryli $N_\delta(F)$ množinami s diametrem δ, proto dostáváme

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \le N_\delta(F)\delta^s.$$

Pokud bude

$$1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F),$$

pak zlogaritmováním pravé strany dostaneme (pro dostatečně malé δ) $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$. Odtud plyne, že

$$s \le \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

a tedy

$$\dim_{\mathrm{H}} F \le \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \le \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F. \square$$

Z této nerovnosti bohužel plyne, že Hausdorffova a mřížková dimenze se nerovnají. Avšak v praxi rovnost nastává velmi často.

Vzorec z definice mřížkové dimenze nám říká, že pro malá δ se $N_\delta(F)$ chová jako δ^{-s}, kde $s = \dim_{\mathrm{B}} F$. Přesněji to můžeme zapsat jako

$$N_\delta(F)\delta^s \to \infty \quad \text{pro} \quad s < \dim_B F$$

a

$$N_\delta(F)\delta^s \to 0 \quad \text{pro} \quad s > \dim_B F.$$

Můžeme psát, že

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf\left\{\sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ je konečné } \delta\text{-poktytí } F\right\}.$$

Tento zápis se velmi podobá definici Hausdorffovy míry

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_i \operatorname{diam} U_i : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrytí } F\right\}.$$

Hlavní rozdíl mezi těmito zápisy je, že Hausdorffova míra přiřazuje každé množině z pokrytí jinou váhu (danou jejím diametrem), kdežto při výpočtu mřížkové dimenze předpokládáme u všech množin stejný průměr δ.

Můžeme definovat výraz

$$v(F) = \liminf_{\delta \to 0} N_\delta(F)\delta^s,$$

ale na rozdíl od $\mathcal{H}^s(F)$ $v(F)$ není míra na $\mathbb{R}^n$. Toto dokazuje, že mřížkové dimenze nemají některé příjemné vlastnosti a proto se s nimi pracuje hůře matematicky. Ale na druhou stranu, díky tomu, že množiny pokrytí mají stejný průměr, tak se mřížková dimenze mnohem lehčeji počítá.

Pro Hausdorffovu dimenzi jsme odvodili celou řadu zajímavých vlastností. Některé platí i pro mřížkovou dimenzi. Následující věty hovoří právě o vlastnostech mřížkové dimenze.

Věta 19 *Pro mřížkovou dimenzi platí:*

1. *hladká plocha F dimenze m v $\mathbb{R}^n$ má mřížkovou dimenzi rovnu m;*
2. $\underline{\dim}_B$ *a* $\overline{\dim}_B$ *jsou monotónní;*
3. $\overline{\dim}_B(E \cup F) = max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$*; neplatí pro* $\underline{\dim}_B$*;*
4. $\underline{\dim}_B$ *a* $\overline{\dim}_B$ *jsou invariantní vůči bi-lipschitzovské transformaci.*

Důkaz této věty je například v [8].

Věta 20 *Nechť $F \subset \mathbb{R}^n$ a $\bar{F}$ je její uzávěr (tzn. nejmenší uzavřená množina, která obsahuje F). Pak*

$$\underline{\dim}_B \bar{F} = \underline{\dim}_B F$$

a

$$\overline{\dim}_B \bar{F} = \overline{\dim}_B F.$$

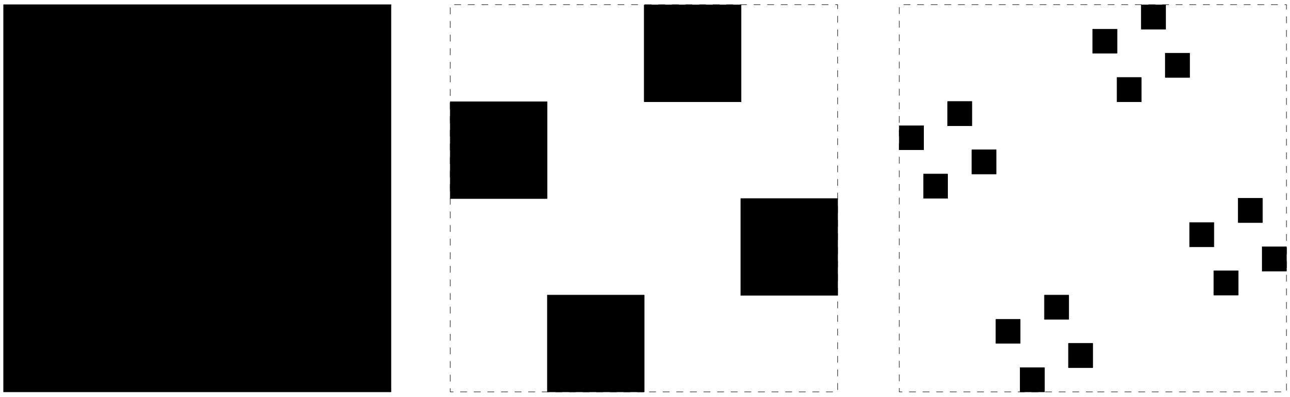
Důkaz: Nechť $B_1, B_2, \ldots, B_k$ je konečná posloupnost uzavřených koulí s poloměry δ. Pokud množina $\cup_{i=1}^k B_i$ obsahuje množinu F, pak obsahuje i množinu $\bar{F}$. Z toho plyne, že nejmenší počet koulí s poloměrem δ, které pokryjí F, se rovná nejmenšímu počtu koulí potřebných pro pokrytí větší množiny $\bar{F}$. Z této úvahy již plynou uvedené nerovnosti. □

Teoreticky jsme téměř připraveni na to, abychom byli schopni spočítat dimenze různých množin. Dále si uvedeme některé principy počítání dimenze pro fraktální množiny.

3.5. Výpočet Hausdorffovy míry a dimenze

Určování Hausdorffovy dimenze není v praxi vůbec jednoduché. Obvykle se postupuje tak, že nalezneme horní hranici množiny, a pak se snažíme dokázat, že to je zároveň i dolní hranice. Nalezení horní hranice bývá často jednodušší.

Výpočet Hausdorffovy dimenze přímo z definice není pohodlný, ale na následujících dvou příkladech si ukažme, jak by se postupovalo.



Obrázek 15 *Konstrukce Cantorova diskontinua,* $\dim_{\mathrm{H}} F = 1$

Příklad 1 *Nechť* F *je Cantorovo diskontinuum zkonstruované z jednotkového čtverce tak, že v každém kroku čtverec rozdělíme na* 16 *menších čtverců s délkou hrany* $1/4$ *původní hrany a ponecháme pouze* 4 *čtverce podle obrázku 15. Potom platí* $1 < \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$, *takže* $\dim_{\mathrm{H}} F = 1$.

Výpočet: Označme E_k k-tou iteraci. Tato množina se vždy skládá ze 4^k čtverců s délkou strany 4^{-k}. Diametr těchto čtverců je $4^{-k}\sqrt{2}$. Tyto čtverce vezmeme jako δ-pokrytí množiny F, kde $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$. Tímto způsobem získáme odhad $\mathcal{H}^1_\delta(F) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2}$. Když $k \to \infty$, pak $\delta \to 0$ a dostaneme tedy $\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$.

Nyní se pokusíme získat dolní odhad. Nechť proj je ortogonální projekce na osu x. Ortogonální projekce nezvyšuje vzdálenost, tj. $|\mathrm{proj}\, x - \mathrm{proj}\, y| \leq |x - y|$, a pokud $x, y \in \mathbb{R}^2$, pak proj je lipschitzovská. Tato projekce je vlastně stín množiny F na ose x a z konstrukce množiny F zjistíme, že je to jednotkový interval $\langle 0, 1\rangle$. S využitím toho, že zobrazení je lipschitzovské (viz věta 7), můžeme psát

$$1 = \text{délka}\langle 0, 1\rangle = \mathcal{H}^1(\langle 0, 1\rangle) = \mathcal{H}^1(\mathrm{proj}\, F) \leq \mathcal{H}^1(F).$$

Tímto je příklad vypočten. □

V tomto výpočtu jsme použili princip s ortogonální projekcí, abychom dostali dolní odhad Hausdorffovy míry. Tento princip lze použít pouze ve zvláštních případech, často je výpočet mnohem těžší. Je vidět, že to není nijak pohodlné a pro složitější množiny se pak už jen jedná o vymýšlení neprůhledných matematických konstrukcí a popsání spousty papírů. Dalším příkladem je Cantorova množina.

Příklad 2 *Nechť* F *je Cantorova množina. Pak* $\dim_{\mathrm{H}} F = s = \log 2/\log 3$ *a* $1/2 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Výpočet: Označme k-tý krok při generování množiny E_k. Množinu E_k tedy tvoří intervaly délky 3^{-k}. Pokrytí $\{U_i\}$ množiny F se skládá z 2^k intervalů délky 3^{-k}. Tím dostáváme, že

$$\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(F) \leq \sum (\mathrm{diam}\, U_i)^s = 2^k 3^{-ks} = 1,$$

pokud je tedy $s=\log 2/\log 3$. Pro $k\to\infty$ vychází tedy Hausdorffova míra menší nebo rovna 1.

Abychom dokázali, že $\mathcal{H}^s(F)\geq 1/2$, ukážeme, že

$$\sum (\operatorname{diam} U_i)^s \geq \frac{1}{2}=3^{-s}$$

pro libovolné pokrytí $\{U_i\}$ množiny F. Stačí předpokládat, že $\{U_i\}$ jsou intervaly, které trochu rozšíříme. Využijeme kompaktnosti množiny F už jen ověříme, že vzorec platí pro $\{U_i\}$ složené z konečného počtu uzavřených subintervalů intervalu $\langle 0,1\rangle$. Nechť k je takové celé číslo, že pro každou množinu U_i z pokrytí $\{U_i\}$ platí

$$3^{-k-1}\leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Když toto platí, pak U_i protne maximálně jeden interval z množiny E_k, protože intervaly jsou vzdáleny alespoň 3^{-k}. Pokud $j\geq k$, pak U_i protne maximálně $2^{j-k}=2^j 3^{-jk}\leq 2^j 3^s (\operatorname{diam} U_i)^s$ intervalů z E_j. Když j zvolíme dost velké tak, aby $3^{-(j+1)}\leq |U_i|$ pro všechna U_i, pak z toho, že $\{U_i\}$ protne všech 2^j intervalů délky 3^{-j}, plyne

$$2^j \leq \sum_i 2^j 3^s (\operatorname{diam} U_i)^s,$$

které se zkrátí na

$$\sum (\operatorname{diam} U_i)^s \geq \frac{1}{2}=3^{-s}. \square$$

Jak je vidět, tyto postupy jsou opravdu komplikované. Existuje naštěstí více cest. Při zjišťování dimenze můžeme také vycházet z toho, jak se množina tvoří, a podle toho zvolit vhodný postup. Často se využívá vlastnost Hausdorffovy míry o změně měřítka (věta 6). Fraktální množiny často obsahují zmenšenou verzi sebe sama, takže tato věta je pro výpočet takových vět velice vhodná. Z vlastností množiny odvodíme rovnici, která obsahuje jako neznámé Hausdorffovu míru celé množiny a míry zmenšených částí množiny. Pomocí zmíněné věty 6 přepíšeme vzorec tak, aby obsahoval jen míru celé množiny. Tím se nám ale ve vzorci objeví neznámá s. Požadujeme, aby hodnota $\mathcal{H}^s(F)$ byla větší než nula a zároveň menší než nekonečno. Za tohoto předpokladu můžeme rovnici číslem $\mathcal{H}^s(F)$ vydělit. Tím zbude v rovnici už jen s, které úpravami rovnice snadno vypočteme. Toto číslo pak odpovídá Hausdorffově dimenzi. Celý výpočet, kterému se říká heuristický, si ukážeme na příkladech. Takto vypočteme nejprve dimenzi Cantorovy množiny, kterou jsme sice již předtím zjistili. Uvidíme, že takto je to mnohem jednodušší.

Příklad 3 *Nechť F je Cantorova množina. Zjistěte její dimenzi pomocí heuristického výpočtu.*

Heuristický výpočet: Cantorova množina se rozdělí na levou $F_L=F\cap\langle 0,1/3\rangle$ a pravou $F_R=F\cap\langle 2/3,1\rangle$ část. Obě tyto části jsou geometricky podobné množině F, pouze zmenšené na jednu třetinu. F_L a F_R jsou disjunktní a platí $F=F_L\cup F_R$. Pro každé s platí

$$\mathcal{H}^s(F)=\mathcal{H}^s(F_L)+\mathcal{H}^s(F_R)=\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F)+\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F).$$

Toto plyne z vlastnosti Hausdorffovy míry o změně měřítka (věta 6). Budeme předpokládat, že pro správnou hodnotu $s=\dim_{\mathrm{H}} F$ platí $0<\mathcal{H}^s(F)<\infty$. Abychom dostali konečnou hodnotu, tak musí platit $1=2(1/3)^s$ neboli $s=\log 2/\log 3$. $\square$

Tento postup lze aplikovat na celou řadu množin, které obsahují různě zmenšené kopie sebe sama. Někdy je jen problém najít správný vztah pro Hausdorffovu míru. Další příklad na první pohled nezapadá do této kategorie, ale po rozmyšlení je to přesně to samé.

Příklad 4 *Výpočet Hausdorffovy dimenze množiny, která obsahuje taková čísla z intervalu* $\langle 0,1 \rangle$, *jež nemají ve svém desetinném zápisu číslici* 5.

Řešení: Označme tuto množinu F. Množinu F lze rozdělit na devět podmnožin $F_i = F \cap \langle i/10, (i+1)/10 \rangle$ pro $i=1,2,3,4,6,7,8,9$. Každá z těchto podmnožin je podobná původní množině F, ale je desetkrát zmenšená. Množiny F_i jsou navzájem disjunktní až na krajní body intervalů, které mají s-dimenzionální Hausdorffovu míru pro $s>0$ rovnu nule.

Z věty o změně měřítka (věta 6) plyne, že pro $s>0$ je $\mathcal{H}^s(F_i) = 10^{-s}\mathcal{H}^s(F)$. Protože F_i jsou disjunktní (až na množinu míry 0), můžeme psát

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=0, i\neq 5}^{9} \mathcal{H}^s(F_i) = 9 \cdot 10^{-s} \mathcal{H}^s(F).$$

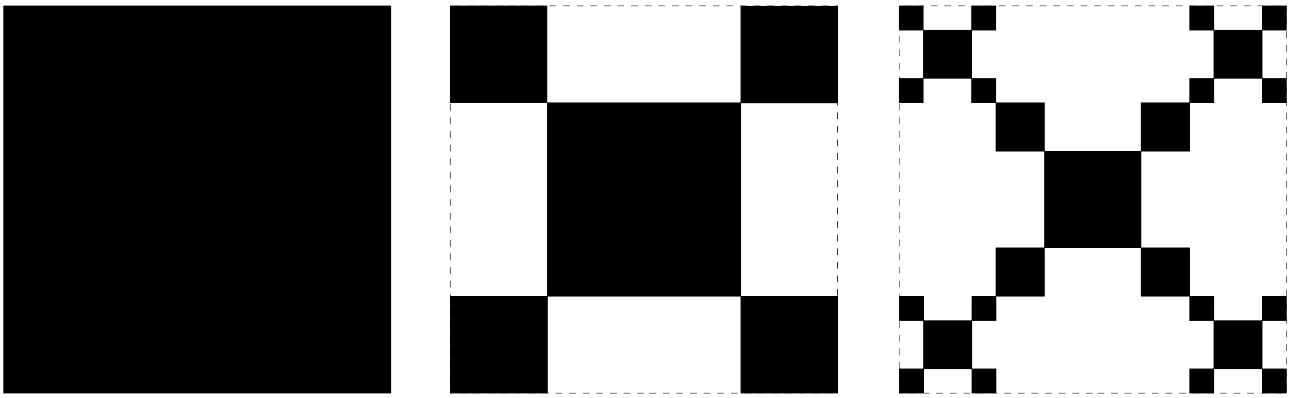
Budeme předpokládat, že pro $s = \dim_{\mathrm{H}} F$ bude $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$. Díky tomu můžeme vypočítat hodnotu s:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(F) &= 9 \cdot 10^{-s} \mathcal{H}^s(F) \\ 1 &= 9 \cdot 10^{-s} \\ s &= \frac{\log 9}{\log 10} \end{aligned}$$

Dimenze množiny F je tedy $s = \log 9 / \log 10$. □

Zatím zde byly zmíněny pouze množiny, kde bylo použito jen jednoho měřítka pro zmenšení. To samozřejmě není případ všech množin, ale na postupu výpočtu to nic nemění.

Příklad 5 *Výpočet Hausdorffovy dimenze množiny, která se konstruuje podle postupu znázorněném na obrázku 16. Strana počátečního čtverce má délku* 1.



Obrázek 16 *Konstrukce množiny*

Řešení: Označme množinu jako F. Z konstrukce množiny vidíme, že se skládá vždy pouze ze zmenšených kopií sebe sama, tj. $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$, k4de F_0 je množina zmenšená na $1/2$ a F_1, F_2, F_3, F_4 jsou zmenšeny na $1/4$.

Z vlastnosti Hausdorffovy míry pro změnu měřítka (věta 6) plyne

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_0) + \sum_{i=1}^{4} \mathcal{H}^s(F_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + 4\left(\frac{1}{4}\right)^s \mathcal{H}^s(F).$$

Toto si můžeme dovolit pouze proto, že množiny F_i jsou disjunktní až na rohové body. Pro $s>0$ mají tyto body Hausdorffovu míru rovnu 0. Budeme předpokládat, že pro $s=\dim_H F$ bude $0<\mathcal{H}^s(F)<\infty$. Z předchozí rovnice vyjádříme s a získáme tak hodnotu dimenze. Postup je následující. Rovnici vydělíme $\mathcal{H}^s(F)$, získáme tak

$$1=\left(\frac{1}{2}\right)^s+4\left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

Následně zavedeme substituci $a=(1/2)^s$. Rovnice se změní na jednoduchou kvadratickou rovnici, ze které snadno vypočteme hledanou hodnotu.

$$\begin{aligned}
1 &= a+4a^2\\
a_{1,2} &= \frac{\sqrt{17}\pm 1}{8}\\
\left(\frac{1}{2}\right)^s &= \frac{\sqrt{17}\pm 1}{8}\\
s &= \frac{\log 8-\log\left(\sqrt{17}-1\right)}{\log 2}
\end{aligned}$$

Hledaná dimenze je tedy $s=\dfrac{\log 8-\log\left(\sqrt{17}-1\right)}{\log 2}$. $\square$

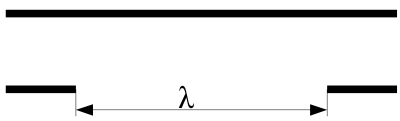
Další zajímavou množinou, kde lze použít lehce heuristický výpočet je modifikovaná Cantorova množina.

Příklad 6 *Množina* F *je upravená Cantorova množina tak, že z prostředka vyjmeme interval dlouhý* λ *(obrázek 17). Dokažte, že Hausdorffova dimenze této množiny je rovna*

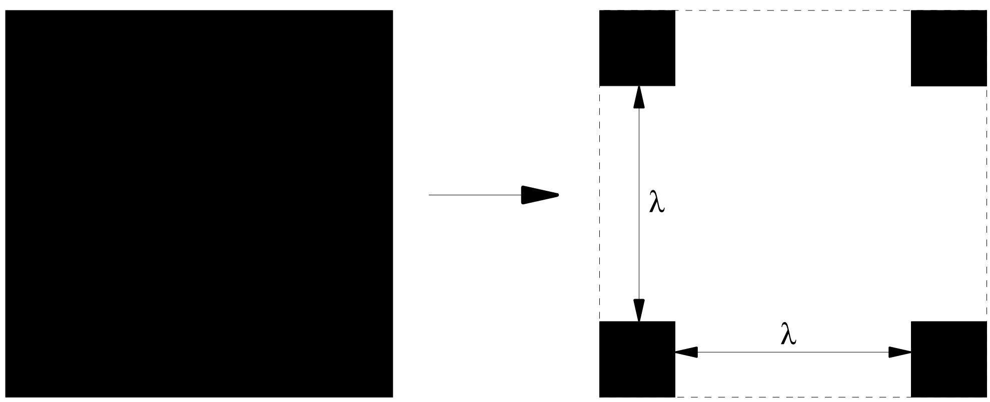
$$\frac{\log 2}{\log\left(2/(1-\lambda)\right)}.$$

Dále dokažte, že Hausdorffova dimenze množiny $E=F\times F$ *(obrázek 18) je*

$$\frac{2\log 2}{\log\left(2/(1-\lambda)\right)}.$$



Obrázek 17 *Upravená Cantorova množina F*



Obrázek 18 *Postup pro vytvoření množiny* $F\times F$*, kde F je upravená Cantorova množina*

Řešení: Množina F se skládá ze 2 disjunktních částí zmenšených koeficientem $(1-\lambda)/2$. Z věty o změně měřítka pro Hausdorffovu míru (věta 6) plyne

$$\mathcal{H}^s(F)=\mathcal{H}^s(F_L)+\mathcal{H}^s(F_R)=2\left(\frac{1}{2}(1-\lambda)\right)^s\mathcal{H}^s(F),$$

kde F_L a F_R jsou levá a pravá část množiny F. Pro všechna $s>0$ požadujeme, aby Hausdorffova míra byla $0<\mathcal{H}^s(F)<\infty$. Položíme tedy $\mathcal{H}^s(F)=1$ a vypočteme s.

$$\begin{aligned}1 &= 2\left(\frac{1}{2}(1-\lambda)\right)^s\\ 0 &= \log 2+s\log\frac{1}{2}(1-\lambda)\\ s &= \frac{\log 2}{\log\left(2/(1-\lambda)\right)}\end{aligned}$$

Výpočet dimenze množiny E. Tato množina se skládá ze čtyř částí, které jsou jen zmenšené verze sebe sama opět koeficientem $(1-\lambda)/2$. Postupovat budeme stejným způsobem, takže v rovnici

$$\mathcal{H}^s(E)=\sum_{i=1}^{4}\mathcal{H}^s(E_i)=4\left(\frac{1}{2}(1-\lambda)\right)^s\mathcal{H}^s(E)$$

položíme $\mathcal{H}^s(E)=1$, aby $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$.

$$\begin{aligned}1 &= 4\left(\frac{1}{2}(1-\lambda)\right)^s\\ s &= \frac{2\log 2}{\log\left(2/(1-\lambda)\right)}\end{aligned}$$

Dimenze této množiny tedy vychází rovna $\dfrac{2\log 2}{\log\left(2/(1-\lambda)\right)}$. □

Další možností, jak zjišťovat dimenzi složitých množin, je nalézt takový horní a dolní odhad, aby se rovnaly. Horní odhad bývá mnohem jednodušší, proto s ním začneme. Pro většinu fraktálů stačí použít „zřejmý“ horní odhad pomocí přirozeného pokrytí malými množinami. Jak na to nám prozradí následující věta.

Věta 21 *Předpokládejme, že množinu F lze pokrýt n_k množinami s diametrem maximálně δ_k. Pro δ_k musí platit, že $\delta_k\to 0$ pro $k\to\infty$. Pak platí*

$$\dim_{\mathrm{H}}F\le\underline{\dim}_{\mathrm{B}}F\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\log n_k}{-\log\delta_k}.$$

Pokud je $\delta_{k+1}\ge c\,\delta_k$ pro nějaké $0<c<1$, pak

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}F\le\overline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\log n_k}{-\log\delta_k}.$$

Navíc, pokud $n_k\delta_k^s$ je pro $k\to\infty$ omezené, pak $\mathcal{H}^s(F)<\infty$.

Důkaz: Nerovnosti pro mřížkovou dimenzi plynou přímo z definic. Poslední část se dokáže takto: Platí, že $\mathcal{H}^s_{\delta_k}(F)\le n_k\delta_k^s$, takže $\mathcal{H}^s_{\delta_k}(F)$ pro $k\to\infty$ konverguje ke konečnému číslu $\mathcal{H}^s(F)$. □

Jak jsme si již mohli všimnout v příkladu 2 u Cantorovy množiny, tak přirozené pokrytí 2^k intervaly délky 3^{-k} daly $\dim_H F \leq \log 2/\log 3$. Tyto „na první pohled viditelné“ horní odhady často dávají správnou hodnotu Hausdorffovy dimenze. K získání horního odhadu stačí vzít nějaké vhodné pokrytí $\{U_i\}$ a spočítat sumu $\sum(\operatorname{diam} U_i)^s$. Pro odhad spodní hranice je třeba ukázat, že suma $\sum(\operatorname{diam} U_i)^s$ je větší než nějaká konstanta pro úplně všechna pokrytí množiny F. Je jasné, že těchto pokrytí je obrovské množství.

Jeden ze způsobů, jak obejít obtíže spojené s hledáním dolní meze, je ukázat, že žádná samostatná množina U nemůže pokrýt příliš mnoho z F v poměru k její velikosti (velikost je určena pomocí $(\operatorname{diam} U)^s$). Pokud tedy $\{U_i\}$ pokrývá celou množinu F, pak $\sum(\operatorname{diam} U_i)^s$ nemůže být moc malá. Obvykle se toho dosáhne pomocí vhodného rozložení hmoty μ (viz. definice 4) na F, kdy se pak porovná hmota $\mu(U)$ s $(\operatorname{diam} U_i)^s$ pro každé U.

Věta 22 *Nechť μ je rozdělení hmoty na F a nechť pro nějaké s existují čísla $c>0$ a $\delta>0$ taková, že*

$$\mu(U) \leq c(\operatorname{diam} U)^s$$

pro všechny množiny U s $\operatorname{diam} U \leq \delta$. *Pak*

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c \tag{15}$$

a

$$s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \tag{16}$$

Důkaz: Pokud je $\{U_i\}$ libovolné pokrytí F, pak

$$0<\mu(F)=\mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i (U_i)^s.$$

Vezmeme-li infimum a pokud je δ dostatečně malé, pak $\mathcal{H}^s_\delta(U) \geq \mu(F)/c$. Z toho dostáváme, že $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$. □

Princip rozložení hmoty dává docela rychle a jednoduše dolní odhad Hausdorffovy dimenze. Uveďme si použití na několika příkladech. Nejprve začneme jednodušším příkladem, a to Cantorovou množinou (obrázek 1).

Příklad 7 *Nechť F je Cantorova množina (obrázek 1). Určete dolní odhad Hausdorffovy dimenze pomocí principu rozložení hmoty.*

Výpočet: Nechť máme rozložení hmoty μ takové, že každý interval délky 3^{-k} v k-tém kroku má hmotu (míru) 2^{-k}. Množinu U zvolíme pro k-*tý* krok tak, aby platilo $3^{-k-1} \leq \operatorname{diam} U < 3^{-k}$. Takto ji volíme proto, aby protľala maximálně jeden interval z k-tého kroku tvorby Cantorovy množiny. Ověříme, že pro takto zvolenou množinu U platí předpoklady. Platí:

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = \left(3^{\log 2/\log 3}\right)^{-k} = \left(3^{-k}\right)^{\log 2/\log 3} \leq (3 \operatorname{diam} U)^{\log 2/\log 3}.$$

Nerovnost $\mu(U) \leq c(\operatorname{diam} U)^s$ tedy platí a nalezli jsme zároveň vhodnou konstantu $c=3^{\log 2/\log 3}$.

Nyní použijeme větu 22. Předpoklady jsou splněny, takže platí (15), kam dosadíme získané hodnoty. Výsledkem tedy bude

$$\mathcal{H}^{\log 2/\log 3}(F) \geq 3^{-\log 2/\log 3} = \frac{1}{2}.$$

Hausdorffova míra je větší než nula, takže $\dim_{\mathrm{H}} F \geq \log 2/\log 3$. □

Téměř stejný postup lze aplikovat pro získání dolního odhadu Hausdorffovy dimenze Cantorova prachu (obrázek 15). Další příklad tedy ukáže, jak tento postup přizpůsobit pro tuto množinu a zároveň využijeme větu 21, pomocí které získáme lehce horní odhad.

Příklad 8 *Vypočtěte Hausdorffovu dimenzi Cantorova diskontinua (obrázek 15) pomocí principu rozdělení hmoty.*

Výpočet: Horní odhad tedy provedeme podle věty 21. V k-tém kroku množina obsahuje vždy 4^k čtverců s diametrem $4^{-k}\sqrt{2}$. Dosadíme do věty:

$$\dim_{\mathrm{H}} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\log 4^k}{-\log\left(4^{-k}\sqrt{2}\right)} = 1.$$

Pomocí věty 21 je tedy získávání horních odhadů velmi snadné.

Dolní odhad provedeme tedy pomocí principu rozdělení hmoty. Nechť μ je přirozené rozdělení hmoty, tzn. každý čtverec v kroku k má míru (hmotu) 4^{-k}. Množinu U zvolíme tak, aby splňovala podmínky věty. Nechť pro ni tedy platí $4^{-k-1} \leq \operatorname{diam} U < k^{-k}$. Takto zvolená množina bude mít tu vlastnost, že protne maximálně 1 čtverec z kroku k. Platí tedy:

$$\mu(U) \leq 4^{-k} \leq 4 \operatorname{diam} U.$$

Z principu rozdělení hmoty plyne, že dimenze je větší nebo rovna 1. Spojením obou nerovností získáme tedy výsledek $\dim_{\mathrm{H}} F = 1$. □

3.6. Výpočet mřížkové (box-counting) dimenze

Výpočet mřížkové dimenze je mnohem jednodušší než výpočet Hausdorffovy dimenze. Největším rozdílem je, že u mřížkové dimenze vybíráme pouze pokrytí množinami, které mají stejné diametry. Ve větě 17 je navíc dokázáno, že stačí dokonce vzít pouze jeden druh množin pro pokrytí, např. čtverce, kruhy atd. Na příkladech jsem se snažil ukázat výpočet alespoň několika množin.

Příklad 9 *Nechť F je Cantorovo diskontinuum, zkonstruované podle postupu v příkladu 1 (obrázek 15). Vypočtěte mřížkovou dimenzi této množiny.*

Výpočet: Nejmenší počet čtverců o straně délky δ, které pokrývají množinu F, označme jako $N_\delta(F)$. Použít k pokrytí jen čtverce si můžeme dovolit díky tomu, že věta o ekvivalentních definicích (věta XX) říká, že omezení se na tento druh množin nezpůsobí změnu dimenze. Vyjdeme z toho, že pro $\delta_k = 4^{-k}$ by měla jít dimenze množiny spočítat takto:

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{k\to\infty} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta_k},$$

pokud tedy limita existuje.

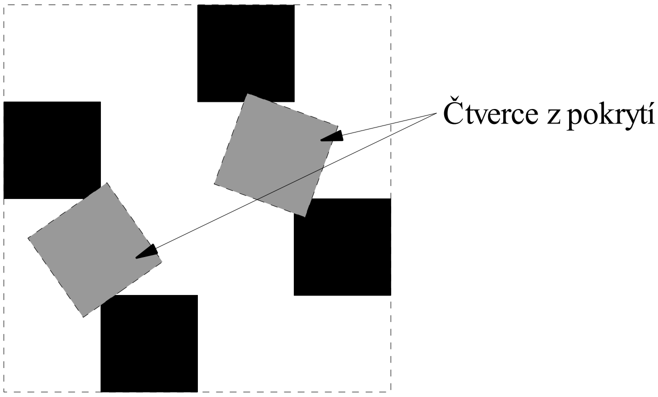
Přímo z konstrukce množiny plyne, že počet čtverců $N_\delta(F)$ je menší nebo roven než 4^k. Horní odhad bude tedy vypadat takto:

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log 4^k}{\log 4^k} = 1.$$

Na druhou stranu, každý čtverec s $\delta_k = 4^{-k}$ z pokrytí protne maximálně 2 jiné čtverce s $\delta_k = 4^{-k}$ z k-tého kroku generování množiny (viz. obrázek 19). Protože se množina F dotýká každého z 4^k čtverců z k-tého kroku, pak $N_{\delta_k}(F) \geq 1/2 \cdot 4^k$. Můžeme tedy spočítat dolní odhad:

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta_k} \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log 1/2 \cdot 4^k}{\log 4^k} = \liminf_{k\to\infty} \frac{k \log 4 - \log 2}{k \log 4} = 1.$$

Spojením obou nerovností získáme výsledek. Mřížková dimenze této množiny je tedy rovna 1 a rovná se dimenzi Hausdorffově, kterou jsme spočetli v příkladu 1.



Obrázek 19 *Dolní odhad mřížkové dimenze, čtverce z pokrytí protnou maximálně dva čtverce množiny F.*

Příklad 10 *Nechť F je Sierpińského trojúhelník (obrázek 4). Vypočtěte mřížkovou dimenzi této množiny.*

Výpočet: Nejprve najdeme horní odhad. Množinu pokryjeme 3^k čtverci o straně 2^{-k} pro k-tou iteraci.

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log 3^k}{-\log\left(2^k \sqrt{2}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Dolní odhad je jako obvykle složitější. Je třeba použít alternativního výpočtu mřížkové dimenze, a to bodu 5 z věty 17. $N_\delta(F)$ bude největší počet disjunktních kruhů s poloměrem δ se středem v F. Středy těchto kruhů budou v horním vrcholu každého trojúhelníku a $\delta = 2^{-k}/2$.

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log 3^k}{-\log\left(2^{k+1}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Našli jsme tedy hodní a dolní odhad, ty se rovnají, takže

$$\dim_B F = \frac{\log 3}{\log 2}. \;\square$$

Poslední příklad ukáže, že ne na všech množinách se Hausdorffova a mřížková dimenze rovnají.

Příklad 11 *Vypočtěte mřížkovou dimenzi množiny F.*

Výpočet: Nechť $N_\delta(F)$ je nejmenší počet množin s diametrem maximálně δ, které pokrývají množinu F. Teď musíme najít vhodné δ. Zvolme δ takto:

$$\frac{2\mathrm{k}-1}{k^2(k-1)^2} = \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} > \delta \geq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2\mathrm{k}+1}{(k+1)^2 k^2}.$$

Pro takové δ platí, že množina U s $\operatorname{diam} U = \delta$ může pokrýt vždy maximálně jeden bod z množiny

$$\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{k^2}\right\}.$$

Pro další body z množiny to už neplatí. Takto jsme získali odhad $N_\delta(F) \geq k$. Dolní odhad mřížkové dimenze je tedy

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \geq \lim_{k \to \infty} \frac{\log k}{\log \frac{(k+1)^2 k^2}{2\mathrm{k}+1}} = \frac{1}{3}.$$

Horní odhad je o trochu těžší. Délky intervalů v pokrytí zvolíme následovně:

$$\frac{1}{k(k-1)^2} > \delta \geq \frac{1}{(k+1)k^2}.$$

Pro takto zvolené δ bude platit, že $k+1$ intervalů délky δ pokryje $\langle 0, 1/k^2 \rangle$, ale ještě zbude $k-1$ bodů, které lze pokrýt $k-1$ intervaly délky δ. Horní odhad potom vypadá takto:

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{\log 2\mathrm{k}}{\log k(k-1)^2} = \limsup_{k \to \infty} \frac{\log k + \log 2}{\log k + 2\log(k-1)} = \frac{1}{3}.$$

Spojením obou nerovností získáme mřížkovou dimenzi rovnu $1/3$. □

4. Praktická část

4.1. Vizualizace

Součástí mé práce bylo vytvořit programy pro zobrazování a průzkum fraktálních množin. Tyto programy jsou popsány dále. V této kapitole uvedu několik způsobů zobrazování různých druhů fraktálů.

Jako první popíši postup generování a vykreslování Mandelbrotovy množiny a Juliových množin. Nejprve je třeba zvolit obdélníkovou část komplexní roviny, nejlépe zadanou dvěma protilehlými rohovými body. Tento obdélník se musí přepočítat na souřadnice obrazovky. Při přepočtu souřadnic musíme dát pozor na to, že v matematice je kladný směr imaginární osy směrem nahoru, kdežto ve výpočetní technice je to opačně. Přepočet na souřadnice obrazovky se provede tak, že oblast komplexní roviny rozdělíme na mřížku, která má přesně tolik sloupců a řádků, jako je rozlišení okna, kam chceme množinu zobrazit. Krok mřížky pro osu `x` a `y` se tedy vypočítá takto :

```
dx := (x2-x1) / rx;
dy := (y2-y1) / ry;,
```

kde $x1+i\,y1$ je horní levý roh zobrazované oblasti v komplexní rovině a $x2+i\,y2$ je spodní pravý roh. Konstanty `rx` a `ry` jsou rozlišení okna, kam zobrazujeme množinu. Následuje již pouze dvojitý cyklus, který pro každý bod zjistí, zda bod patří nebo nepatří do množiny.

Pro každý bod na obrazovce zjistíme odpovídající komplexní hodnotu z_0. Pro tuto hodnotu a pro hodnotu c rozhodneme, zda posloupnost z_n diverguje či nikoliv. To znamená, že postupně počítáme z_n a jakmile $|z_n|$ překročí hodnotu $\max\{2,|c|\}$, pak posloupnost diverguje. Pokud po určitém počtu iterací (zadaných uživatelem) $|z_n|$ nepřekročí hodnotu $\max\{2,|c|\}$, pak rozhodneme, že posloupnost konverguje. Pokud posloupnost diverguje, bod odpovídající hodnotě z_0 neleží uvnitř Juliovy množiny. Pokud naopak posloupnost po zadaném počtu iterací nediverguje, prohlásíme počítaný bod za prvek dané Juliovy množiny.

Algoritmus pro zjištění, zda bod leží uvnitř Juliovy množiny, lze zapsat následovně:

nastav iter:=0
nastav z:=pozice_bodu_v_komplexní_rovině
pokud iter$<$MaxIter prováděj smyčku:
  nastav $z:=z^2+c$
  jestliže $|z|>2$ *bod neleží v Juliově množině;konec;*
  nastav iter:=iter+1
konec smyčky
bod leží uvnitř Juliovy množiny; konec

Tento algoritmus lze velmi jednoduše implementovat s tím, že proměnné `z` a `c` jsou komplexní čísla. Protože ve většině programovacích jazyků nejsou komplexní čísla zavedena jako základní datové typy, pomůžeme si tím, že každé komplexní číslo reprezentujeme jeho reálnou a imaginární složkou. Proto např. `z` bude reprezentováno dvojicí `zx` a `zy` a `c` bude reprezentováno dvojicí `cx` a `cy`.

Absolutní hodnotu $|z|$ lze rozepsat jako `sqrt(zx*zx+zy*zy)`, kde `sqrt()` je funkce odmocniny. V reálných programech není použit přímo výpočet absolutní hodnoty, protože vyčíslení odmocniny je časově velmi náročné. Podmínku `sqrt(zx*zx+zy*zy)>2` lze umocnit a použít novou podmínku, kde není potřeba provádět výpočet odmocniny: `zx*zx+zy*zy>4`. Hodnoty `zx*zx` a `zy*zy` je vhodné předpočítat do nových proměnných, protože se v jednou iteračním kroku používají na dvou místech a není nutné počítat stejný výraz dvakrát.

Výraz $z := z^2 + c$ lze rozepsat na reálnou a imaginární část:

```
zx'=zx*zx-zy*zy+cx
zy'=2*zx*zy+cy
```

Aby nebylo nutné používat dvou nových proměnných `zx'` a `zy'`, použijí se již předpočítané mocniny reálné a imaginární složky `z`. Také je vhodné prohodit oba výrazy, aby nebylo nutné zavádět nové pomocné proměnné:

```
zx2=zx*zx
zy2=zy*zy
zy=2*zx*zy+cy
zx=zx2-zy2+cx
```

V jazyce C:

```c
void CalcJulia (int width, int height, // velikost bitmapy
       double xmin,double xmax, // mezni pozice v komplexni rovine
       double ymin,double ymax,
       double cx, double cy,    // pocatecni pozice v komplexni rovine
       int maxiter, byte* data) // max. pocet iteraci a vysledna bitmapa int x,y;

{
  int i,j,iter;               // pocitadla smycek
  double zx,zy,zx2,zy2;       // komplexni promenna "z"
  double x,y;                 // pozice v komplexni rovine
  byte* p=data;               // ukazatel na zapisovany pixel
  double max_r;               // polomer pro divergenci

  if (cx*cx+cy*cy>4) max_r=cx*cx+cy*cy;      // max_r = max{|c|,2}
  else max_r = 4.0;
  y = ymin;
  for (j=0; j<height; j++) {          // pro vsechny radky v bitmape

    x=xmin;
    for (i=0; i<width; i++) {         // pro vsechny sloupce v bitmape
      zx=x;
      zy=y;                           // nastavit komplexni promennou "z"
      iter=0;                         // vynulovat pocet iteraci

      do {                            // iteracni smycka
         zx2=zx*zx;                   // zx^2
         zy2=zy*zy;                   // zy^2
         zy=2.0*zx*zy+cy;
         zx=zx2-zy2+cx;               // z:=z^2+c
         iter++;                      // zvysit pocet iteraci
      } while (iter<maxiter && (zx2+zy2)<max_r);
                                      // test na poc. iteraci a bailout

      if (iter==maxiter) {            // bod je uvnitr mnoziny
         *p=0;p++;                    // -> cerny pixel
         *p=0;p++;
         *p=0;p++;                    // kazdy pixel je ulozen ve 3 bytech - RGB
      }
      else {                          // bod je vne mnoziny
         *p=(byte)(iter);p++;         // tzn, je to obarveny pixel
         *p=(byte)(iter);p++;         // zde se pixel obarvi odstinem sede
         *p=(byte)(iter);p++;
      }

      x+=(xmax-xmin)/width;           // dalsi bod v komplexni rovine
    }
    y+=(ymax-ymin)/height;
  }
}
```

Postup pro výpočet bodů ležících v Mandelbrotově množině lze zapsat pomocí jednoduchého algoritmu, který je téměř totožný s algoritmem pro Juliovu množinu. Každý bod na obrazovce přepočítáme na komplexní číslo a zjišťujeme, zda patří do Mandelbrotovy množiny. Vstupem algoritmu pro zjišťování, zda bod patří do množiny, je komplexní číslo `c` a konstanta určující maximální počet iterací `MaxIter`, po jehož dosažení považujeme posloupnost za nedivergentní. Algoritmus lze zapsat takto:

nastav iter:=0
nastav z:=0
pokud iter < MaxIter prováděj smyčku:
    nastav $z := z^2 + c$
    jestliže $|z| > 2$ *bod neleží v Mandelbrotově množině; konec*
    nastav iter:=iter+1
konec smyčky
bod leží uvnitř Mandelbrotovy množiny; konec

V jazyce C:

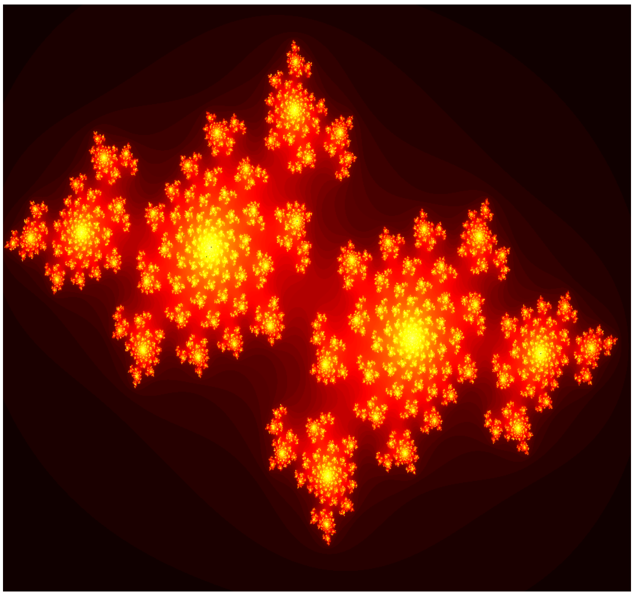
```c
int MandelbrotTest(double cx, double cy)
{
  double zx,zy,zx2,zy2;        // komplexni promenna "z"
  int iter;                    // pocet iteraci

  zx=0;                        // vynulovat komplexni promennou "c"
  zy=0;
  iter=0;                      // vynulovat pocitadlo iteraci

  do {                         // iteracni smycka
    zx2=zx*zx;                 // zx^2
    zy2=zy*zy;                 // zy^2

    zy=2.0*zx*zy+cy;
    zx=zx2-zy2+cx;             // z:=z^2+c

    iter++;                    // zvysit pocet iteraci
  } while (iter<maxiter && (zx2+zy2)<4.0);
                               // test na poc. iteraci a bailout

  if (iter==maxiter)           // bod je uvnitr Mandelbrotovy mnoziny
  return LEZI_UVNITR;
  else                         // bod je vne Mandelbotovy mnoziny
  return LEZI_VNE;
}
```

Podle rychlosti divergence, tedy v našem případě počtu iterací potřebných pro rozhodnutí o divergenci, lze bodům přiřazovat různé barvy. V základním provedení v obrázku vznikají plochy se stejným počtem iterací, tedy barvou. Vznikly proto vzorce, aby barvy byly rozděleny spojitě. To však nemá žádný matematický význam a jedná se pouze o zkrášlení výstupního obrázku. Více se o tomto dočtete v [10]. Na obrázcích 20, 21, 22 a 23 jsou Juliovy množiny s různými barevnými variacemi.

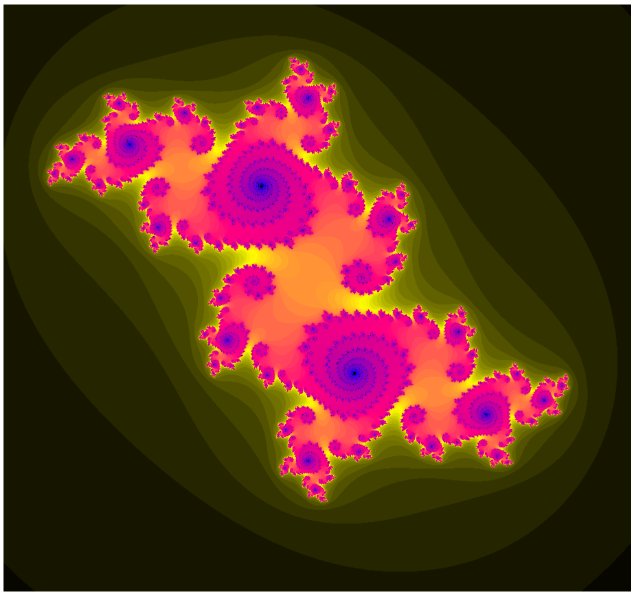
Zobrazování fraktálů jako je například Kochova křivka, Sierpińského trojúhelník a podobně je obtížnější. Existuje několik různých algoritmů, ale velmi často jsou navrženy pouze na určitý typ množiny nebo skupiny množin (želví grafika, více v [11]). Ve svém programu IFS, který je popsán dále, jsem se snažil vytvořit algoritmus, kterým by se dal vygenerovat libovolný IFS fraktál. V následujících odstavcích popíši algoritmus a vizualizaci v mém programu, jeho ovládání a vlastnosti jsou popsány později.

Všechny objekty, které se dají pro tvorbu fraktálů využít (úsečka, trojúhelník, kružnice a čtverec), jsou odvozeny od základní abstraktní třídy `GO` – grafický objekt, které musí implementovat základní transformace jako je otočení, změna měřítka a zrcadlení.

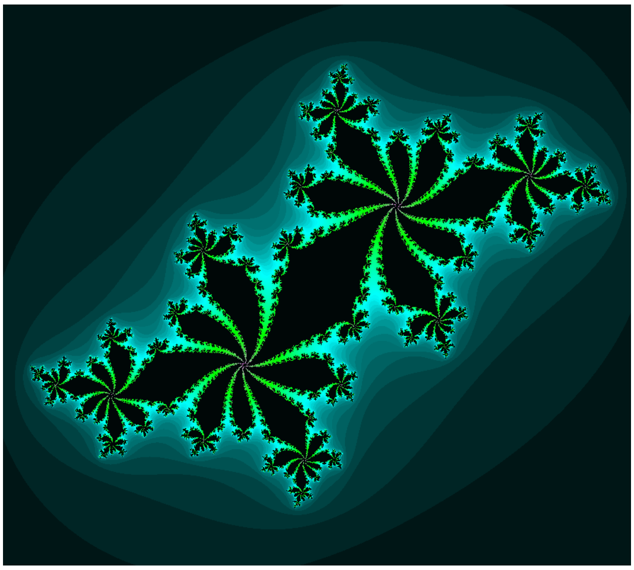
Dále jsou v programu definovány tři základní objekty typu `Fractal` – iniciátor, generátor a samotný fraktál. Třída `Fractal` dovoluje vložit libovolný počet základních útvarů i s informacemi o transformacích a implementuje metody pro iteraci fraktálu.



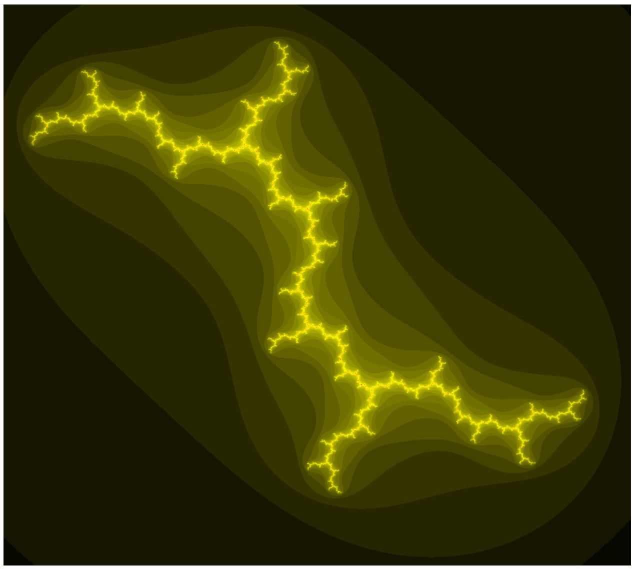
Obrázek 20 *Juliova množina -0.7091 +0.3160i*



Obrázek 21 *Juliova množina -0.0585 +0.66i*



Obrázek 22 *Juliova množina -0.3555-0.62007i*



Obrázek 23 *Juliova množina 0+1i*

Algoritmus programu tedy spočívá v tom, že se vytvoří a naplní objekt iniciátor (pomocí grafického prostředí), z iniciátorů se vytvoří generátor a pomocí funkce `iterate()` se generuje fraktál tak, že se prochází obsah objektu fraktál a každý iniciátor se nahradí vhodně transformovaným generátorem. Tyto transformace se zadaly při naplňování objektu generátor. Následující kód ukazuje moji implementaci funkce `Iterate()`.

```
public void iterate()
{
  ArrayList a = new ArrayList();     // nový seznam útvarů ve fraktálu
  Iterator i = getIterator();
  Shape fs = null;                   // pro jednotlivé části fraktálu

  while (i.hasNext())                // prochází se celý fraktál
  {
    Object o = i.next();
    if (o instanceof Shape)          // kontrola, zda je v seznamu nějaký tvar
```

```
    {
      fs = (Shape) o;
      if (fs.getType()==Shape.INITIATOR)   // pokud se jedná o iniciátor, tak
                                             nahradíme generátorem.
        insertGen(fs,a);
      else
        a.add(fs);            // jinak necháme původní tvar.
    }
    else
    {
      a.add(o);
    }
  }
  obj = a;                    // starý seznam zahodíme
  iter++;                     // zvýšíme počet iterací
}
```

Fuknce `insertGen()` nahradí iniciátor vhodně transformovaným generátorem. Tato funkce jen volá transformační funkce každého základního objektu, a protože tyto objekty mají všechny stejného předka (`GO`), tak to lze zapsat velmi elegantně.

Po dokončení zadaného počtu iterací jsou v objektu fraktálu uloženy souřadnice všech základních útvarů, které se pak vykreslí do okna pomocí funkcí knihovny AWT z Javy. Tato část je nejvíce náročná na čas a pamět.

Tento algoritmus je není složitý, snažil jsem se ho udělat podle toho, jak by takový fraktál vytvářel člověk. Po programátorské stránce to bylo trochu obtížnější, při psaní tohoto programu jsem se chtěl seznámit s možnostmi objektového programování ve větším projektu a pokusit se napsat program, který má grafické prostředí oddělené od funkční části programu.

4.2. Mřížková dimenze na počítači

V předchozím textu byla mřížková dimenze zkoumána pouze teoreticky, byly uvedeny její vlastnosti, výhody a nevýhody. Jako výhoda byla zmíněna možnost jejího výpočtu numericky pomocí výpočetní techniky. Pokusil jsem se tedy vypočítat mřížkovou dimenzi různých množin, abych ověřil její přesnost a použitelnost. Nejprve jsem zkusit „jednoduché“ množiny jako je čtverec, kruh a přímka. Dále jsem zvolil složitější soběpodobné množiny (Kochova křivka, Sierpińského trojúhelník a další. Jako poslední jsem se pokoušel ověřit dimenzi hranice Mandelbrotovy množiny.

Na výpočet mřížkové dimenze existuje jednoduchý a rychlý algoritmus. Další výhodou je, že na vstupu může být libovolná množina (nejčastěji dvourozměrný obrázek). Není tedy potřeba, aby vstup byl soběpodobný. Množinu, u které chceme měřit dimenzi, umístíme na mřížku s velikostí strany buňky s a spočítáme, kolik čtverců z mřížky obsahuje nějakou část množiny. Toto číslo závisí na s a budeme ho značit $N(s)$. Potom vezmeme hustější mřížku a opět zjistíme počet čtverců obsahujících množinu. Takto pokračujeme pro několik různých mřížek. Získané hodnoty vyneseme do log-log grafu, kde na ose x bude $\log(1/s)$ a na ose y bude $\log N(s)$. Body v grafu proložíme přímkou a směrnice této přímky udává právě mřížkovou dimenzi. Jedná se vlastně o složitost množiny.

Mřížková dimenze závisí na několika parametrech, které velmi ovlivňují výslednou hodnotu. Nesprávná volba těchto parametrů může způsobit velmi velké chyby při výpočtu. Mezi tyto parametry patří

- **volba funkce pro výpočet směrnice přímky v log-log grafu** – většinou se volí lineární regrese, ale lze použít jiné metody.
- **volba vhodného rozsahu velikostí mřížky** – tento parametr je velmi důležitý. Závisí na vstupní množině, tj. na její jemnosti (rozlišení) a struktuře.

- **orientace a umístění mřížky na množině** – pro obrázky z reálného světa (fotografie) je tento parametr důležitý, u množin, které jsem zkoumal já (tj. hlavně počítačově generované soběpodobné množiny), jsem znal správnou pozici.

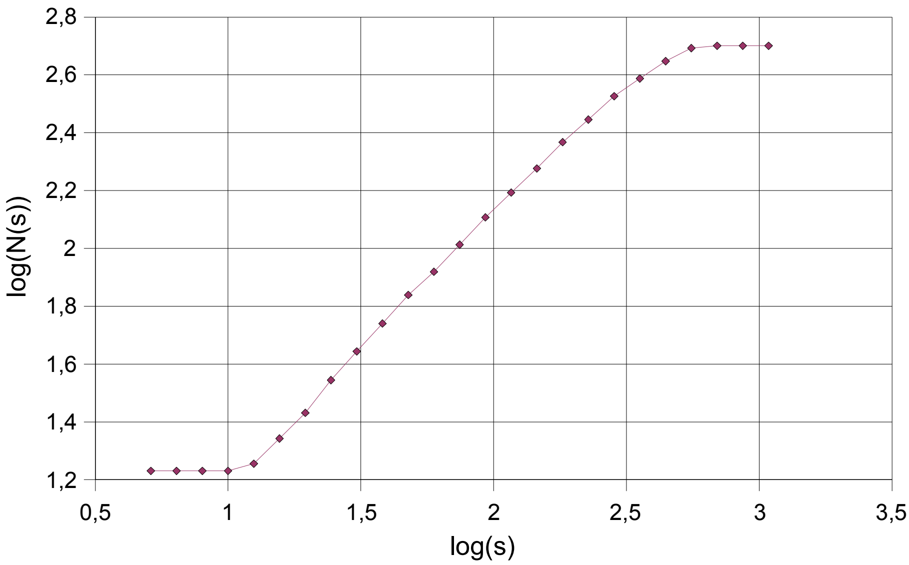
Volba největší buňky mřížky

Měřená množina je v paměti počítače uložena v poli bodů, které může být čtvercové nebo obdélníkové. Největší možná velikost čtverce mřížky je kratší strana obdélníku. V praxi se ale ukazuje, že čtverce větší než $1/4$ kratší strany obdélníku obklopující množinu neposkytují téměř žádnou informaci. Při takové volbě se pouze zvyšuje riziko zvětšení chyby měření. V mých měřeních jsem vždy začínal s velikostí čtverce o hraně alespoň $1/4$.

Tato volba samozřejmě není vždy správná. Pro množiny, které z velké části vyplňují čtverec nebo obdélník je vhodné volit počáteční čtverec menší. Tyto množiny obsahují mnoho detailů a při volbě velkých počátečních čtverců je proto protnou skoro všechny. Při zahrnutí těchto hodnot pro výpočet dimenze dojde k velké chybě a dimenze vyjde vyšší než by správně měla být.

Volba nejmenší buňky mřížky

Volba nejmenší buňky závisí hlavně na rozlišení obrázku nebo množiny. Většinou se jako nejmenší bere velikost jednoho pixelu, ale můžeme skončit o něco dříve, zhruba v intervalu jednoho až pěti pixelů. Výpočet se tedy provádí tak, že vezmeme největší čtverec a půlíme jeho velikost, až se dostaneme na úroveň nejmenší buňky. Takto získáme informace o složitosti množiny pro různá měřítka.



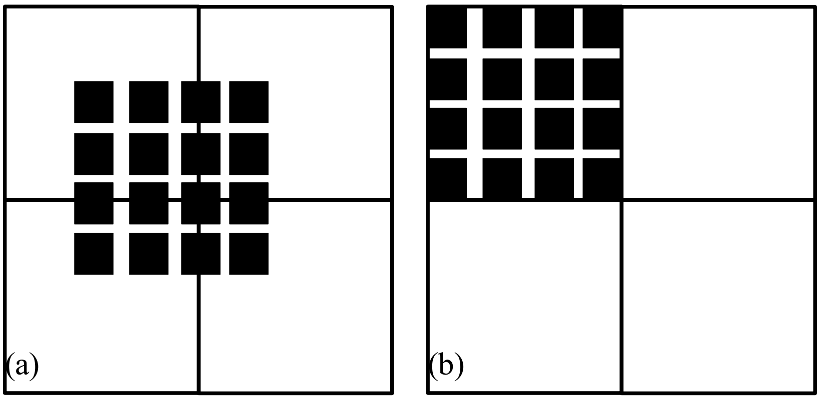
Obrázek 24 *Log-log graf při měření mřížkové dimenze*

Volbu velikostí buněk je nejlepší předvést na příkladu. V grafu na obrázku 24 jsou vyneseny logaritmy velikosti čtverce v buňce (osa x) a počtu obsazených čtverců (osa y). Záměrně jsem na začátku zvolil hodně velkou buňku a výpočet provedl až za rozlišení obrázku tak, abych názorně demonstroval důležitost volby počáteční a konečné velikosti mřížky. Kdybychom provedli odhad dimenze např. lineární regresí ze všech dat, vyjde chybná hodnota. Hned od pohledu je vidět, že je třeba udělat odhad směrnice jen na prostřední části grafu, na počítači je nalezení dat vhodných pro odhad dimenze složitější. Ve své práci jsem se problémem automatického nalezení vhodných dat nezabýval, vždy jsem je vybral pomocí zobrazení grafu ručně.

V první části se se změnou velikosti čtverce mřížky počet obsazených čtverců neměnil, protože jejich velikost byla mnohem větší než diametr množiny. Obsazen byl vždy jen jeden čtverec. Když ale bylo dosaženo menší velikosti čtverců, začal se měnit počet obsazených. Od tohoto místa je třeba provádět výpočet mřížkové dimenze. Když se velikost čtverců dostala pod jemnost množiny, tj. nebyl dostatečný počet iterací nebo vstupní obrázek měl malé rozlišení, tak se počet obsazených čtverců opět přestal měnit. V místě tohoto přechodu končí interval pro měření dimenze a poslední hodnota, kde se počet obsazených čtverců mění, bývá často rozměr nejmenší buňky. Mohou nastat i situace, kde tento postup nemusí platit. Příklad, kdy to neplatí, je uveden v kapitole o měření dimenze přímky.

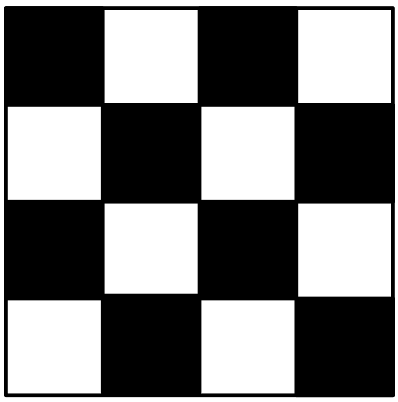
Chyby při počítačovém zjišťování mřížkové dimenze

Při počítání mřížkové dimenze na počítači se nevyhneme chybě při zjišťování počtu obsazených čtverců, i když splníme všechny tři předchozí body. Je to z toho důvodu, že se nemusíme trefit přesně na každý detail množiny. Při analytickém výpočtu toto nemá vliv, jelikož velikost čtverce pošleme k nule, což na počítači není samozřejmě možné. I když do čtverce padne například jen jeden bod, počítáme ho jako že je celý zaplněný. Toto jsem se snažil ve své práci mírně vylepšit tak, že jsem čtvercům přiřadil váhy (viz. dále).



Obrázek 25 *Příklad započítání více čtverců, než je třeba, (a) špatně, (b) správně*

Na obrázku 25 je znázorněno, jak dochází k chybě započítání více čtverců. Pokrytí obsahuje 2x2 čtverce, kde na pokrytí množiny stačí pouze 1. Nevhodným umístěním však došlo k obsazení všech 4 čtverců. V dalším kroku by se tedy počet čtverců měnil ve všech čtvercích mřížky. Mřížková dimenze také může dát menší počet čtverců, než ve skutečnosti je. Jedná se hlavně o případy, kdy čtverec obsahuje velmi jemné detaily množiny. Toto ilustruje obrázek 26. Mřížková dimenze pak vyjde menší než má. Tento problém se dá řešit dalším zmenšením mřížky.



Obrázek 26 *Započítání méně čtverců než je třeba*

4.3. Vylepšení numerického výpočtu mřížkové dimenze

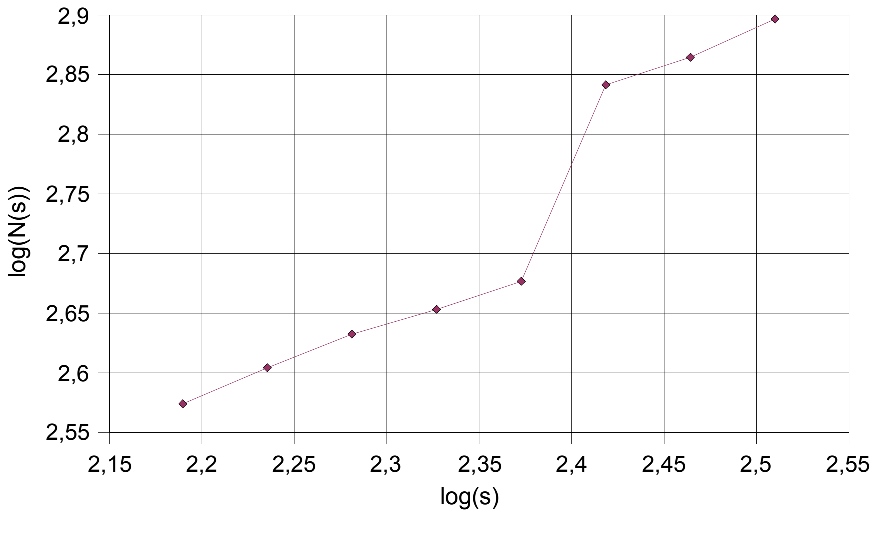
Mřížková dimenze počítaná numericky není příliš přesná. I na jednoduchých množinách (přímka, kružnice, čtverec) vznikají chyby, které jsou sice malé, ale ne zanedbatelné. Na fraktálech jako např. Kochova křivka, Sierpińského trojúhelník a dalších, se chyba ještě zvýší. Jedním z mých cílů bylo výpočet zpřesnit.

Při výpočtech se často stává, že do jedné buňky mřížky padne například pouze několik málo bodů, kdežto do jiných i stovky. Při výpočtu se sčítají obsazené buňky a nezáleží na tom, kolik bodů do které padlo. Já jsem každé buňce přiřadil váhu podle počtu bodů, které do ní padly. Zkoušel jsem mnoho možností, ale osvědčilo se mi pouze několik.

První způsob přiřazování váhy, který dával lepší výsledky než běžný výpočet mřížkové dimenze, spočívá v tom, že program spočítá, kolik do které buňky padlo bodů, z těchto hodnot vypočítá průměr. Buňka, do které padlo méně než průměrný počet bodů, se započítá standardně jako jedna a buňka, do které padlo více než průměr, se započítá jako dvě buňky. Tento způsob výpočtu bude dále v textu označen jako „váha 1".

Další způsob je vlastně zjemnění předchozího postupu. Program opět najde maximum počtu bodů v buňkách. Váhy přiřadí tak, že buňka s počtem bodů menším než $1/3$ průměru je započítána jako jedna. Buňka s počtem bodů větším než průměr je započítána jako 3 buňky a zbylé buňky jako dvě. Tento způsob výpočtu bude dále v textu označen jako „váha 2". Tímto postupem se ještě zvýší přesnost. Zkusil jsem samozřejmě i další zjemnění přiřazování vah, ale nesetkal jsem se s příliš velkým zlepšením. Někdy se naopak stalo, že hodnota spíše zhoršila.

Bohužel tento postup má i jisté nevýhody. Množina, která je nedostatečně jemná, způsobí, že když se velikost buňky blíží jemnosti množiny, tak vznikají velké změny počtu buněk. Log-Log graf takového měření je na obrázku 27. Řešením tohoto problému je takové, že se vezme pouze ta část grafu, kde je závislost lineární, tím se ale sníží počet použitelných hodnot. Když je možnost zpřesnění množiny, tak to není tak velký problém. Horší případ je, když zpřesňování není možné (například když se měří dimenze množiny z rastrového obrázku). Pak může docházet zase k chybě kvůli malému počtu použitelných hodnot. Toto se naštěstí stává jen u malých rastrových obrázků.



Obrázek 27 *Chyba při nedostatečné jemnosti mřížky při použití vah buněk*

Pokoušel jsem se také o jiné způsoby přiřazení vah, například, že váha buňky byla logaritmus nebo exponenciála počtu bodů, které do ní padly. Tyto způsoby ale dávaly úplně jiné hodnoty. V dalších kapitolách jsou uvedeny mé výsledky pro různé druhy množin spočítané třemi způsoby, běžnou mřížkovou dimenzí, pomocí vah s rozdělením na polovinu a vah s rozdělením na třetiny.

4.4. Měření dimenze „jednoduchých" množin

Nejdříve jsem se snažil zjistit , jaké hodnoty vrací algoritmus pro jednoduché množiny, tzn. jak velké jsou chyby ve výpočtu. Vždy jsem použil standardní verzi měření mřížkové dimenze (v grafech a tabulkách označeno jako „normal", kde počet obsazených čtverců je označen jako $N_0(s)$, ale také dvě moje vylepšení - „Váha 1" (počet obsazených čtverců označen jako $N_1(s)$ a „Váha 2" (počet obsazených čtverců označen jako $N_2(s)$).

Všechny hodnoty jsem získal pomocí svého programu IFS (kapitola XX). Tento program neumí přímo měřit dimenze jednoduchých množin (úsečka, kružnice, čtverec), ale má funkci pro import bitmapového obrázku. Dimenze všech uvedených jednoduchých množin jsem tedy měřil tímto způsobem. Výpočty pro tyto množiny vycházely docela přesně, ale zkusil jsem výpočet ještě zpřesnit. Další z mých programů, program pro výpočet dimenze Mandelbrotovy dimenze (kapitola 5.1), jsem vylepšil tak, aby byl schopen počítat standardní mřížkovou dimenzi i jednoduchých množin. Tento program se oproti programu IFS liší tak, že měřená množina je zadaná přímo analyticky, nikoliv jen jako rastrový obrázek. Hodnoty z toho programu jsou proto mnohem přesnější než standardní mřížková dimenze z rastrového obrázku. Počet obsazených čtverců získaných z tohoto programu je označen jako $N_3(s)$ a v tabulkách a grafech pojmenován jako „přesně". Bohužel takto se dá měřit pouze dimenze množin, které lze zadat jednoduchou rovnicí.

Úsečka

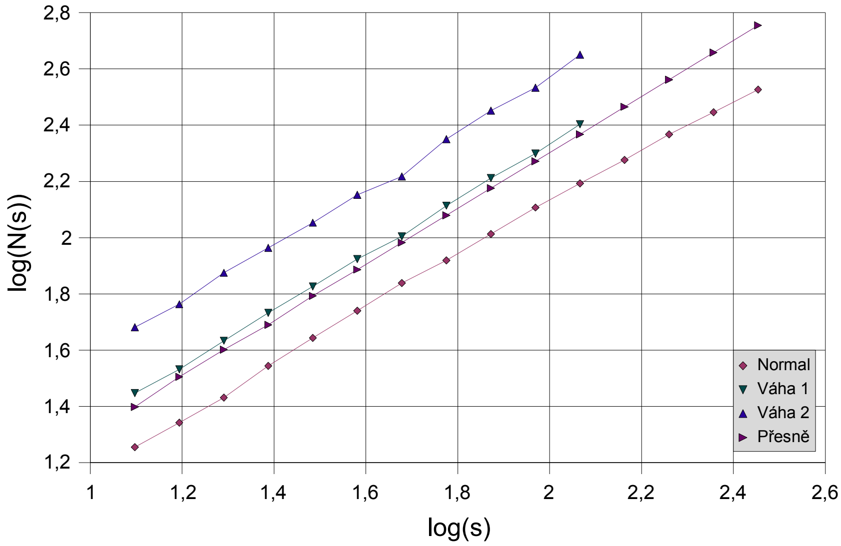
Jako první jsem numericky ověřoval chybu při výpočtu dimenze úsečky. Úsečka má Hausdorffovu i mřížkovou dimenzi rovnu 1. Při použití standardní mřížkové dimenze vyšla hodnota mřížkové dimenze rovna 0,9636, což se od skutečné hodnoty liší o 3,63%. Pokud se ovšem použije vylepšení výpočtu, které jsem navrhl, tak se výsledek zpřesní. Způsobem výpočtu „Váha 1" získáme hodnotu dimenze rovnu 0,9874, tj. chyba je 1,25% a způsobem „Váha 2" se chyba sníží až na 0,66%, dimenze je v tomto případě rovna 0,9934. Výpočet dimenze z přesného zadaní množiny byl nejlepší. Mřížková dimenze je 0.9953, což odpovídá chybě 0,46%.

$\log s$	$\log N_0(s)$	$\log N_1(s)$	$\log N_2(s)$	$\log N_3(s)$
1,0969	1,2553	1,4472	1,6812	1.3979
1,1938	1,3424	1,5315	1,7634	1.5051
1,2907	1,4314	1,6335	1,8751	1.6021
1,3876	1,5441	1,7324	1,9638	1.6902
1,4846	1,6435	1,8261	2,0531	1.7924
1,5815	1,7404	1,9243	2,1523	1.8865
1,6784	1,8388	2,0043	2,2175	1.9823
1,7753	1,9191	2,1139	2,3502	2.0792
1,8722	2,0128	2,2122	2,4518	2.1761
1,9691	2,1072	2,2989	2,5328	2.2718
2,0660	2,1931	2,4031	2,6503	2.3674
2,1629	2,2765			2.4654
2,2598	2,3674			2.5611
2,3567	2,4456			2.6580
směrnice	0,9636	0,9874	0,9934	0.9953

Tabulka 1 *Hodnoty pro výpočet mřížkové dimenze úsečky*

Čtverec

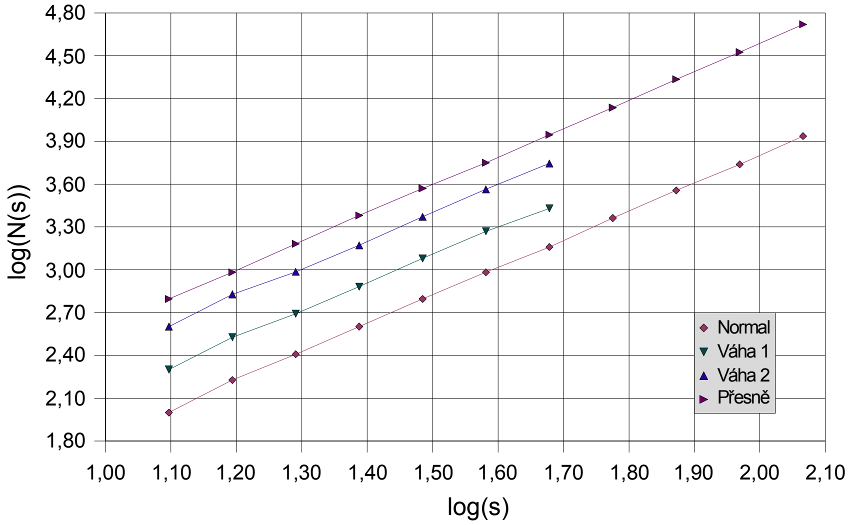
Další jednoduchou množinou, u které jsem ověřoval přesnost měření dimenze, je čtverec. Dimenze čtverce je rovna 2. Standardní mřížkovou dimenzi jsem vypočítal pomocí programu IFS, hodnota vyšla 1,9746, tzn. s chybou 1,27%. Při výpočtu pomocí přesného zadání čtverce pomocí rovnice se výsledek zlepšil na 1,9824 a chyba klesla na 0,88%. Výpočtem pomocí vylepšené verze mřížkové dimenze se pro „Váhu 1" nečekaně výsledek nepatrně zhoršil. Nejedná se však o velké zhoršení. Pro „Váhu 1" vyšla dimenze rovna 1,9717, tj. chyba je 1,41%, což je zhoršení jen o 0,14%. Naopak pro „Váhu 2" byl výpočet velmi přesný. V tomto případě vyšla mřížková dimenze rovna 1,9966 a chyba rovna 0,17%. Hodnoty a graf pro dimenzi úsečky jsou uvedeny v tabulce XX a na obrázku 29.



Obrázek 28 *Mřížková dimenze úsečky*

$\log s$	$\log N_0(s)$	$\log N_1(s)$	$\log N_2(s)$	$\log N_3(s)$
1,0969	2,0000	2,3010	2,6021	2.7959
1,1938	2,2279	2,5276	2,8280	2.9827
1,2907	2,4082	2,6928	2,9854	3.1821
1,3876	2,6021	2,8814	3,1711	3.3804
1,4846	2,7959	3,0795	3,3716	3.5707
1,5815	2,9827	3,2697	3,5636	3.7501
1,6784	3,1596	3,4301	3,7450	3.9463
1,7753	3,3625			4.1364
1,8722	3,5563			4.3346
1,9691	3,7385			4.5249
2,0660	3,9370			4.7197
směrnice	1,9746;	1,9717;	1,9966;	1,9824

Tabulka 2 *Hodnoty pro výpočet mřížkové dimenze čtverce*



Obrázek 29 *Mřížková dimenze čtverce*

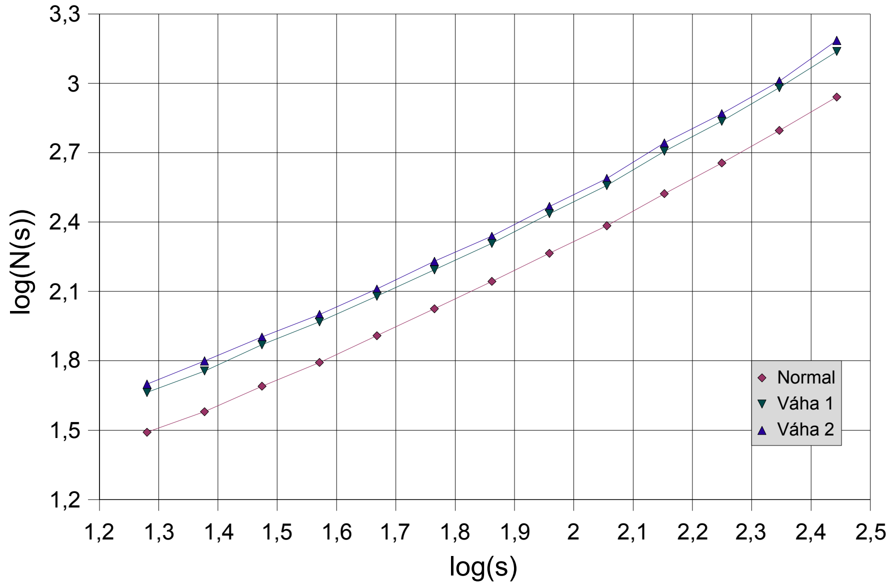
Úsečka s větší tloušťkou

Při měření dimenze reálných objektů (vločka, strom) jsem narazil na problém, jaký vliv na výslednou dimenzi má tloušťka hranice množiny. Zkusil jsem tedy změřit dimenze úseček s tloušťkou 5 a 10 pixelů. Jak se dalo čekat, pro velké čtverce z mřížky se tloušťka úseček neprojevovala a směrnice se tedy blížila číslu 1. Například směrnice mezi prvními dvěma body v $\log - \log$ grafu pro mřížkovou dimenzi ve verzi „Váha 2“ úsečky tloušťky 10 pixelů je rovna 1,0684. Pro úsečku tloušťky 5 pixelů je tato hodnota rovna 1,03. Čím se velikost čtverce v mřížce zmenšovala, rostl vliv tloušťky.

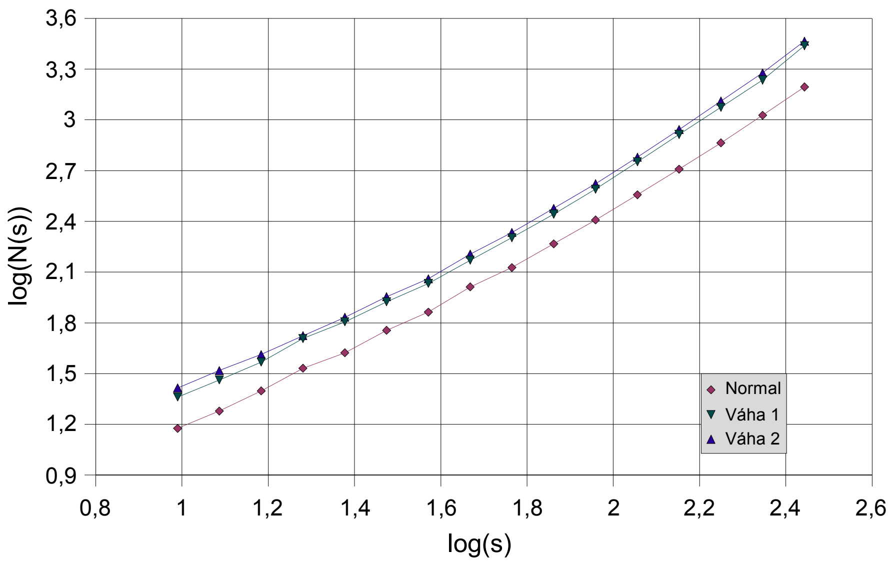
	úsečka 5px			úsečka 10px		
$\log s$	$\log N_0(s)$	$\log N_1(s)$	$\log N_2(s)$	$\log N_0(s)$	$\log N_1(s)$	$\log N_2(s)$
0,8928				1,1139	1,2788	1,3222
0,9897				1,1761	1,3617	1,4150
1,0866				1,2788	1,4624	1,5185
1,1835	1,3979	1,5682	1,6128	1,3979	1,5682	1,6128
1,2804	1,4914	1,6628	1,6990	1,5315	1,7076	1,7243
1,3773	1,5798	1,7559	1,7993	1,6232	1,8062	1,8325
1,4743	1,6902	1,8692	1,9031	1,7559	1,9243	1,9542
1,5712	1,7924	1,9685	2,0000	1,8633	2,0334	2,0607
1,6681	1,9085	2,0792	2,1106	2,0128	2,1703	2,2068
1,7650	2,0253	2,1931	2,2304	2,1271	2,3032	2,3345
1,8619	2,1430	2,3075	2,3385	2,2672	2,4425	2,4771
1,9588	2,2648	2,4362	2,4669	2,4082	2,5899	2,6222
2,0557	2,3838	2,5575	2,5877	2,5575	2,7520	2,7796
2,1526	2,5224	2,7059	2,7419	2,7084	2,9138	2,9430
2,2495	2,6551	2,8357	2,8686	2,8639	3,0745	3,1109
2,3464	2,7959	2,9809	3,0086	3,0269	3,2358	3,2778
2,4434	2,9405	3,1370	3,1853	3,1945	3,4384	3,4651

Tabulka 3 *Hodnoty pro výpočet vlivu tloušťky úsečky na hodnotu mřížkové dimenze*

Z grafů na obrázcích 30 a 31 (hodnoty pro tyto grafy jsou uvedeny v tabulce 3) je vidět, jak směrnice mezi body roste, až se pro malé čtverce blíží číslu 2. Směrnice mezi posledními dvěma body pro úsečku tloušťky 5 pixelů pro verzi „Váha 2“ je rovna 1,8229 a pro úsečku tloušťky 10 pixelů 1,9322. Z těchto zjištění vyplývá, že je třeba dávat si pozor na vhodný rozsah volby minimálního a maximálního rozměru buňky mřížky. Na důležitost volby jsem již upozorňoval, ale zde je příklad, kdy by při špatné volbě došlo k obrovské chybě. V praxi se musíme rozhodnout, zda chceme měřit dimenzi velkých nepravidelností nebo dimenzi detailů množiny.



Obrázek 30 Mřížková dimenze úsečky tloušťky 5px



Obrázek 31 *Mřížková dimenze úsečky tloušťky 10px*

4.5. Měření dimenze fraktálních množin

Měření dimenze jednoduchých množin dopadlo dobře, takže jsem dále měřil dimenze fraktálů jako jsou Kochova křivka, Sierpińského trojúhelník nebo Cantorova množina. Mým hlavním cílem bylo, zda vylepšení mřížkové dimenze pomocí přidání vah zpřesní výsledek. Vygenerování množiny i měření její dimenze jsem provedl ve svém programu IFS. Množiny jsou vygenerovány s přesností nejméně osmi iterací, kde bylo potřeba, tak i více. Osm iterací je však dostatečná přesnost. Vezmeme-li například Cantorovu množinu, kde je měřítko pro zmenšování rovno 1/3, tak rozlišení množiny bude $(1/3)^8 \approx 1{,}52 \cdot 10^{-4}$. Pro Sierpińského trojúhelník bylo třeba zvolit více iterací. Tato množina má měřítko pro iteraci rovno 1/2, což pro osm iterací nedává dostatečnou přesnost. Zde jsem zvolil 10 iterací.

Kochova křivka

Jak první jsem vybral Kochovu křivku, jejíž dimenze je $\log 4/\log 3 \approx 1.2618$. Množiny jsem vygeneroval s přesností 9 iterací . Výpočtem mřížkové dimenze jsem získal hodnotu mřížkové dimenze 1,2866. Chyba tohoto výpočtu je 1,96%. Metody pomocí vah daly lepší výsledky, pro „váhu 1" 1,2771 a pro „váhu 2" 1,2756. Chyby těchto výpočtů byly 1,21% a 1,09%. Je vidět, že se chyby snížily. Snížení chyb sice není nijak závratné, ale určitě není k zahození. $\text{Log}-\log$ graf pro Kochovu křivku je na obrázku 32 a data pro výpočet jsou v tabulce 4. Z grafu je také vidět, že použitím vylepšené mřížkové dimenze dosáhneme také mírné vyhlazení $\log-\log$ grafu, hlavně pro„váhu 2" je závislost téměř lineární bez větších odchylek.

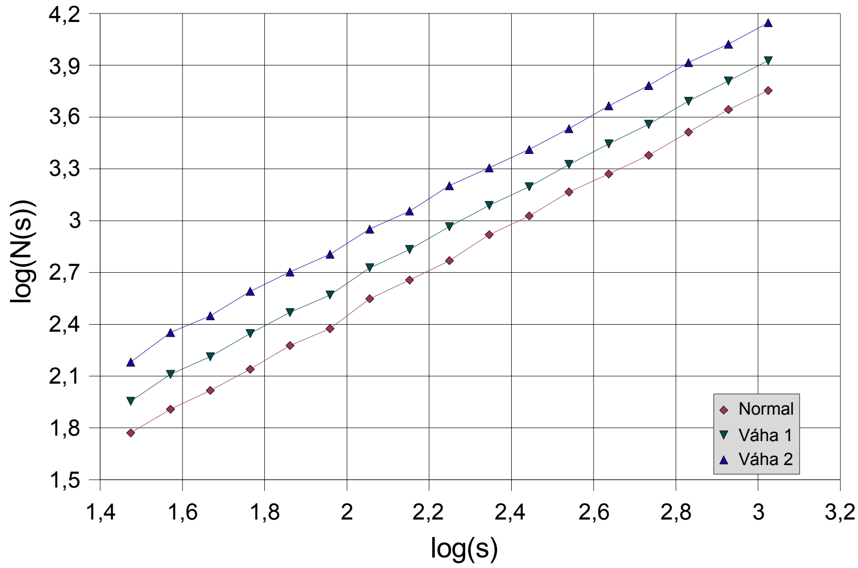
$\log s$	$\log N_0(s)$	$\log N_1(s)$	$\log N_2(s)$
1,0866	1,2304	1,4624	1,7243
1,1835	1,3979	1,6021	1,8451
1,2804	1,5563	1,7324	1,9542
1,3773	1,6335	1,8195	2,0492
1,4743	1,7709	1,9542	2,1818
1,5712	1,9085	2,1106	2,3522
1,6681	2,0170	2,2122	2,4487
1,7650	2,1399	2,3464	2,5911
1,8619	2,2765	2,4683	2,7024
1,9588	2,3747	2,5694	2,8055
2,0557	2,5478	2,7267	2,9509
2,1526	2,6561	2,8331	3,0558
2,2495	2,7686	2,9652	3,2028
2,3464	2,9186	3,0888	3,3060
2,4434	3,0282	3,1970	3,4130
2,5403	3,1664	3,3255	3,5333
2,6372	3,2709	3,4450	3,6652
2,7341	3,3789	3,5583	3,7828
2,8310	3,5132	3,6921	3,9161
2,9279	3,6435	3,8090	4,0223
3,0248	3,7540	3,9270	4,1464
směrnice	1,2866	1,2771	1,2756

Tabulka 4 *Hodnoty pro výpočet mřížkové dimenze Kochovy křivky*

Sierpińského trojúhelník

Použití vylepšených metod pro mřížkovou dimenzi pomohlo i při měření dimenze Sierpińského trojúhelníku (obrázek 4). Dimenze této množiny je rovna $\log 3/\log 2 \approx 1.5849$. Při použití standardní mřížkové dimenze jsem došel k hodnotě 1,6093, což odpovídá chybě 1,53%. Při výpočtu metodou „váha 1" se chyba zlepšila, její hodnota byla 0,85%, dimenze vyšla 1,5985. Metodou

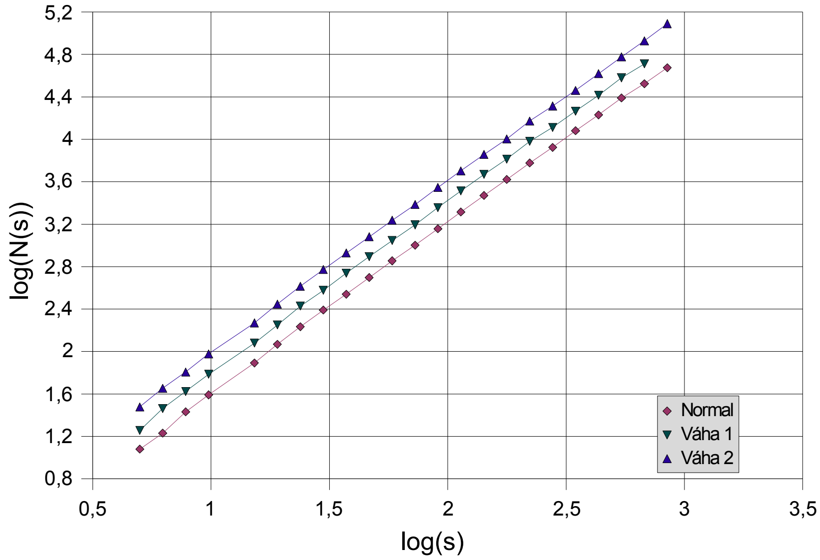
„váha 2“ jsem získal hodnotu dimenze rovnu 1,6021 (chyba byla 1,08%), což je nepatrně horší než pro metodu „váha 1“, ale stále lepší než původní mřížková dimenze. Hodnoty pro výpočet dimenze jsou uvedeny v tabulce 5 a graf je na obrázku 33.



Obrázek 32 *Mřížková dimenze Kochovy křivky*

$\log s$	$\log N_0(s)$	$\log N_1(s)$	$\log N_2(s)$
0,7959	1,2304	1,4624	1,6532
0,8928	1,4314	1,6232	1,8062
0,9897	1,5911	1,7853	1,9777
1,1835	1,8921	2,0792	2,2695
1,2804	2,0682	2,2504	2,4472
1,3773	2,2330	2,4281	2,6149
1,4743	2,3909	2,5775	2,7731
1,5712	2,5403	2,7388	2,9289
1,6681	2,6972	2,8943	3,0810
1,7650	2,8549	3,0461	3,2375
1,8619	3,0022	3,1940	3,3861
1,9588	3,1572	3,3566	3,5462
2,0557	3,3151	3,5132	3,7023
2,1526	3,4709	3,6691	3,8579
2,2495	3,6218	3,8137	4,0029
2,3464	3,7771	3,9808	4,1732
2,4434	3,9237	4,1126	4,3143
2,5403	4,0810	4,2660	4,4614
2,6372	4,2309	4,4152	4,6191
2,7341	4,3902	4,5801	4,7770
2,8310	4,5240	4,7112	4,9286
směrnice	1,6093	1,5985	1,6021

Tabulka 5 *Hodnoty pro výpočet mřížkové dimenze Sierpińského trojúhelníku*



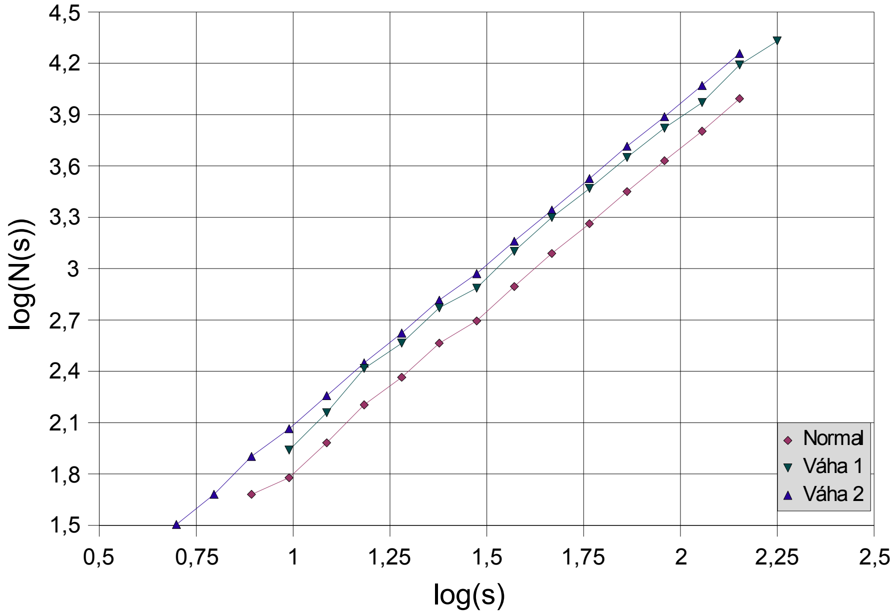
Obrázek 33 *Mřížková dimenze Sierpińského trojúhelníku*

Sierpińského koberec

Posledním fraktálem, který uvedu podrobně, je Sierpińského koberec (obrázek 5), jehož dimenze je rovna $\log 8/\log 3 \approx 1.8927$. Zde došlo také k zlepšení přesnosti výpočtu. Běžným výpočtem vyšla dimenze této množiny rovna 1,8631. Chyba je tedy rovna 1,57%. Při použití vah chyba klesala. Metodou „váha 1“ jsem získal hodnotu 1,8718, což je chyba už jen 1,11%. Při použití metody „váha 2“ chyba klesla až na 0,47%, získaná dimenze tedy byla 1,8839. Hodnoty pro výpočet dimenze jsou uvedeny v tabulce 6 a graf je na obrázku 34.

$\log s$	$\log N_0(s)$	$\log N_1(s)$	$\log N_2(s)$
0,6990			1,5051
0,7959			1,6812
0,8928	1,6812		1,9031
0,9897	1,7782	1,9395	2,0645
1,0866	1,9823	2,1584	2,2577
1,1835	2,2041	2,4166	2,4487
1,2804	2,3655	2,5647	2,6232
1,3773	2,5647	2,7709	2,8162
1,4743	2,6946	2,8859	2,9708
1,5712	2,8954	3,1011	3,1605
1,6681	3,0888	3,2995	3,3424
1,7650	3,2629	3,4682	3,5260
1,8619	3,4504	3,6494	3,7153
1,9588	3,6304	3,8216	3,8877
2,0557	3,8029	3,9696	4,0704
2,1526	3,9936	4,1902	4,2576
směrnice			

Tabulka 6 *Hodnoty pro výpočet mřížkové dimenze Sierpińského koberce*



Obrázek 34 *Mřížková dimenze Sierpińského koberce*

Shrnutí měření dimenze

Měření jsem provedl i pro další fraktály, abych zjistil, zda mnou navržené vylepšení poskytuje lepší přesnost výpočtu ve všech nebo jen v některých případech. Vybral jsem Cantorovo diskontinuum (obrázek 15), Cantorovu množinu (obrázek 1) a ještě fraktál z příkladu 5.

Pro Cantorovo diskontinuum a fraktál z příkladu 5 došlo opět ke zlepšení přesnosti výpočtu dimenze. Pro obě tyto množiny klesla chyba několikanásobně. Jak je vidět v tabulce 7, pro Cantorovo diskontinuum chyba klesla až na 0,04%. Bohužel pro Cantorovu množinu se chyba výpočtu zhoršila. Pomocí standardní mřížkové dimenze vyšla hodnota velmi přesně, a to s chybou pouze 0,18%. Při použití vylepšeného výpočtu se chyba zvýšila na 0,47%, což je tedy nepatrné zhoršení, ale rozhodně není příjemné. Za hlavní důvod tohoto jevu bych považoval to, že mřížková dimenze vyšla až nečekaně přesně. Zřejmě se podařilo čtverci z mřížky přesně pokrýt množinu, a pak již tedy nebylo co zlepšovat. Výsledky měření pro všechny měřené jednoduché i fraktální množiny jsou uvedeny v tabulce 7.

množina	normal	váha 1	váha 2	skutečná
úsečka	0,9636; 3,63%	0,9874; 1,25%	0,9934; 0,66%	1
čtverec	1,9746; 1.27%	1,9717; 1,41%	1,9966; 0,17%	2
kružnice	1,0411; 4,12%	0,9856; 1,43%	0,9951; 0,48%	1
Sierp. trojúhelník	1,6093; 1,53%	1,5985; 0,85%	1,6021; 1,08%	$\log 3/\log 2$
Sierp. koberec	1,8631; 1,57%	1,8718; 1,11%	1,8839; 0,47%	$\log 8/\log 3$
Kochova křivka	1,2866; 1,96%	1,2771; 1,21%	1,2756; 1,09%	$\log 4/\log 3$
Cantorovo diskontinuum	1,0085; 0,85%	0,9958; 0,42%	0,9996; 0,04%	1
Cantorova množina	0,6321; 0,18%	0,6339; 0,47%	0,6338; 0,46%	$\log 2/\log 3$
fraktál z příkladu 5	1,3357; 1,57%	1,3721; 1,11%	1,3595; 0,18%	$\frac{\log 8-\log\left(\sqrt{17}-1\right)}{\log 2}$

Tabulka 7 *Souhrn zjištěných dimenzí a chyb*

4.6. Měření dimenze Mandelbrotovy množiny

Mitsushiro Shishikura v roce 1994 v [6] dokázal, že Hausdorffova dimenze hranice Mandelbrotovy množiny je rovna číslu 2. Shishikura též dokázal, že dimenzi rovnou dvěma má i Juliova množina, kde jako konstantu vezmeme bod z hranice Mandelbrotovy množiny. Mým cílem bylo zjistit, zda bude mřížková dimenze vypočítaná numericky odpovídat dimenzi Hausdorffově.

Pro výpočet jsem použil svůj program, který dle zadaných parametrů počítá Mandelbrotovu množinu na jemné mřížce a sečte, do kolika větších čtverců padne hranice této množiny. Numericky počítaná mřížková dimenze má jednu z nevýhod v tom, že závisí na velmi mnoha parametrech. Mezi hlavní parametry při výpočtu dimenze právě Mandelbrotovy množiny patří volba velikosti základní mřížky, volba velikosti mřížky pro výpočet počtu zobrazených čtverců a volba počtu iterací pro rozhodnutí, zda posloupnost pro daný bod roste do nekonečna nebo ne.

Při mém měření jsem se pokusil měnit všechny hlavní parametry, ale ani pro jednu volbu jsem nedosáhl čísla dvě. Naopak, výsledky se velmi lišily. V kapitole o mřížkové dimenzi bylo uvedeno, že se mřížková dimenze může rovnat Hausdorffově dimenzi, ale existují případy, kdy se nerovná. Toto bude zřejmě příklad, kdy rovnost nenastává. V literatuře ani na internetu jsem nenalezl ani pokus o dokázání této skutečnosti. Právě proto jsem se pokusil alespoň o numerický výpočet.

Nejprve uvedu výsledky některých měření pomocí programu, který generuje Mandelbrotovu množinu co nejpřesněji. V tabulkách 8, 9 a 10 jsou získaná data pro různá nastavení měření a na obrázku 35 je graf získaných hodnot. Zkoušel též provést měření přímo z rastrového obrázku. Data těchto měření jsou uvedena dále.

s	$N(s)$	$\log s$	$\log N(s)$
0.10000000	131	1.00000	2.117271
0,05000000	337	1.30103	2.527630
0,02500000	838	1.60206	2.923244
0,01250000	2146	1.90309	3.331630
0,00625000	5750	2.20412	3.759668
0,00312500	16201	2.50515	4.209542
0,00156250	41438	2.80618	4.617399

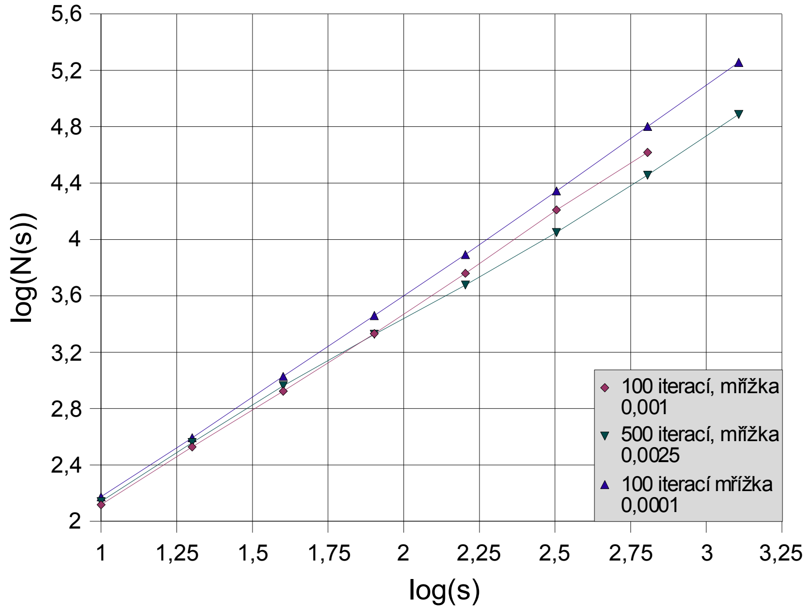
Tabulka 8 *Měření mřížkové dimenze Mandelbrotovy množiny, 100 iterací, základní mřížka 0,00025*

s	$N(s)$	$\log s$	$\log N(s)$
0,10000000	138	1.00000	2.139879
0,05000000	362	1.30103	2.558709
0,02500000	916	1.60206	2.961895
0,01250000	2120	1.90309	3.326336
0,00625000	4744	2.20412	3.676145
0,00312500	11215	2.50515	4.049799
0,00156250	28602	2.80618	4.456396
0,00078125	77178	3.10721	4.887494

Tabulka 9 *Měření mřížkové dimenze Mandelbrotovy množiny, 500 iterací, základní mřížka 0,00025*

s	$N(s)$	$\log s$	$\log N(s)$
0,10000000	149	1.00000	2.173186
0,05000000	392	1.30103	2.593286
0,02500000	1069	1.60206	3.028978
0,01250000	2885	1.90309	3.460146
0,00625000	7814	2.20412	3.892873
0,00312500	22075	2.50515	4.343901
0,00156250	63265	2.80618	4.801164
0,00078125	180666	3.10721	5.256876

Tabulka 10 *Měření mřížkové dimenze Mandelbrotovy množiny, 100 iterací, základní mřížka 0,0001*



Obrázek 35 *Log-log graf pro měření dimenze Mandelbrotovy množiny pro data z tabulek 8, 9 a 10 .*

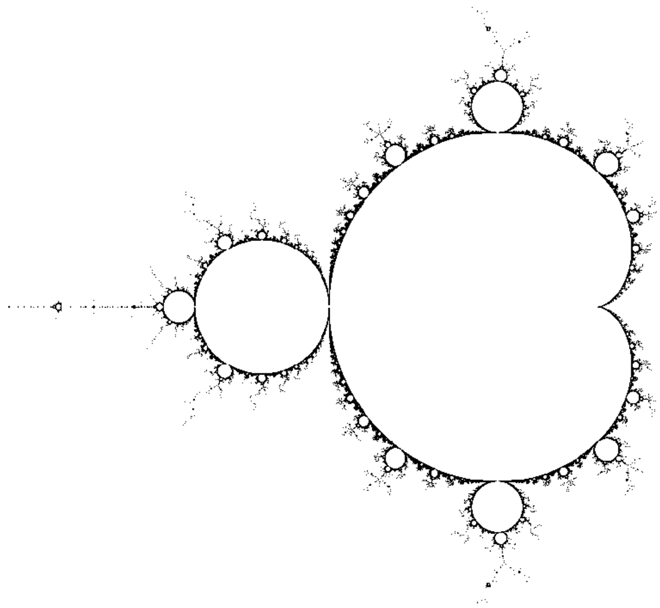
Z grafu na obrázku 35 lze vyčíst, že směrnice jsou pro různé parametry množiny odlišné. Avšak ani pro jedno nastavení se výsledná hodnota dimenze ani neblížila číslu 2. Nepomohlo ani sebevětší zjemňování množiny. Výsledné hodnoty dimenze se od sebe lišily někdy až o tři desetiny a pohybovaly se v rozmezí od 1,2 do 1,5. Přesná data uvádí tabulka 11.

V dostupné literatuře jsem nenašel žádnou zmínku o tom, že by se někdo pokoušel měřit dimenzi Mandelbrotovy množiny numericky. Neexistuje ani důkaz, jestli se mřížková dimenze Mandelbrotovy množiny rovná dimenzi Hausdorffově.

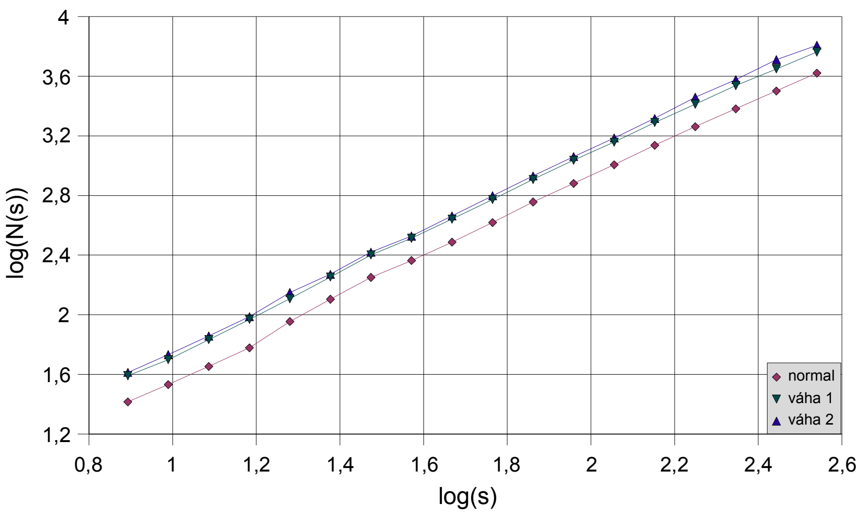
Mřížka / Iterace	0,001	0,00025	0,0001
100	1,388166	1,448435	1,463338
200	1,312852	1,382539	1,402773
500	1,233413	1,278755	1,300851

Tabulka 11 *Výsledky měření dimenze Mandelbrotovy množiny pro různá nastavení*

Při měření pomocí standardní mřížkové dimenze jsem nedostal očekávaný výsledek. Chtěl jsem ale zkusit, jaká bude dimenze Mandelbrotovy množiny, když měření provedu na nepřesnější rastrové verzi množiny (opět vygenerované v mém vlastním programu). Výsledky ale jen potvrdily, že numericky zjišťovaná mřížková dimenze se nedá použít pro tuto úlohu. Použil jsem jak standardní mřížkovou dimenzi, tak i moje vylepšení. V této práci jsem uvedl pro názornost jen jedno měření, protože výsledky ostatních měření byly velmi podobné výsledkům z měření pro standardní mřížkovou dimenzi pro přesněji vypočítanou množinu.



Obrázek 36 *Rastrová verze Mandelbrotovy množiny použitá pro měření*



Obrázek 37 *Log-log graf měření dimenze Mandelbrotovy množiny z rastrového obrázku.*

V grafu na obrázku 37 je vidět, že pomocí použití metody „váha 1“ a „váha 2“ se povedlo data pro výpočet směrnice trochu vyhladit, stejně jako to bylo pro jednodušší fraktály. Tím se zpřesnil výpočet dimenze pomocí lineární regrese, nicméně k číslu 2 má dimenze daleko.

Při měření dimenze hranice Mandelbrotovy množiny jsem tedy nedospěl k očekávaným výsledkům.

$\log s$	$\log N_0(s)$	$\log N_1(s)$	$\log N_2(s)$
0,7959	1,2788	1,4771	1,5051
0,8928	1,4150	1,5911	1,6128
0,9897	1,5315	1,6990	1,7324
1,0866	1,6532	1,8325	1,8573
1,1835	1,7782	1,9685	1,9868
1,2804	1,9542	2,1072	2,1492
1,3773	2,1038	2,2529	2,2718
1,4743	2,2504	2,4014	2,4200
1,5712	2,3636	2,5132	2,5276
1,6681	2,4871	2,6415	2,6628
1,7650	2,6180	2,7731	2,7980
1,8619	2,7566	2,9079	2,9315
1,9588	2,8814	3,0366	3,0607
2,0557	3,0056	3,1581	3,1864
2,1526	3,1364	3,2896	3,3172
2,2495	3,2617	3,4125	3,4595
2,3464	3,3809	3,5378	3,5776
2,4434	3,5013	3,6488	3,7110
2,5403	3,6215	3,7629	3,8077
2,6372	3,7467	3,9049	3,9738
2,7341	3,8618	4,0456	4,0456
2,8310	3,9811	4,0977	4,2822
2,9279	4,1083	4,1212	4,4094
3,0248	4,1216	4,4227	4,4227
směrnice	1,3173	1,3358	1,3468

Tabulka 12 *Hodnoty pro výpočet mřížkové dimenze hranice Mandelbrotovy množiny z rastrové verze*

5. Programy

Pro svou práci jsem potřeboval vytvořit programy vhodné pro průzkum fraktálů. Na internetu se se samozřejmě nachází řada programů s tímto zaměřením, ale ty buď nevyhovovaly mým potřebám nebo jsem jsem si chtěl vyzkoušet, jak to udělat po svém. Vytvořil jsem tři programy, jejichž vlastnosti a používání je popsáno v následujících podkapitolách.

5.1. Program pro generování Mandelbrotovy a Juliových množin

Tento program slouží pro generování a průzkum Mandelbrotovy množiny a Juliových množin. Je napsán v Borland C++ Builderu 6.0 a funguje pouze pro operační systém Windows. Jazyk C++ jsem zvolil hlavně kvůli jeho rychlosti, která je pro tento typ úloh důležitá. Program je vytvořen jako vícevláknová aplikace a při výpočtu tedy dovoluje provádět i další činnosti jako například současné generovaní Juliovy množiny nebo průzkum iteračních posloupností. Při návrhu programu jsem věnoval pozornost i jeho budoucí rozšiřitelnosti. Není problém přidat další množiny podobného typu jako je Mandelbrotova nebo změnit grafický výstup pomocí malého zásahu do kódu programu.

Mezi hlavní funkce programu patří:

- generování Mandelbrotovy množiny s exponentem 2, 3 a 4;
- generování příslušných Juliových množin;
- zobrazení iteračních posloupností v komplexní rovině i v absolutních hodnotách;
- jednoduché zvětšování částí množiny;
- přímý výpočet obsazených čtverců pro mřížkovou dimenzi.

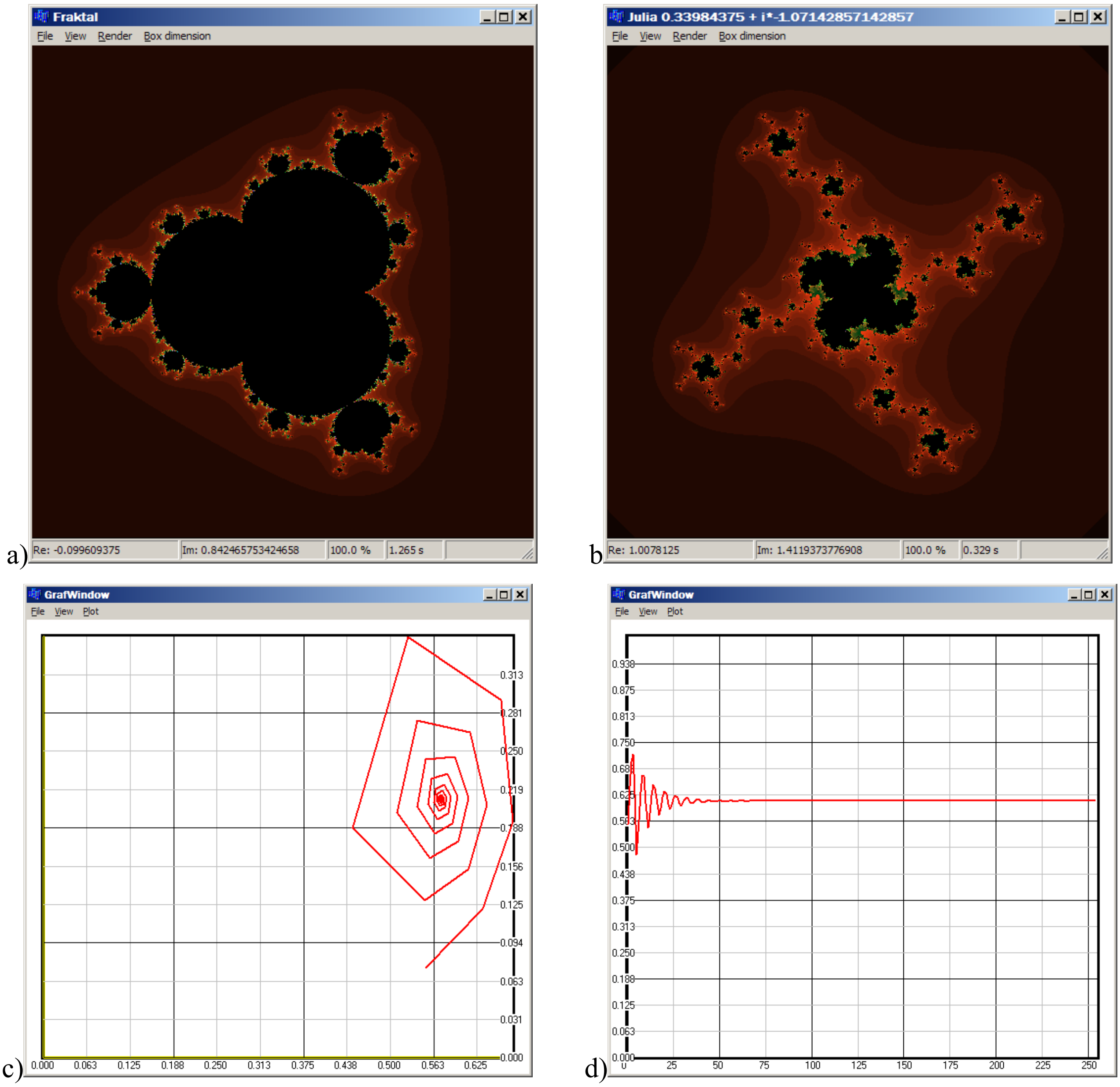
Program jsem se snažil udělat co nejvíce uživatelsky přátelský. Ovládání je velice intuitivní. Stisknutím a podržením levého tlačítka myši lze v okně s Mandelbrotovou či Juliovou množinou nakreslit obdélník, který po uvolnění tlačítka zvětší výřez do celého okna. Kliknutím pravým tlačítkem myši v okně s Mandelbrotovou množinou se zobrazí Juliova množina pro bod, který se nachází pod kurzorem myši (ve spodní části okna se zobrazuje poloha kurzoru v množině). Z menu View lze také přibližovat (Zoom In) nebo oddalovat (Zoom Out) pohled na množinu. Volbou Reset se hlavní okno nastaví do stavu jako při spuštění programu.

V menu Render se vybírá, kterou množinu chceme zobrazit. Na výběr jsou Mandelbrotovy množiny s exponentem 2,3 a 4. Je možné i v hlavním okně zobrazit Juliovy množiny, ale nelze pak zvolit, pro jaký bod je vypočítána. Pro zobrazení Juliovy množiny tedy doporučuji pravé tlačítko myši (viz výše).

Držením klávesy CTRL a současným stiskem levého tlačítka se zobrazí nové okno s grafem iterační posloupnosti pro bod pod kurzorem myši. Zároveň se tato posloupnost zakreslí i do okna s množinou, aby bylo přímo vidět chování a rozsah posloupnosti. Pro smazání těchto čar je možné použít funkci Repaint z menu View. V okně s iterační posloupností si lze pomocí menu Plot zvolit, zda má graf být zobrazen v komplexní rovině nebo jako absolutní hodnoty. V menu View lze určit barvu čáry v grafu, vypnout nebo zapnout popisky grafu a nastavit měřítko pro osy grafu 1:1.

Zkoumáme-li iterační posloupnosti, zjistíme, že pro Mandelbrotovu množinu tyto posloupnosti klesají k nule pouze pro body z největší „bubliny“. Ostatní posloupnosti oscilují a platí, že čím je menší bublina, tím více vrcholů bude mít zobrazený n-úhelník. Bohužel se mi v literatuře nepodařilo najít nějaké podrobnosti o tomto jevu, pouze to, že ostatní tuto skutečnost také zjistili. Tuto vlastnost jsem zjistil nezávisle na ostatních právě díky tomu, že jsem nechal program vykreslovat iterační posloupnosti do komplexní roviny.

Program také obsahuje možnost zjištění obsazených čtverců pro měření mřížkové dimenze. V menu Box Dimension se zvolí Count. V novém okně lze nastavit velikost čtverce mřížky v pixelech. Po stisku tlačítka RUN se zobrazí počet obsazených čtverců (X), celkový počet čtverců mřížky (N) a velikost čtverce mřížky v měřítku množiny. Hodnoty získané pomocí této funkce mají pouze orientační charakter. Pro přesné měření Mandelbrotovy množiny a Juliových množin jsem vytvořil speciální program.



Obrázek 38 *Program pro zobrazení a průzkum Mandelbrotovy množiny a Juliových množin. a) Mandelbrotova množina s exponentem 4; b) Juliova množina s exponentem 4; c) posloupnost iterací zobrazená v komplexní rovině; d) posloupnost iterací zobrazená v absolutní hodnotě.*

5.2. Program pro měření mřížkové dimenze Mandelbrotovy množiny

Tento program napsaný v C++ vypočítá mřížkovou dimenzi úsečky, kružnice, čtverce, hranice čtverce, Mandelbrotovy množiny a Juliových množin. Jeho výstupem je tabulka obsahující velikost mřížky a odpovídající počet obsazených čtverců, dále bitmapový obrázek množiny a soubor obsahující souřadnice obsazených čtverců.

Na vstupu programu se zadávají následující hodnoty:

- Typ množiny (úsečka, kružnice, čtverec, hranice čtverce, Mandelbrotova množina a Juliovy množiny);
- Parametry zvolené množiny (počet iterací, poloměr kružnice apod.);
- Jemnost mřížky pro nalezení hranice množiny – tzn. na kolik menších čtverečků rozdělit buňku základní mřížky, běžná hodnota je v intervalu 5 až 30. Při zadání větších čísel pak program pracuje velmi dlouho.
- Počáteční velikost buňky mřížky – tzn. velikost buňky mřížky, se kterou program začne pracovat, v kapitole o mřížkové dimenzi je uvedeno, že nemá smysl volit větší hodnoty než 0,25.
- Konečná velikost buňky mřížky – tzn. velikost mřížky, kdy program skončí;
- Krok zjemnění mřížky – koeficient pro zjemňování mřížky (např. 0.5 znamená, že následující mřížka bude dvakrát jemnější);

Algoritmus:

Program obsahuje několik funkcí, které zjistí, zda bod patří nebo nepatří do dané množiny. Příklad jedné z těchto funkcí:

```
bool test_circle(double x,double y,double r)
{

  if ((x*x+y*y-r*r)<=0)
    return true;
   else
    return false;

}
```

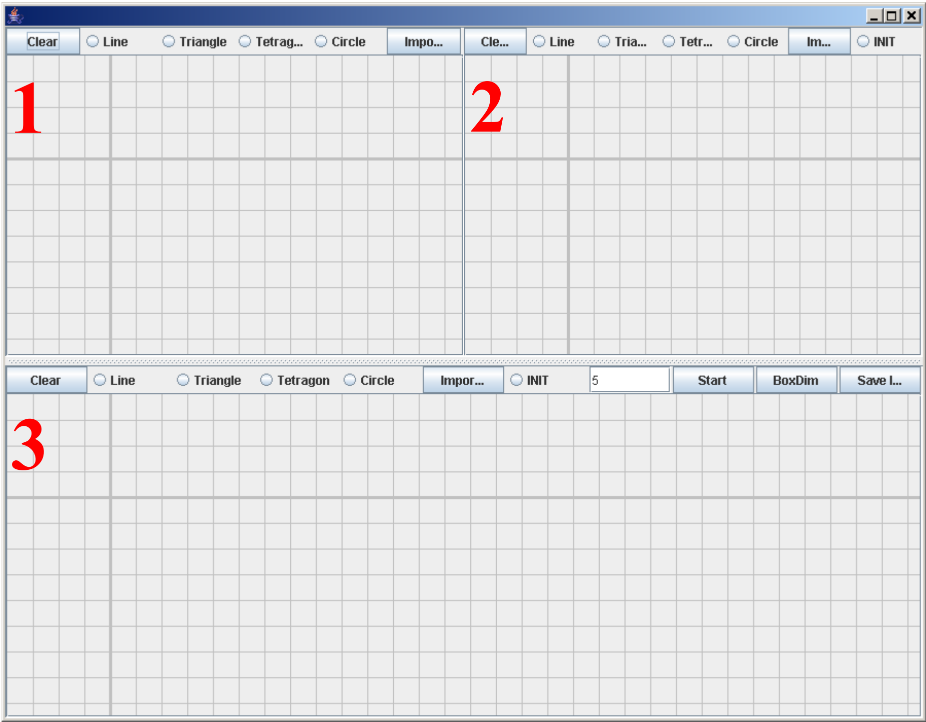
Další důležitou funkcí je funkce `test_box`, která rozhoduje, zda čtvercem prochází hranice. Do proměnných `outside` a `inside` zapíšeme hodnotu `false`. Funkce pak prochází čtverec mřížky (o velikosti `size`) po kroku z jemnější mřížky (proměnná `step`). Funkce `test_mandel` vrací, zda bod patří či nepatří do množiny. Pokud se stane, že v tomto čtverci nějaký bod patřil do množiny (proměnná `inside` bude `true`) a zároveň tam nějaký nepatřil (proměnná `outside` bude `true`), pak se to proměnné `end` uloží `true`, což znamená, že tento čtverec obsahuje hranici množiny. V ostatních případech bude `end` rovno `false`. Moje implementace této funkce:

```
bool test_box(double x0,double y0,double step,double
              size,int iter,int type)
{
  double y = y0;
  bool end = false;
  bool outside = false;
  bool inside = false;

  do
  {
    double x=x0;
    do
    {         //test pro Mandelbrotovu mnozinu.
      bool test = test_mandel2(x,y,iter);
      if (test) inside = true;
      else outside = true;
      x+=step;
        end = (inside && outside);
    } while ((!end) && (x<(x0+size)));
    y+=step;
  } while ((!end) && (y<(y0+size)));
  return end;
}
```

Poslední důležitou funkcí, je funkce, která rozdělí plochu na mřížku podle zadání. Pro každý čtverec z mřížky zavolá funkci `test_box`. Pokud `test_box` vrátí `true`, zvýší se hodnota `N`, která znamená počet započtených čtverců. Pro každý čtverec zároveň zapíše pixel do výstupního obrázku a souřadnice obsazeného čtverce do výstupního textového souboru. Výstupní data program nijak nezpracovává, a proto je třeba použít nějakého tabulkového editoru.

5.3. Program pro generování IFS fraktálů a měření jejich dimenze

Program pro generování IFS fraktálů a měření jejich dimenze bylo nejsložitější vytvořit. Rozhodl jsem se vytvořit tento program v programovacím jazyce Java, a to z několika důvodů. V Javě se lehce vytvářejí programy s grafickým rozhraním, s verzí Javy 1.5 pracují velmi rychle a hlavně programy v Javě mohou být použity na různých operačních systémech. Chtěl jsem vytvořit program, který by byl použitelný jak ve Windows, tak i v Linuxu a Mac OS. Protože s programováním pro tyto operační systémy nemám zkušenost, tak jsem zvolil právě Javu.



Obrázek 39 *Hlavní okno programu pro generování IFS fraktálů a měření jejich dimenze.*

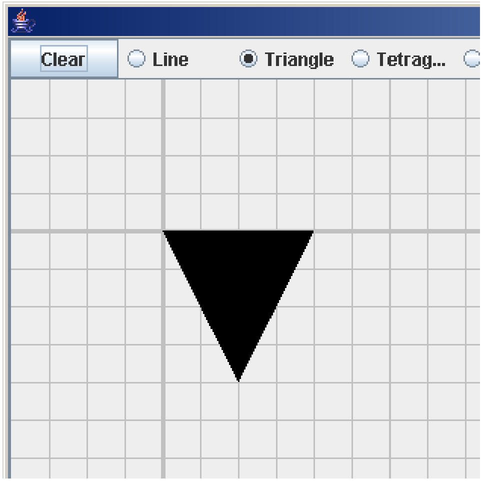
Jak je vidět na obrázku 39, hlavní okno programu je rozděleno na 3 části. Do části označené číslem 1 se nakreslí takzvaný **iniciátor** (anglicky initiator), do části s číslem 2 **generátor** (anglicky generator) a do poslední části okna vložíme podle libosti jeden nebo několik iniciátorů, podle toho, jak chceme, aby výsledný fraktál vypadal. Program pracuje tak, že v každém kroku iniciátor nahradí generátorem. Proto je nutné, aby se generátor skládal hlavně z iniciátorů, aby se dalo pokračovat do další iterace. Jednotlivé kroky nyní popíši podrobně.

Kreslení iniciátoru

Do části okna označené jako 1 se kreslí iniciátor. Z horní nabídky se vybere obrazec, který chceme vložit. Možnosti jsou úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník a kružnice. Tyto útvary se vloží tak, že se do okna nakliká na požadované pozice potřebný počet bodů. Zvolený útvar se objeví až po vložení posledního bodu. Takže například pro vložení čtyřúhelníku je třeba kliknout čtyřikrát na požadované pozice, pak se teprve útvar zobrazí. Aby bylo možné kreslit útvary přesně, tak jsem do programu vložil funkci pro automatické přichytávání k mřížce a k ostatním tvarům. Při pokusu o vložení bodu v blízkosti mřížky a zároveň v blízkosti dalšího objektu má přednost objekt před mřížkou. Počet útvarů v iniciátoru není nijak omezen.

Kromě těchto základních objektů je možné pomocí tlačítka „Import IMG“ vložit i rastrový obrázek ve formátu PNG. Soubor PNG musí mít barevnou hloubku 24 bitů. Program sám provede převod na 1 bitovou hloubku. Jako body množiny jsou považovány všechny pixely z obrázku, které mají alespoň jednu ze složek RGB menší než 128, tzn. pro import obrázku je vhodné mít na bílém pozadí množinu nakreslenou černě. Není vhodné importovat veliké obrázky, protože po několika iteracích počet bodů uložených v paměti prudce roste a může dojít k nedostatku paměti.

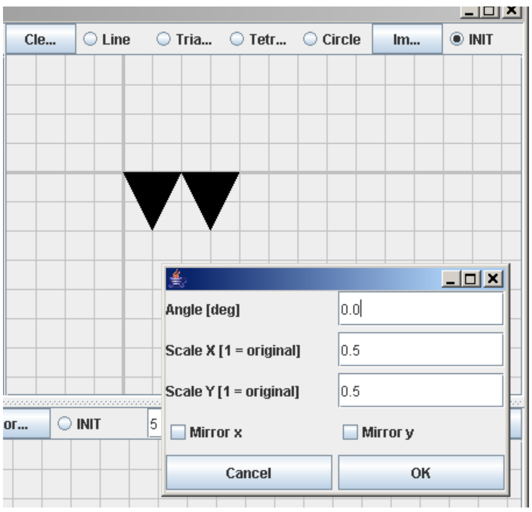
V horní nabídce se ještě nachází tlačítko „Clear“, které vymaže veškeré vložené útvary z iniciátoru.



Obrázek 40 *Kreslení iniciátoru*

Kreslení generátoru

Do pravé horní části okna se kreslí generátor. Postup vkládání objektů je stejný jako pro iniciátor, ale takto vložené objekty neslouží pro iterace, ale jen jako doplňkové objekty, a nemají pro fraktál moc význam. Důležitá je ale nová volba „INIT“. Označíme-li tuto volbu, pak lze na místo, kam klikneme myší, vložit iniciátor nakreslený ve vedlejší části okna. Za střed iniciátoru se považuje průsečík tlustých čar mřížky, takže na místě kliknutí myší bude tento střed. Pokud bude iniciátor trojúhelník jako na obrázku 40, pak na místě kliknutí bude levý horní roh tohoto trojúhelníku.



Obrázek 41 *Kreslení generátoru*

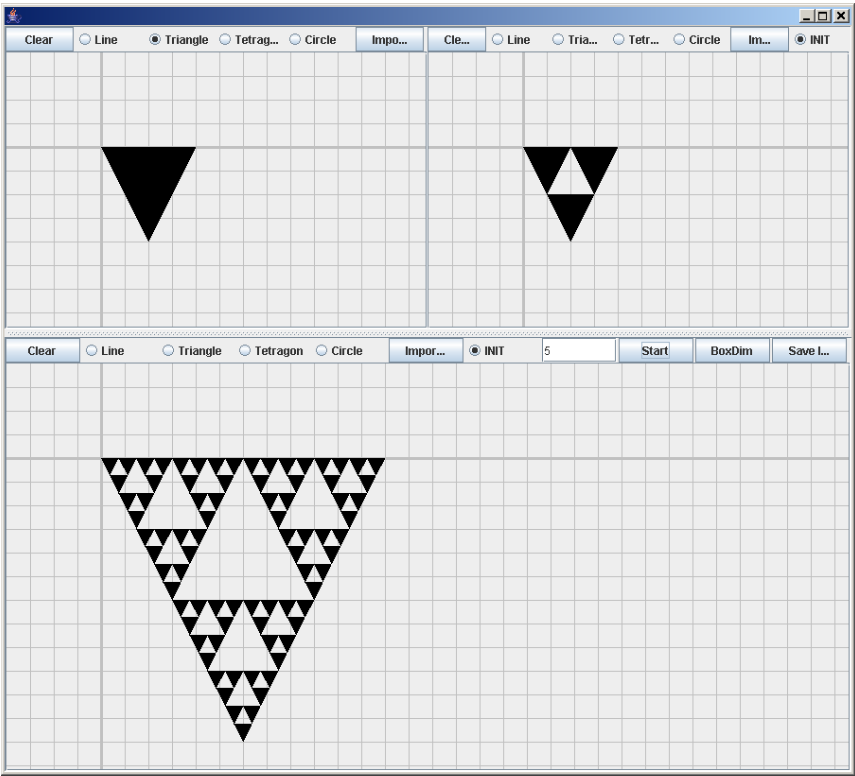
Po kliknutí se objeví nové okno s parametry pro iniciátor. Zde zvolíme požadované transformace, které chceme provést s iniciátorem. Lze měnit měřítko v ose *x* (Scale X) a v ose *y* (Scale Y), úhel otočení (Angle) a zvolit zrcadlení v ose *x* (Mirror x) a *y* (Mirror y). Příklad pro Sierpińského trojúhelník je na obrázku 41. Zde je třeba vložit iniciátor třikrát s měřítkem v obou osách 1/2.

Generátor obvykle obsahuje pouze různě transformované iniciátory, aby bylo možné provádět iterace.

Kreslení a generování fraktálu

Do třetí části okna se stejným postupem jako pro generátor vloží jeden nebo několik vhodně transformovaných iniciátorů. Často postačí pouze vložit jeden iniciátor, například s měřítkem 5, aby fraktál nebyl moc malý.

V horní nabídce se do pole vedle tlačítka „Start" zadá požadovaný počet iterací a tímto tlačítkem se pak generování spustí. Počet možný počet iterací závisí na volné paměti počítače a složitosti fraktálu. Z mých zkušeností vyplývá, že 9 iterací je dostačujících pro většinu množin. Rychlost iterací je velmi velká a i pro složitější fraktály se pohybuje v jednotkách sekund. Pokud chceme změnit počet iterací, není třeba použít tlačítko „Clear" a objekt znovu nakreslit, ale stačí pouze změnit číslo v poli a stisknout „Start". Výsledný obrázek lze uložit do souboru pomocí tlačítka „Save Img". Formát takto uloženého obrázku je PNG (uložený obrázek neobsahuje mřížku).



Obrázek 42 *Okno programu po správném zadání Sierpińského trojúhelníku*

Měření mřížkové dimenze

Po vygenerování požadovaného počtu iterací lze přímo v programu vytvořit soubor s hodnotami pro zjištění mřížkové dimenze. Stiskem tlačítka „BoxDim" se otevře nové okno s parametry pro mřížkovou dimenzi, obrázek 43.

Parametr Start znamená, s jak velkým čtvercem mřížky se začne. Hodnota rovna 1 odpovídá šířce celého fraktálu. Například zadáním 0,1 se začne s deseti čtverci na šířku množiny. Parametr End udává, při jaké velikosti čtverce mřížky skončit s měřením. Parametr Step udává, jaká bude velikost čtverce v dalším kroku měření. Zadaná hodnota musí být menší než 1. Zadáním například hodnoty 0,7 se určí, že velikost čtverce v následujícím kroku bude 7/10 velikosti současného čtverce. Posledním parametrem je Type, neboli způsob počítání obsazených čtverců. Lze zvolit hodnotu 1,2,3,4 nebo 5. Tato čísla mají následující význam:

- **1** – odpovídá standardní mřížkové dimenzi
- **2** – program spočítá počty bodů v jednotlivých čtvercích mřížky, najde maximální hodnotu a pak každý čtverec, který obsahuje více bodů než 1/2 maxima, bude započítán dvakrát.
- **3** – program najde maximum jako v předchozím bodě. Čtverce s více body než 1/3 maxima budou započítány dvakrát a čtverce s více body než 2/3 maxima budou započítány třikrát. Metody 2 a 3 se mi neosvědčily.
- **4** – odpovídá postupu „váha 1“. Program najde průměrný počet bodů v buňkách mřížky a čtverce s více body než je průměr budou započítány dvakrát.
- **5** – odpovídá postupu „váha 2“. Program najde průměrný počet bodů v buňkách mřížky a čtverce s více body než je 1/2 průměru budou započítány dvakrát. čtverce s více body než je průměr budou započítány třikrát.

Obrázek 43 *Parametry mřížkové dimenze*

Poslední parametr udává jméno souboru, kam se data uloží. Formát souboru je CSV, neboli středníkem oddělená čísla. První číslo udává velikost měřítka a druhé počet obsazených čtverců. Tento soubor lze přímo importovat do tabulkových editorů jako je OpenOffice Calc nebo Microsoft Excel.

6. Závěr

Cílem mé práce bylo seznámit se s fraktály, fraktální dimenzí a dalšími pojmy fraktální geometrie. Snažil jsem se vytvořit dílo, které popisuje fraktální dimenzi jak z teoretického pohledu, tak i možnosti jejího numerického výpočtu. Získané informace jsem se snažil podat co nejsrozumitelněji a hlavně v českém jazyce, neboť české literatury na toto téma je velmi málo.

Nejprve jsem definoval základní pojmy fraktální geometrie a uvedl některé důležité typy fraktálních množin, které ve své práci používám v příkladech pro výpočet dimenze.

Kapitola o Hausdorffově dimenzi se snaží přiblížit teoretický základ pro měření fraktální dimenze. Nejprve jsem definoval základní pojmy a následně definoval a popsal Hausdorffovu míru. Uvedl jsem mnoho jejich důležitých vlastností ve formě vět s důkazy, protože důkazy jsou většinou velmi názorné a pomáhají pochopit princip dimenze. Některé věty jsem dokázal sám (například věty 4, 5, 6, 11), ale následně překontroloval podle dostupné literatury (hlavně podle [8]). Výpočet Hausdorffovy dimenze je velmi obtížný, a proto jsem uvedl i mnoho příkladů výpočtů, které jsou podle mého výstižnější než několik stran vysvětlování.

Dalším druhem dimenze, kterou jsem se ve své práci zabýval, je dimenze mřížková. Tuto dimenzi jsem definoval a opět uvedl její důležité vlastnosti a uvedl jsem vztah mezi touto dimenzí a dimenzí Hausdorffovou. I pro mřížkovou dimenzi jsem uvedl mnoho příkladů jejího výpočtu.

Důležitou částí jsou praktická měření, pomocí kterých jsem se snažil zjistit přesnost mřížkové dimenze počítané numericky a tento výpočet dále zpřesnit. Navrhl jsem jednoduchou metodu pro zpřesnění. Měření jsem prováděl nejprve na jednoduchých množinách, kde výsledek odpovídal očekávání, i když v některých případech byla chyba znatelná. Pomocí mojí metody se výsledek zlepšil (tzn. chyba se snížila) v některých případech i více než desetkrát. Podobná zlepšení jsem zaznamenal i v případě IFS fraktálů (Kochova křivka, Sierpińského trojúhelník atd.). Zde se také výsledek zlepšil.

Měření dimenze hranice Mandelbrotovy množiny naopak nedopadlo vůbec podle očekávání a výsledek se značně měnil podle parametrů výpočtu množiny. Avšak ani v jednom případě se neblížil hodnotě 2, což je Hausdorffova dimenze hranice Mandelbrotovy množiny. V odborné literatuře jsem nenašel důkaz, zda se mřížková dimenze pro tento případ rovná dimenzi Hausdorffově (což byl také důvod, proč jsem se o to pokoušel). Z měření tedy vyplynulo, že se tyto dimenze zřejmě nerovnají. Je ovšem také možné, že množina nebyla vygenerována dostatečně jemně. Tato možnost se mi jeví ale jako méně pravděpodobná, protože i při zvyšování počtu iterací a jemnosti se výsledky chovaly „náhodně".

Pro svou práci jsem vytvořil tři programy, u kterých jsem kladl důraz nejen na co nejlepší funkčnost, ale také na jednoduchost ovládání. V programu IFS dokáže svůj vlastní fraktál vytvořit i člověk, který se fraktální geometrii nevěnuje. Pomocí programu pro průzkum Mandelbrotovy množiny, který přímo zobrazuje iterační posloupnosti, se mi podařila zjistit zajímavá vlastnost o oscilaci těchto posloupností popsaná v kapitole 2.5.

Svou prací jsem se snažil přinést alespoň něco málo k rozvoji fraktální geometrie a měření fraktální dimenze.

7. Literatura

[1] Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.: "Chaos and Fractals: New Frontiers of Science", Springer-Verlag, New York, 1992

[2] Peitgen H.-O., Richter P. H.: "The Beauty of Fractals", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986.

[3] Barnsley M. F.: "Fractals Everywhere", Academic Press Inc., San Diego, 1988.

[4] Bochníček M., Nežádal M., Zmeškal O.: "Numeric Calculation of Fractal Dimension", http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/

[5] Bochníček M., Nežádal M., Zmeškal O.: "The Box-counting: Critical Study", http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/

[6] Shishikura M.: "The Boundary of the Mandelbrot Set has Hausdorff Dimension Two.", Astérisque, No. 222, 7, 389-405, 1994

[7] Elert G.: "The Chaos Textbook", http://www.hypertextbook.com/chaos

[8] Falconer K.: "Fractal Geometry", John Wiley & Sons, 2003

[9] Edgar G.: "Measure, Topology and Fractal Geometry", Springer-Verlag, Berlin, 1989

[10] Barrallo J.: "Fractal Geometry", Anaya Multimedia, Madrid, 1992.

[11] Wikipedia : "Turtle graphics", http://en.wikipedia.org/wiki/Turtle_graphics

[12] Hong M.: "Fractal Image Compression", http://www.cs.ualberta.ca/~minghong/

[13] Weisstein E. W.: "Self-Similarity", http://mathworld.wolfram.com/Self-Similarity.html

[14] Petyovský P., Tišnovský P.: http://www.elektrorevue.cz/clanky/03019/index.htm, http://www.elektrorevue.cz/clanky/01040/index.htm

[15] Foroutan-pour K., Dutilleul P., Smith D.L.: "Advances in the implementation of the box-counting method of fractal dimension estimation", Applied Mathematics and Computation 105, 1999

[16] Huang Y., Gu Y., Wang S.: "How to get reliable fractal dimension by box-counting", Peking University, 1996

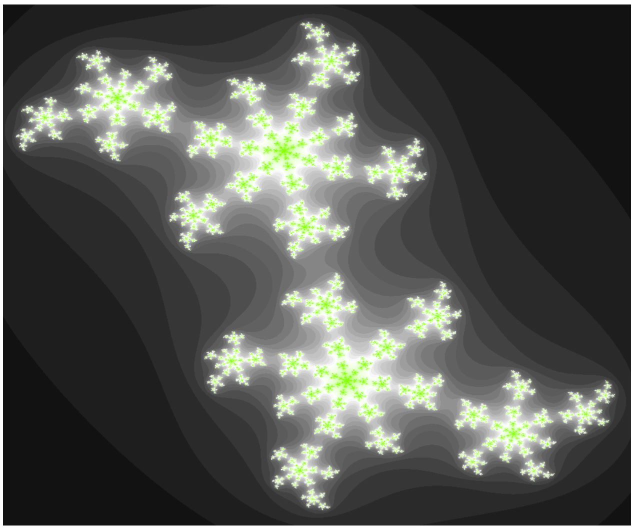
[17] Mandelbrot B.B.: "The fractal geometry of Nature", W.H. Freeman and Company, New York, 1983

[18] Mandelbrot, B. B.: "Fractals: Form, Chance, & Dimension", San Francisco, CA: W. H. Freeman, 1977

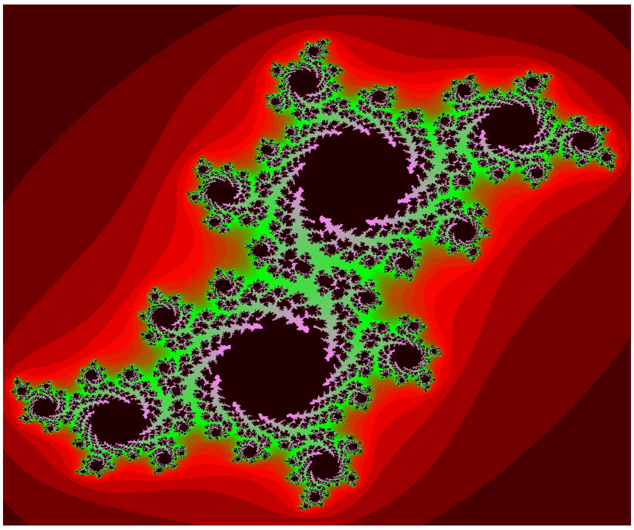
[19] Douady, A.: "Julia Sets and the Mandelbrot Set", Springer-Verlag, Berlin, 1986.

8. Přílohy

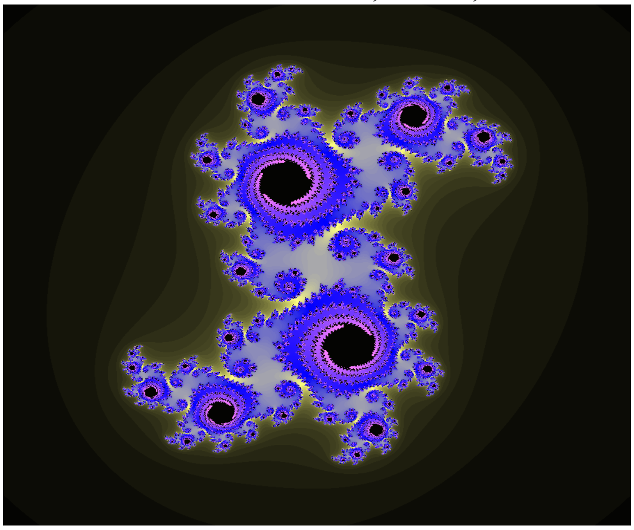
Ukázky výstupů z mých programů:



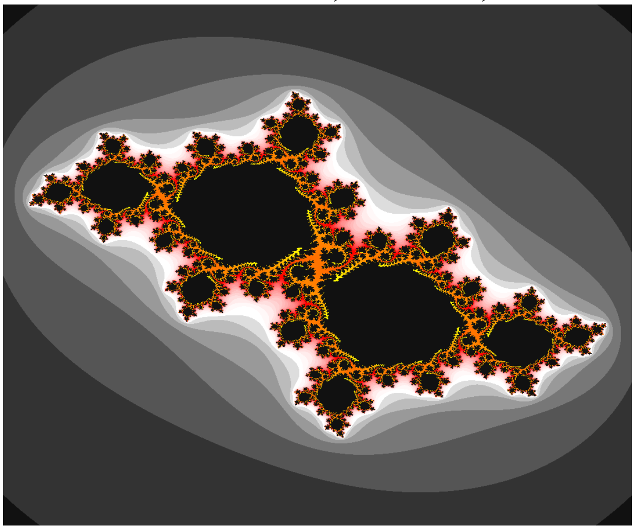
Juliova množina $c=0{,}156-0{,}672i$



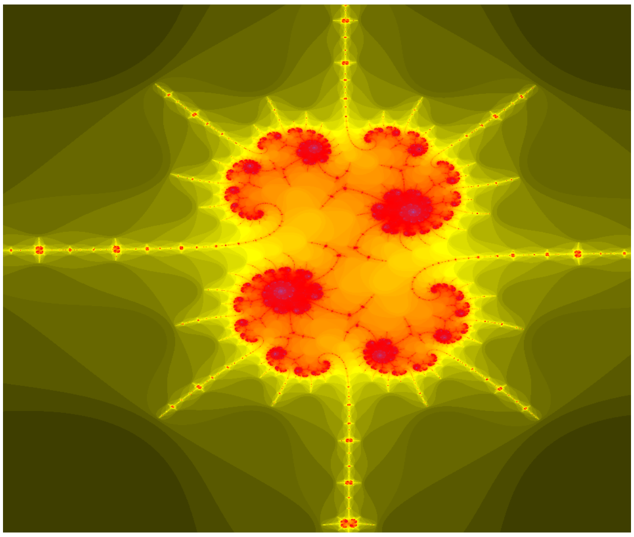
Juliova množina $c=0{,}060124-0{,}62422i$



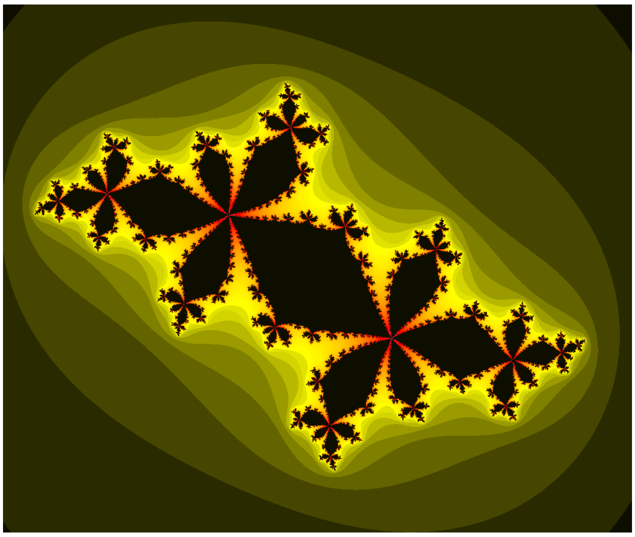
Juliova množina $c=0{,}363443+0.31565i$



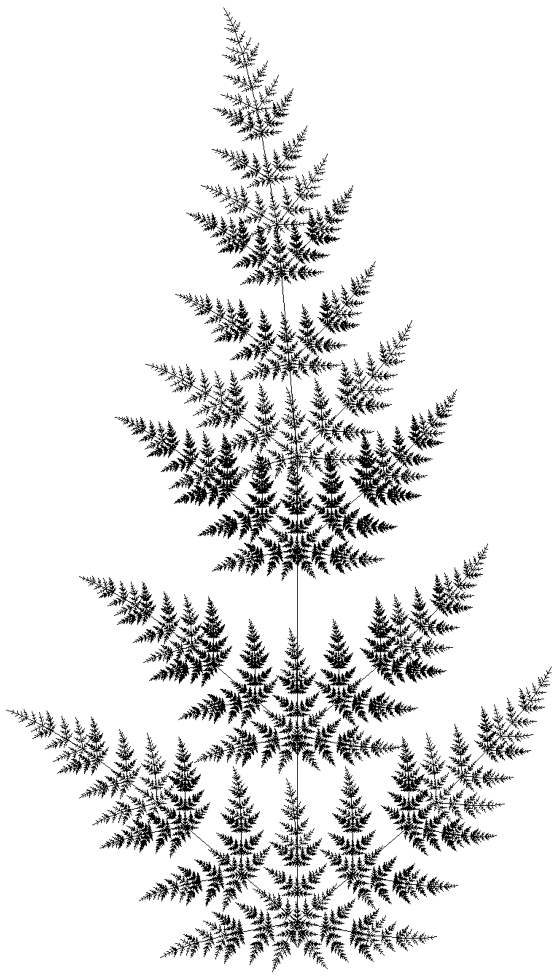
Juliova množina $c=-0.401606-0.5819i$



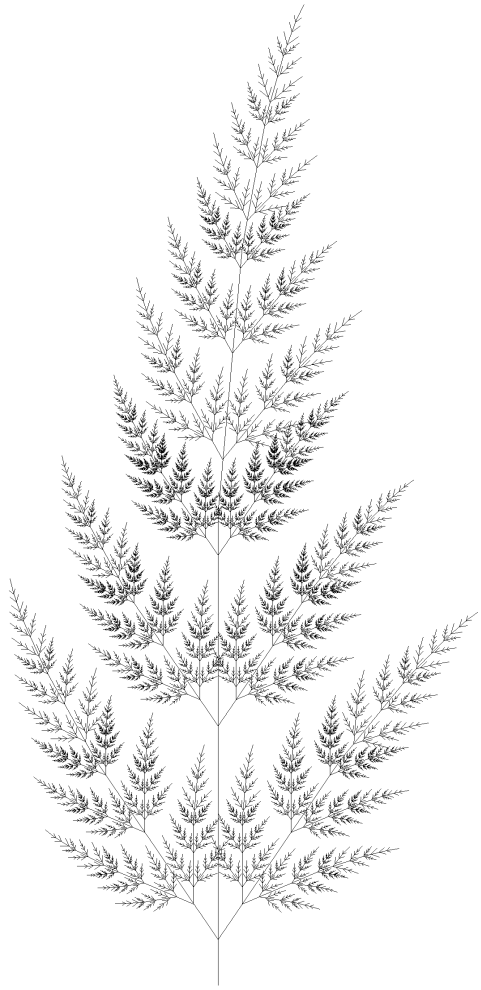
Juliova množina $c=-1.74774+0.0009819i$



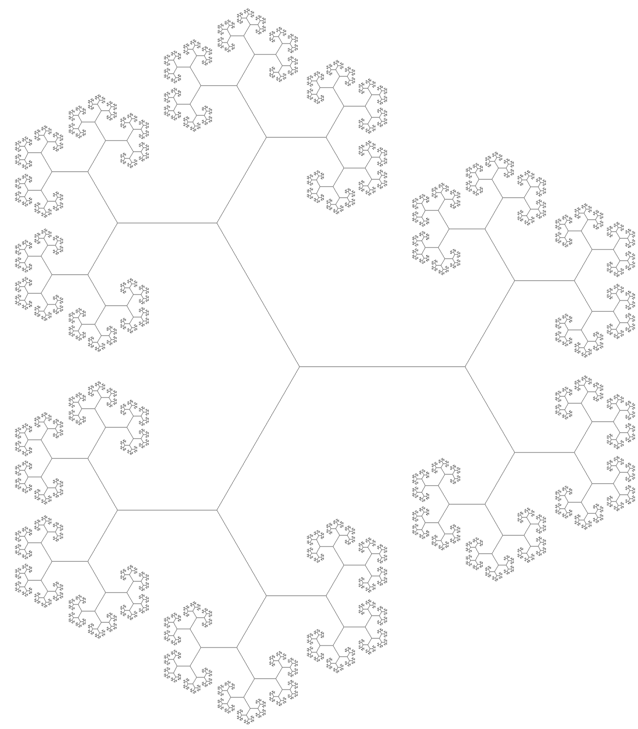
Juliova množina $c=-0.505+0.565i$



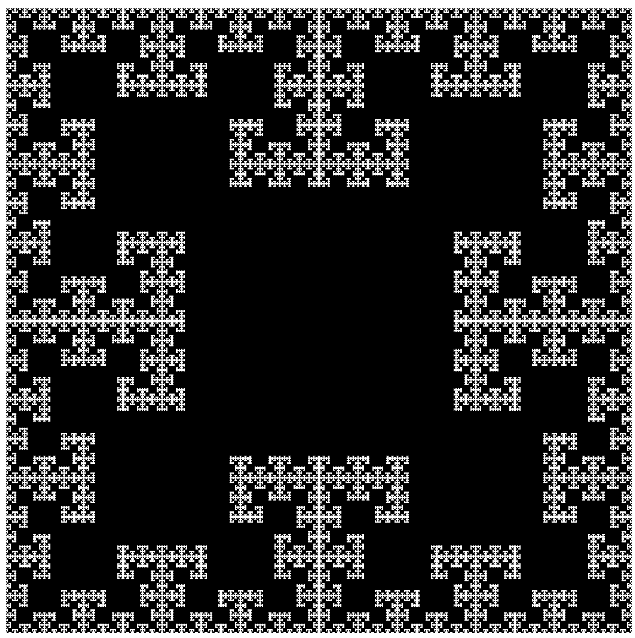
IFS kapradí



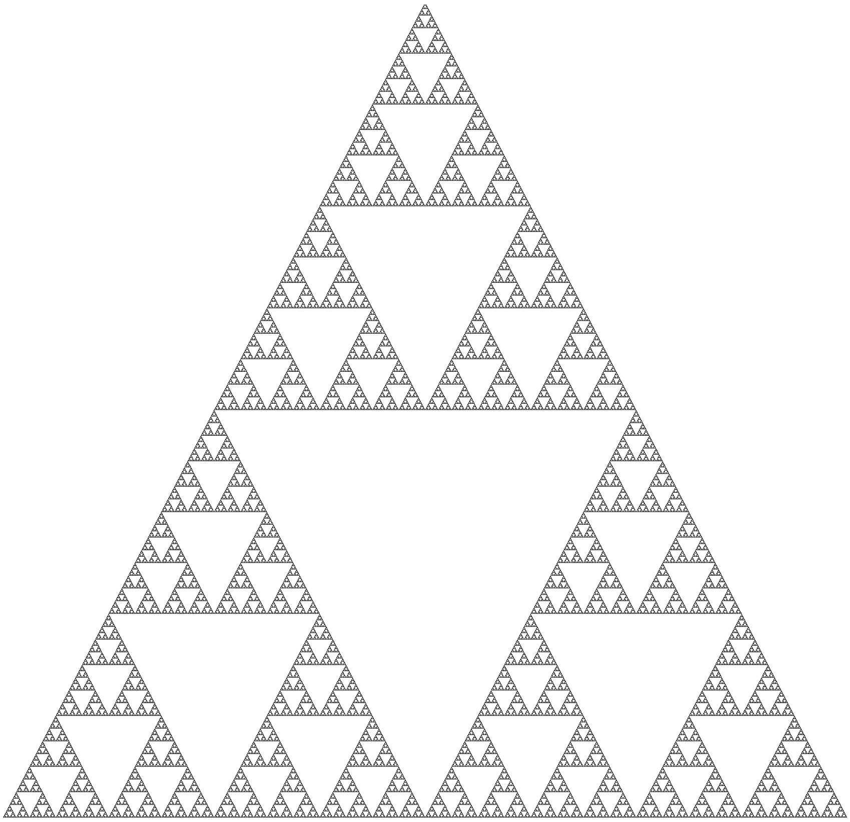
IFS kapradí



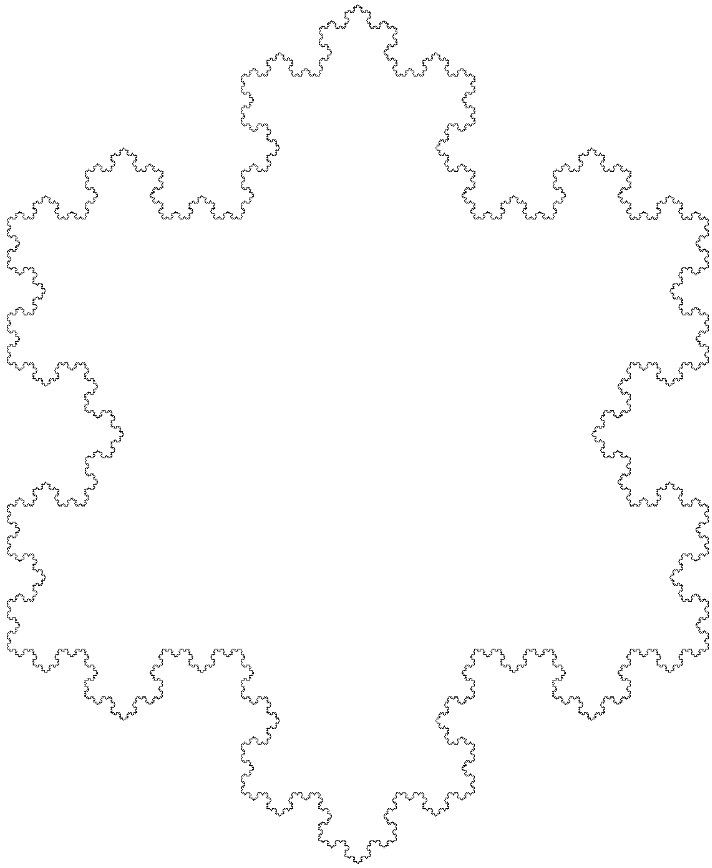
IFS květák



IFS koberec



Sierpińského trojúhelník



Kochova vločka