Verze z 17. května 2018.

Úvodní poznámka

Tato sbírka byla sepsána se záměrem vytvořit seznam výpočetních postupů a triků pro řešení úloh, které se probírají ve druhém semestru kurzu matematické analýzy. Seznam, v němž s devadesátiprocentní pravděpodobností naleznete nějakou myšlenku, která se dá přímo použít k řešení zvoleného příkladu ze sbírek [1], [3] a [5], se kterým si nevíte rady. Na cvičeních obsažených v tomto textu si potom můžete ověřit, že prezentované postupy dokážete použít.

Tato sbírka nepochybně obsahuje chyby. Každému, kdo mě na nějakou chybu jako první upozorní, rád přidělím nějaké množství bodů (podle typu chyby), na základě kterých rozhoduji o udělení zápočtu.

Ondřej Pártl

Obsah

Kapitola 1

Uzavření zimního semestru

1.1 Věty o přírůstku funkce

Věta 1.1.1. Rolleova věta

Nechť reálná funkce reálné proměnné f splňuje následující podmínky:

1. f je definovaná a spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$;
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b);
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí $f'(c) = 0$.

Věta 1.1.2. Lagrangeova věta

Nechť reálná funkce reálné proměnné f splňuje následující podmínky:

1. f je definovaná a spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$;
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 1.1.3. Cauchyova věta

Nechť reálné funkce reálné proměnné f a g splňují následující podmínky:

1. f a g jsou definované a spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$;
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b);
3. g má v každém bodě intervalu (a, b) nenulovou derivaci;

Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Příklad 1.1.4. Dokažte, že všechny kořeny derivace polynomu $p(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ jsou reálné a nalezněte navzájem disjunktní intervaly takové, že každý z nich obsahuje právě jeden kořen této derivace.

Pokud na zadanou funkci p a intervaly $\langle 0,1\rangle$, $\langle 1,2\rangle$, $\langle 2,3\rangle$ a $\langle 3,4\rangle$ použijeme Rolleovu větu (věta 1.1.1), zjistíme, že každý z intervalů $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ a $(3,4)$ obsahuje nějaký kořen polynomu p'. Protože tyto intervaly jsou čtyři a polynom p' má stupeň také čtyři (neboť p má stupeň pět), jsou všechny kořeny polynomu p' reálné a $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ a $(3,4)$ jsou hledanými intervaly.

Příklad 1.1.5. Dokažte, že pokud funkce f je diferencovatelná, ale není omezená na omezeném intervalu (a,b), potom ani její derivace f' není omezená na (a,b).

Tvrzení dokážeme v následující ekvivalentní podobě: Pokud f' existuje v každém bodě omezeného intervalu (a,b) a je na tomto intervalu omezená, potom i f je na (a,b) omezená.

Budeme tedy předpokládat, že existuje konstanta $L \in \mathbb{R}^+$ taková, že pro všechna $x \in (a,b)$ platí $|f'(x)| \leq L$, a nalezneme konstantu $K \in \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x \in (a,b)$ vztah $|f(x)| \leq K$. Pro tento účel definujme pomocnou konstantu $y = \frac{a+b}{2}$ a pro každé $x \in (a,b)$ různé od y následujícím způsobem odhadněme číslo $|f(x)|$:

$$|f(x)| = |f(x) - f(y) + f(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y)| \overset{\text{věta } 1.1.2}{=} \left| f'(c) \right| |x-y| + |f(y)| \leq L\,|b-a| + |f(y)|\,,$$

kde $c \in (a,b)$. Protože předchozí soustava nerovností platí pro $x < y$ i pro $x > y$ a výsledná nerovnost

$$|f(x)| \leq L\,|b-a| + |f(y)|$$

platí dokonce i pro $x = y$, můžeme definovat $K \coloneqq L\,|b-a| + |f(y)|$.

Příklad 1.1.6. Dokažte, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$.

Vidíme, že pro $a = b$ zadaná nerovnost platí. Uvažujme proto případ $a \neq b$ a předpokládejme, že platí například $a < b$. Z Cauchyovy věty (věta 1.1.3) použité na funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x$ dostaneme

$$\frac{\cos c}{1} = \frac{\sin b - \sin a}{b-a} \tag{1.1}$$

pro nějaké $c \in (a,b)$. Protože platí $|\cos c| \leq 1$, plyne z (1.1)

$$\left| \frac{\sin b - \sin a}{b-a} \right| \leq 1, \text{ tedy } |\sin b - \sin a| \leq |b-a|\,.$$

Pro $a > b$ zadanou nerovnost dokážeme analogicky.

Cvičení

Cvičení 1.1.1: Dokažte, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}^+$ splňující nerovnost $a < b$ platí

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

1.2 Stejnoměrná spojitost

Definice 1.2.1. Nechť funkce f je definovaná na intervalu I. Říkáme, že f je na I stejnoměrně spojitá, když platí

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Příklad 1.2.2. Dokažte, že funkce sin je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$.

Podle definice 1.2.1 máme ověřit platnost následujícího výroku:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon).$$

Protože podle příkladu 1.1.6 pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$, stačí pro libovolně zadané $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ volit $\delta = \varepsilon$.

Příklad 1.2.3. Dokažte, že funkce f zadaná předpisem $f(x) = \frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na $(0, 1)$.

Podle definice 1.2.1 máme ověřit platnost následujícího výroku:

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall \delta \in \mathbb{R}^+)(\exists x_1, x_2 \in (0,1)) \left(|x_1 - x_2| < \delta \wedge \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| \geq \varepsilon \right). \tag{1.2}$$

Tipněme si například $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a hledejme zadaná čísla x_1, x_2 pouze mezi těmi, která splňují vztah $x_2 = 2x_1$. Při těchto předpokladech se nerovnosti v poslední závorce výroku (1.2) zjednoduší na $|x_1| < \delta$ a $|x_1| \leq 1$. Odtud vidíme, že pro libovolné $\delta \in \mathbb{R}^+$ můžeme volit například $x_1 = \min\left\{\frac{\delta}{3}, \frac{1}{3}\right\}$, kterému odpovídá $x_2 = \min\left\{\frac{2\delta}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. Tyto hodnoty x_1 a x_2 splňují i podmínku $x_1, x_2 \in (0, 1)$ v předposlední závorce výroku (1.2).

Cvičení

Cvičení 1.2.1: Pomocí vět ze sekce 1.1 dokažte, že funkce f, která má na intervalu (a, b) omezenou derivaci, je na (a, b) stejnoměrně spojitá.

1.3 L'Hospitalovo pravidlo

Věta 1.3.1. L'Hospitalovo pravidlo

Nechť reálné funkce reálné proměnné f a g a bod $b \in \overline{\mathbb{R}}$ splňují

1. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x \to b} |g(x)| = +\infty$;
2. $(\exists H_b)\left(H_b \setminus \{b\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}\right)$;
3. existuje $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Obdobné tvrzení můžeme vyslovit i pro limitu zprava a zleva.

Poznámka 1.3.2. Při výpočtu limit bývá výhodné před použitím L'Hospitalova pravidla zadaný výraz upravit tak, aby se jeho části snadněji derivovaly.

Příklad 1.3.3. Vypočítejte $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(1-x)}$.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(1-x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}{-\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\pi}{2} \frac{x-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\frac{\pi}{2}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = -\infty.$$

Příklad 1.3.4. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1\right)\cdot e}{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}}_{\to e} \cdot \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

Celková limita je tedy $-\frac{e}{2}$.

Příklad 1.3.5. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^p}{e^x}$, $p\in\mathbb{R}^+$ (důležitá referenční limita).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^{\frac{x}{p}}}\right)^p = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{p}}}\right)^p = 0, \text{ neboť } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{p}}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{p}e^{\frac{x}{p}}} = 0.$$

Příklad 1.3.6. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^p x}{x}$, $p\in\mathbb{R}^+$ (důležitá referenční limita).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^p x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{p}}}\right)^p = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{p}}}\right)^p = 0, \text{ neboť } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{p}}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}} = 0.$$

Příklad 1.3.7. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to +0} x^p \ln x$, $p\in\mathbb{R}^+$ (důležitá referenční limita).

$$\lim_{x\to+0} x^p\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-p}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-px^{(-p-1)}} = 0.$$

Příklad 1.3.8. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \frac{1}{\underbrace{\frac{\ln x}{x-1}}_{\to 1}}, \text{ přičemž}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Celková limita je tedy $\frac{1}{2}$.

Příklad 1.3.9. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{tg} x \ln\arcsin x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x\ln\arcsin x}, \text{ přičemž}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln\arcsin x = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}}_{\to 1} \frac{\ln\arcsin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\arcsin x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\arcsin x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{\arcsin x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{2x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 0.$$

Celková limita je tedy $e^0 = 1$.

Příklad 1.3.10. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Zde L'Hospitalovo pravidlo použít nemůžeme, protože výraz $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, který by použitím L'Hospitalova pravidla vznikl, nemá limitu pro $x \to +\infty$. Můžeme ale použít následující postup:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Příklad 1.3.11. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\left(\ln^2 x - x\ln\ln x\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\ln^2 x - x\ln\ln x\right)}, \text{ přičemž}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\ln^2 x - x\ln\ln x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{\frac{\ln^2 x}{x}}_{\to 0 \text{ (př. 1.3.6)}} - \ln\ln x\right) = -\infty.$$

Celková limita je tedy $e^{-\infty} = 0$.

Cvičení

Cvičení 1.3.1: Ověřte, že platí $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{e^{qx}} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^p x}{x^q} = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p \ln^q x = 0$, kde $p, q > 0$ (opět důležité referenční limity).

Kapitola 2

Techniky hledání primitivní funkce

2.1 Úvodní informace

Definice 2.1.1. Nechť funkce f je definovaná na intervalu (a, b), kde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, a nechť funkce F pro všechna $x \in (a, b)$ splňuje $F'(x) = f(x)$. Potom F nazýváme primitivní funkcí k funkci f na (a, b).

Poznámka 2.1.2. Primitivní funkce je určena s přesností na konstantu.

Definice 2.1.3. Množina všech funkcí primitivních k funkci f na intervalu (a, b) se nazývá neurčitým integrálem funkce f a značí se $\int f$ či $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Pojem „vypočítat $\int f$“ znamená najít nějakou funkci $F \in \int f$. Místo $F \in \int f$ se typicky píše $\int f = F$.

Poznámka 2.1.4. Pokud v zadání příkladů nebude uvedeno něco jiného, budeme k zadané funkci f vždy hledat primitivní funkci na všech otevřených intervalech přirozeného definičního oboru funkce f.

Věta 2.1.5. Funkce f definovaná a spojitá na intervalu (a, b) má na tomto intervalu primitivní funkci.

Věta 2.1.6. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b), G je primitivní funkce k funkci g na (a, b) a α je reálné číslo. Potom platí $\int(\alpha f + g) = \alpha F + G$.

Příklad 2.1.7. Dokažte, že primitivní funkce k funkci f, která je lichá na intervalu $(-a, a)$, $a \in \mathbb{R}^+$, je sudá.

Nechť F je funkce primitivní k f na $(-a, a)$. Potom pro funkci φ definovanou vztahem $\varphi(x) = F(x) - F(-x)$ platí $\varphi'(x) = f(x) - (-1) \cdot f(-x) = 0$ (protože $f(-x) = -f(x)$).

Existuje proto konstanta C taková, že platí $\varphi(x) = C$ pro všechna $x \in (-a, a)$. Dosazením $x = 0$ do funkce φ zjistíme, že platí $C = 0$, tedy $F(x) = F(-x)$.

Cvičení

Cvičení 2.1.1: Nechť funkce f je sudá a má primitivní funkci na množině M, kde platí $M = (-a, a)$, $a \in \mathbb{R}^+$, či $M = (-b, -a) \cup (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$. Dokažte, že k f na M existuje primitivní funkce, která je lichá.

2.2 Úvodní příklady na postřeh

Příklad 2.2.1. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^{\frac14}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac14}\right)\mathrm{d}x = \int x^{\frac14}\,\mathrm{d}x - 2\int x^{\frac{5}{12}}\,\mathrm{d}x + \int x^{-\frac14}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac45 x^{\frac54} - \frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac43 x^{\frac34}.\end{aligned}$$

Příklad 2.2.2. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x - \operatorname{arctg} x.$$

Příklad 2.2.3. Vypočítejte $\displaystyle\int x(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int x(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x &= \int (x-1+1)(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x = \int \left[-(1-x)+1\right](1-x)^{10}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \left(-(1-x)^{11}+(1-x)^{10}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(1-x)^{12} - \frac{1}{11}(1-x)^{11}.\end{aligned}$$

Příklad 2.2.4. Vypočítejte $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x.$$

Příklad 2.2.5. Vypočítejte $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac12 x - \frac14\sin(2x),$$

protože $\sin(2x)$ má derivaci $2\cos(2x)$.

Poznámka 2.2.6. Pamatujte si, že platí

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{a} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Příklad 2.2.7. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac12 \frac{1}{1+\frac32 x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac12 \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt3}{\sqrt2}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac12\sqrt{\frac23}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac32}x\right),$$

protože derivace $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac32}x\right)$ je $\sqrt{\frac32}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac32}x\right)^2}$.

Příklad 2.2.8. Vypočítejte $\displaystyle\int \sin(3x)\sin(5x)\,\mathrm{d}x$.

Použitím vzorce $\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ získáme

$$\int \sin(3x)\sin(5x)\,\mathrm{d}x = -\frac12\int\left(\cos(8x)-\cos(2x)\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\sin(8x) + \frac14\sin(2x).$$

2.3 Integrace pomocí rozdělení definičního oboru funkce na části

Příklad 2.3.1. Vypočítejte $\displaystyle\int |x| \, \mathrm{d}x$.

Pokud se při výpočtu integrálu omezíme pouze na $x \in \mathbb{R}^+$ nebo $x \in \mathbb{R}^-$, dostaneme jednoduchý tabulkový integrál. Na $\mathbb{R}^\pm$ platí

$$\int |x| \, \mathrm{d}x = \pm \int x \, \mathrm{d}x = \pm \frac{1}{2} x^2 + C_\pm,$$

kde C_+ a C_- jsou reálné konstanty, které si můžeme libovolně zvolit. Integrací jsme tedy získali funkci

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C_+, & x > 0, \\ -\frac{x^2}{2} + C_-, & x < 0. \end{cases}$$

Aby tato funkce byla primitivní funkcí k zadané funkci na celém $\mathbb{R}$, musí být definovaná a diferencovatelná (takže i spojitá) i v bodě $x = 0$. Pokud definujeme $C_+ = 0$, $C_- = 0$ a $F(0) = 0$, bude nově získaná funkce definovaná a spojitá v nule. Podle Darbouxovy věty bude v nule navíc i diferencovatelná, takže bude hledanou primitivní funkcí.

Příklad 2.3.2. Vypočítejte $\displaystyle\int \max\left\{1, x^2\right\} \mathrm{d}x$.

Podobně jako v předchozím příkladě integrál spočítáme nejdříve na intervalech, na kterých se zjednoduší na tabulkový. Platí

$$\int \max\left\{1, x^2\right\} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x > 1, \\ x + C_2, & x \in (-1, 1), \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x < -1, \end{cases}$$

kde C_i, $i = 1, 2, 3$, jsou reálné konstanty, které si můžeme libovolně zvolit. Funkce F, kde

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x > 1, \\ x + C_2, & x \in (-1, 1), \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x < -1, \end{cases}$$

bude primitivní funkcí k funkci f na celém $\mathbb{R}$, pokud ji dodefinujeme v bodech $x = \pm 1$ a zvolíme C_i, $i = 1, 2, 3$, tak, aby výsledná funkce byla spojitá v $x = \pm 1$. Podle Darbouxovy věty totiž bude v těchto bodech i diferencovatelná.

Zvolme například $C_2 = 0$. Potom platí $\displaystyle\lim_{x \to 1_+} F(x) = \frac{1}{3} + C_1$ a $\displaystyle\lim_{x \to 1_-} F(x) = 1$. Pokud tedy definujeme $C_1 = \frac{2}{3}$ a $F(1) = 1$, dostaneme F spojitou v bodě $x = 1$.

Protože zároveň platí $\displaystyle\lim_{x \to -1_-} F(x) = -\frac{1}{3} + C_3$ a $\displaystyle\lim_{x \to -1_+} F(x) = -1$, dostaneme volbami $C_3 = -\frac{2}{3}$ a $F(-1) = -1$ funkci F spojitou i v bodě $x = -1$.

Cvičení

Cvičení 2.3.1: Nechť funkce f je spojitá a zároveň sudá či lichá na intervalu $(-a, a)$, $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, a nechť funkce φ je spojitá na intervalu $\langle 0, a)$ a pro všechna $x \in (0, a)$ platí $\varphi'(x) = f(x)$. Nalezněte funkci F, která je k f primitivní na celém intervalu $(-a, a)$. V případě f sudé nalezněte lichou primitivní funkci F.

2.4 Úvodní příklady na substituci v neurčitém integrálu

Věta 2.4.1. Substituce v neurčitém integrálu

Nechť funkce f a φ splňují následující podmínky:

1. f má na intervalu (a, b) primitivní funkci F;
2. φ je diferencovatelná na intervalu (α, β);
3. $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$.

Potom $F \circ \varphi$ je primitivní funkce k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na (α, β).

Poznámka 2.4.2. Větu o substituci budeme používat následujícími dvěma způsoby:

1. Předpokládejme, že máme nějakou funkci g, jejíž integrál můžeme napsat jako $\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, kde f má primitivní funkci F. Potom platí

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}_{\varphi(x)=t \;\Rightarrow\; \varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) = F(\varphi(x)).$$

   Ukázka postupu na konkrétním příkladě:

$$\int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\ln x=t \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R}^+-\{1\} \;\Rightarrow\; t\in\mathbb{R}-\{0\}}} = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| = \ln|\ln x|.$$

2. Předpokládejme, že máme funkce g a φ takové, že existuje φ^{-1} a že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ má primitivní funkci G. Potom platí

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int g\left(\varphi^{-1}(\varphi(x))\right)}_{\varphi(x)=t \;\Rightarrow\; \varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t} \cdot \underbrace{\left(\varphi^{-1}\right)'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}_{=1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int g\left(\varphi^{-1}(t)\right) \cdot \left(\varphi^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) = G(\varphi(x)),$$

   kde součin $\left(\varphi^{-1}\right)'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ je roven jedné z věty o derivaci inverzní funkce. Provedená substituce se často zapisuje jako $x = \varphi^{-1}(t)$.

   Ukázka postupu na konkrétním příkladě:

$$\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{x=\sin t \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t \\ x\in(-1,1) \;\Rightarrow\; t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}} = \underbrace{\int \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t}_{\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t} = \int 1\,\mathrm{d}t = t = \arcsin x.$$

Poznámka 2.4.3. Důležitý typ substituce

$$\underbrace{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x}_{f(x)=t \;\Rightarrow\; f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t} = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| = \ln|f(x)|.$$

Příklad 2.4.4. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\sqrt{1+x^2}=t \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; t\in\langle 1,+\infty)}}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = 2(1+t)^{\frac{1}{2}} = 2(1+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Příklad 2.4.5. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \underbrace{\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}}_{\substack{\sqrt{x^2-1}=t \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ |x|>1 \;\Rightarrow\; t\in\mathbb{R}^+}} = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}.$$

Příklad 2.4.6. Vypočítejte $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x.$

S využitím poznámky 2.4.3 máme

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x}_{\cos' x = -\sin x} = -\ln|\cos x|.$$

Příklad 2.4.7. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x} = \underbrace{\int \frac{1}{2\cos^2 x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}_{\substack{\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}=t \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi),\,k\in\mathbb{Z} \;\Rightarrow\; t\in\mathbb{R}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} t = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)}_{=\tilde{F}(x)} + C_k,$$

kde C_k je integrační konstanta, která přísluší intervalu $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. Funkce, kterou jsme označili jako $\tilde{F}$, není definovaná v bodech $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Protože platí

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)_-} \tilde{F}(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$
$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)_+} \tilde{F}(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

můžeme podobným způsobem jako v sekci 2.3 pomocí funkce $\tilde{F}$ definovat hledanou primitivní funkci (označme ji F) vztahem

$$F(x) = \begin{cases} \tilde{F}(x) + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, & x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi),\ k\in\mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1+2k), & x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Příklad 2.4.8. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

$$\underbrace{\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\cos^2 x = t \ \Rightarrow\ -2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R} \ \Rightarrow\ t\in\langle 0,1\rangle}} = -\frac{1}{2}\int \frac{t+1-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln(1+t) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x).$$

2.5 Úvodní příklady na per partes pro neurčitý integrál

Věta 2.5.1. Per partes v neurčitém integrálu

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné na intervalu (a,b) a nechť funkce fg' má na intervalu (a,b) primitivní funkci H. Potom funkce $fg - H$ je primitivní funkce k funkci $f'g$ na (a,b).

Poznámka 2.5.2. Podle předchozí věty platí $\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'$.

Poznámka 2.5.3. Per partes typicky používáme tehdy, když integrujeme součin dvou zcela různorodých funkcí takových, že jedné z nich se můžeme zbavit derivováním a druhou umíme zintegrovat.

Poznámka 2.5.4. Pokud Vás při pohledu na zadaný integrál vůbec nenapadá, jakým způsobem by mohl jít spočítat, zkuste per partes.

Příklad 2.5.5. Vypočítejte $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=1 \ \Rightarrow\ f(x)=x \\ g(x)=\ln x \ \Rightarrow\ g'(x)=\frac{1}{x}}} \overset{\text{p.p.}}{=} x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x.$$

Příklad 2.5.6. Vypočítejte $\displaystyle\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

$$\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int 1\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=1 \ \Rightarrow\ f(x)=x+1 \\ g(x)=\ln(x+1) \ \Rightarrow\ g'(x)=\frac{1}{x+1}}} \overset{\text{p.p.}}{=} (x+1)\ln(x+1) - \int 1\,\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

Příklad 2.5.7. Vypočítejte $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=e^{-x} \ \Rightarrow\ f(x)=-e^{-x} \\ g(x)=x \ \Rightarrow\ g'(x)=1}} \overset{\text{p.p.}}{=} -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

Příklad 2.5.8. Vypočítejte $\displaystyle\int x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int x^2 \sin(2x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=\sin(2x)\ \Rightarrow\ f(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)\\ g(x)=x^2\ \Rightarrow\ g'(x)=2x}} \overset{\text{p.p.}}{=} -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \underbrace{\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=\cos(2x)\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)\\ g(x)=x\ \Rightarrow\ g'(x)=1}}$$

$$\overset{\text{p.p.}}{=} -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x).$$

Příklad 2.5.9. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}\ \Rightarrow\ f(x)=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1}\\ g(x)=x\ \Rightarrow\ g'(x)=1}} \overset{\text{p.p.}}{=} -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}\right),$$

přičemž jsme využili, že platí

$$\underbrace{\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x}_{\substack{1+x^2=t\ \Rightarrow\ 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ t\in\langle 1,+\infty)}} = \frac{1}{2}\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Příklad 2.5.10. Vypočítejte $\displaystyle\int x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x}_{\substack{x^3=t\ \Rightarrow\ 3x^2\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ t\in\mathbb{R}}} = \underbrace{\frac{1}{3}\int te^t\,\mathrm{d}t}_{\substack{f'(t)=e^t\ \Rightarrow\ f(t)=e^t\\ g(t)=t\ \Rightarrow\ g'(t)=1}} \overset{\text{p.p.}}{=} \frac{1}{3}te^t - \frac{1}{3}\int e^t = \frac{1}{3}e^{x^3}\cdot\left(x^3-1\right).$$

Příklad 2.5.11. Vypočítejte $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha,\beta \neq 0$.

$$\underbrace{\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=\cos(\beta x)\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{\beta}\sin(\beta x)\\ g(x)=e^{\alpha x}\ \Rightarrow\ g'(x)=\alpha e^{\alpha x}}} \overset{\text{p.p.}}{=} \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\underbrace{\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=\sin(\beta x)\ \Rightarrow\ f(x)=-\frac{1}{\beta}\cos(\beta x)\\ g(x)=e^{\alpha x}\ \Rightarrow\ g'(x)=\alpha e^{\alpha x}}}$$

$$\overset{\text{p.p.}}{=} \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\sin(\beta x) + \frac{\alpha e^{\alpha x}}{\beta^2}\cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x,$$

kde poslední integrál je stejný jako ten, ze kterého jsme vyšli. Protože tento integrál existuje (integrand je funkce spojitá na celém definičním oboru), můžeme jej z předchozí rovnice vyjádřit. Dostaneme

$$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\beta\sin(\beta x) + \alpha\cos(\beta x)\right).$$

2.6 Integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky

Věta 2.6.1. Nechť p a q jsou nenulové polynomy s reálnými koeficienty takové, že platí st.$p <$ st.q, a nechť platí

$$q(x) = c(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}\cdot\left(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\right)^{l_1}\left(x^2+\beta_2 x+\gamma_2\right)^{l_2}\cdots\left(x^2+\beta_r x+\gamma_r\right)^{l_r},$$

kde c je nenulové reálné číslo, čísla α_i, $i = 1, \dots, s$, jsou navzájem různé reálné kořeny polynomu q, dále β_j a γ_j, $j = 1, \dots, r$, jsou reálná čísla taková, že výrazy $x^2 + \beta_j x + \gamma_j$ mají záporný diskriminant, a k_i a l_j, $i = 1, \dots, s$ a $j = 1, \dots, r$, jsou přirozená čísla.

Potom existují reálné konstanty A_{ij}, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, k_i$, a B_{ij}, C_{ij}, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, l_i$, takové, že platí

$$
\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{(x-\alpha_2)} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \dots \\
& + \frac{A_{sk_s}}{(x-\alpha_s)^{k_s}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}} \\
& + \frac{B_{21}x + C_{21}}{(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^2} + \dots + \frac{B_{2l_2}x + C_{2l_2}}{(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{l_2}} + \dots + \frac{B_{rl_r}x + C_{rl_r}}{(x^2+\beta_r x+\gamma_r)^{l_r}}.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Tento rozklad je až na pořadí jednotlivých členů jednoznačný.

Důkaz. Ukážeme pouze existenci rozkladu, přičemž důkaz povedeme indukcí podle stupně polynomu q. Pokud má q stupeň 1, musí mít polynom p stupeň 0, takže podíl $\frac{p(x)}{q(x)}$ už je ve tvaru (2.1). Předpokládejme dále, že tvrzení platí pro všechny polynomy q stupně maximálně $n-1$, a hledejme rozklad pro polynom q stupně $n \geq 2$. Mohou nastat následující dva případy:

1. Nechť q má reálný kořen α s násobností k. Potom tento polynom můžeme napsat ve tvaru $q(x) = (x-\alpha)^k r(x)$, kde polynom r splňuje $\operatorname{st.} r = n - k < \operatorname{st.} q$ a $r(\alpha) \neq 0$. Polynom $p(x) - Ar(x)$, kde $A = \frac{p(\alpha)}{r(\alpha)}$, má potom kořen α, takže existuje polynom $\tilde{p}$, pro který platí $p(x) - Ar(x) = (x-\alpha)\tilde{p}(x)$ a $\operatorname{st.} \tilde{p} < \operatorname{st.} q - 1$. Pro podíl $\frac{p(x)}{q(x)}$ proto můžeme psát
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-\alpha)^k r(x)} = \frac{Ar(x)}{(x-\alpha)^k r(x)} + \frac{(x-\alpha)\tilde{p}(x)}{(x-\alpha)^k r(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{\tilde{p}(x)}{(x-\alpha)^{k-1} r(x)},$$
kde polynom ve jmenovateli posledního zlomku v předchozí rovnosti má stupeň menší než stupeň q a zároveň větší než stupeň $\tilde{p}$. Tento zlomek proto podle indukčního předpokladu umíme rozložit na požadovaný tvar.

2. Nechť q nemá reálný kořen. Pokud platí $n = 2$, podíl $\frac{p(x)}{q(x)}$ už je ve tvaru (2.1). Uvažujme proto $n > 2$. Předpokládejme, že polynom q má komplexní kořeny λ a $\overline{\lambda}$ s násobností l, kde $(x-\lambda)(x-\overline{\lambda}) = x^2 + \beta x + \gamma$, takže jej můžeme napsat ve tvaru $q(x) = \left(x^2 + \beta x + \gamma\right)^l r(x)$, kde polynom r splňuje $\operatorname{st.} r = n - 2l$ a $r(\lambda) \neq 0$ a $r(\overline{\lambda}) \neq 0$. Potom můžeme najít reálné konstanty B a C takové, že polynom $p(x) - (Bx + C)r(x)$ má kořeny λ a $\overline{\lambda}$ (cvičení 2.6.1), díky čemuž pro nějaký polynom $\tilde{p}$ splňující $\operatorname{st.} \tilde{p} < \operatorname{st.} q - 2$ platí $p(x) - (Bx + C)r(x) = \left(x^2 + \beta x + \gamma\right)\tilde{p}(x)$. Pro podíl $\frac{p(x)}{q(x)}$ proto můžeme psát
$$
\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{p(x)}{\left(x^2 + \beta x + \gamma\right)^l r(x)} = \frac{(Bx + C)r(x)}{\left(x^2 + \beta x + \gamma\right)^l r(x)} + \frac{\left(x^2 + \beta x + \gamma\right)\tilde{p}(x)}{\left(x^2 + \beta x + \gamma\right)^l r(x)} \\
&= \frac{Bx + C}{\left(x^2 + \beta x + \gamma\right)^l} + \frac{\tilde{p}(x)}{\left(x^2 + \beta x + \gamma\right)^{l-1} r(x)},
\end{aligned}
$$
kde polynom ve jmenovateli posledního zlomku v předchozí rovnosti má stupeň menší než stupeň q a zároveň větší než stupeň $\tilde{p}$. Tento zlomek proto podle indukčního předpokladu umíme rozložit na požadovaný tvar.

Poznámka 2.6.2. Parciální zlomky můžeme integrovat následujícím způsobem:

- $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = A \ln|x-\alpha|.$
- Pro $j > 1$ je $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^j}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-j} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{j-1}}.$

- Pro $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}\,\mathrm{d}x + \left(C - \frac{B}{2}\beta\right)\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}\,\mathrm{d}x.$$

První integrál na pravé straně můžeme spočítat pomocí substituce $x^2+\beta x+\gamma = t$. Co se týče druhého integrálu, nejdříve jeho jmenovatel upravíme

$$x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{-D}{4} = \frac{-D}{4}\left(\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{-D}}\right)^2+1\right),$$

kde $D = \beta^2 - 4\gamma$ je (záporný) diskriminant výrazu $x^2+\beta x+\gamma$. Dále použijeme substituci $\frac{2x+\beta}{\sqrt{-D}} = t$, kterou tento integrál převedeme na násobek integrálu $\int \frac{1}{(1+x^2)^k}\,\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{N}$, který označíme jako I_k. Platí

$$I_k = \underbrace{\int \frac{1}{(1+x^2)^k}\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=1 \;\Rightarrow\; f(x)=x \\ g(x)=\left(1+x^2\right)^{-k} \;\Rightarrow\; g'(x)=-2kx\left(1+x^2\right)^{-k-1}}} \overset{\text{p.p.}}{=} \frac{x}{(1+x^2)^k} + 2k\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(1+x^2)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1}.$$

Získáváme tak rekurentní vztah

$$I_{k+1} = \frac{1}{2k}\frac{x}{(1+x^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k, \text{ kde } I_1 = \operatorname{arctg} x.$$

Příklad 2.6.3. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x.$

Protože polynom v čitateli integrandu má nižší stupeň než polynom ve jmenovateli, můžeme podle věty 2.6.1 hledat rozklad integrandu ve tvaru

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{Ax+5A+Bx-2B}{(x-2)(x+5)}.$$

Protože zlomek vpravo se musí rovnat integrandu pro všechna $x \in \mathbb{R} - \{-5, 2\}$, musí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platit

$$A(x+5) + B(x-2) = 2x+3. \tag{2.2}$$

Čísla A a B proto můžeme získat porovnáním koeficientů u mocnin x v rovnici (2.2), tedy řešením soustavy

$$\begin{aligned} A+B &= 2, \\ 5A-2B &= 3. \end{aligned}$$

Z ní získáváme $A = 1$ a $B = 1$.

Vhodnou soustavu rovnic pro koeficienty A a B můžeme odvodit například také tím, že za x v rovnosti (2.2) dosadíme nějaká čísla taková, abychom získali co nejjednodušší soustavu rovnic pro A a B. Třeba čísla -5 a 2.

Získáváme tedy

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5}\right)\mathrm{d}x = \ln|(x-2)(x+5)|.$$

Příklad 2.6.4. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x.$

Protože polynom v čitateli integrandu nemá nižší stupeň než polynom ve jmenovateli, nemůžeme ihned použít větu 2.6.1. Nejdříve proto snížíme stupeň polynomu v čitateli. Platí

$$\frac{x^3+1-5x^2+6x+5x^2-6x}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-3)(x-2)}.$$

Podle věty 2.6.1 nyní můžeme rozklad lomené funkce vpravo hledat ve tvaru

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-2)}.$$

Pro všechna $x\in\mathbb{R}$ proto musí platit

$$A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3)=5x^2-6x+1.$$

Pokud do předchozí rovnosti postupně dosadíme za x čísla 0, 3 a 2, získáme $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{28}{3}$ a $C=-\frac{9}{2}$.

Celkový výsledek je tady

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{1}{6x}+\frac{28}{3(x-3)}-\frac{9}{2(x-2)}\right)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{28}{3}\ln|x-3|-\frac{9}{2}\ln|x-2|.$$

Příklad 2.6.5. Vypočítejte $\displaystyle\int\frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$

Protože platí

$$x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1=(1+x)^3(x-1)^2$$

a polynom v čitateli integrandu má nižší stupeň než polynom ve jmenovateli, můžeme podle věty 2.6.1 hledat rozklad integrandu ve tvaru

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}.$$

Pokud uvedené zlomky převedeme na společného jmenovatele a čitatel získaného zlomku porovnáme s čitatelem integrandu, můžeme postupným dosazením čísel -1 a 1 za x snadno spočítat, že platí $C=\frac{1}{4}$ a $E=\frac{1}{8}$. Hodnotu koeficientu B můžeme získat třeba následujícím postupem: Nejdříve obě strany rovnosti

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}=\frac{1}{(1+x)^3(x-1)^2}\tag{2.3}$$

vynásobíme polynomem $(1+x)^3$. Dostaneme

$$A(x+1)^2+B(x+1)+C+\frac{D(x+1)^3}{x-1}+\frac{E(x+1)^3}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}.\tag{2.4}$$

Pokud obě strany rovnice (2.4) zderivujeme a do rovnosti derivací za číslo x dosadíme -1, dostaneme

$$\begin{aligned}&\underbrace{\left(A(x+1)^2\right)'}_{=2A(x+1)}\Big|_{x=-1}+\underbrace{\left(B(x+1)\right)'}_{=B}\Big|_{x=-1}+\underbrace{(C)'}_{=0}\Big|_{x=-1}\\&+\underbrace{\left(\frac{D(x+1)^3}{x-1}\right)'}_{=\frac{3D(x+1)^2(x-1)-D(x+1)^3}{(x-1)^2}}\Bigg|_{x=-1}+\underbrace{\left(\frac{E(x+1)^3}{(x-1)^2}\right)'}_{=\frac{3E(x+1)^2(x-1)^2-E(x+1)^3 2(x-1)}{(x-1)^4}}\Bigg|_{x=-1}=\underbrace{\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)'}_{-2(x-1)^{-3}}\Bigg|_{x=-1},\end{aligned}\tag{2.5}$$

čili $B=-2\cdot(-2)^{-3}=\frac{1}{4}$.

Protože poslední dva členy na levé straně rovnosti (2.5) mají v čitateli polynom, který má kořen -1 s násobností alespoň 2, budou i derivace těchto členů mít kořen -1. Pokud tedy vyčíslíme druhou derivaci levé a pravé strany rovnice (2.4) v bodě $x=-1$, dostaneme s využitím (2.5) vztah $2A = \left((x-1)^{-2}\right)''\Big|_{x=-1}$, tedy $A = \frac{3}{16}$.

Nakonec vynásobením rovnosti (2.3) polynomem $(x-1)^2$ a vyčíslením derivace levé a pravé strany získané rovnosti v bodě $x=1$ můžeme spočítat, že platí $D = -\frac{3}{16}$.

Integrací parciálních zlomků získáme celkový výsledek

$$\int \frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left(3\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{4}{x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right).$$

Příklad 2.6.6. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{2x^4+3x^3+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

Protože polynom v čitateli integrandu nemá nižší stupeň než polynom ve jmenovateli, nemůžeme ihned použít větu 2.6.1. Nejdříve proto snížíme stupeň polynomu v čitateli. Platí

$$\frac{2x^4+3x^3+2x+4}{x^3+1} = \frac{2x^4+2x+3x^3+3+1}{x^3+1} = 2x+3+\frac{1}{x^3+1} = 2x+3+\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

kde polynom x^2-x+1 má záporný diskriminant. Rozklad posledního zlomku na parciální zlomky proto budeme podle věty 2.6.1 hledat ve tvaru

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Koeficienty A, B a C tudíž musí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňovat rovnost

$$A(x^2-x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) = 1.$$

Dosazením $x=-1$ dostaneme $A = \frac{1}{3}$. Odtud porovnáním koeficientů u x^2 získáme $B = -\frac{1}{3}$ a porovnáním koeficientů u x^0 zase $C = \frac{2}{3}$.

Integrací prvního parciálního zlomku dostaneme

$$\int \frac{A}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1|.$$

Integrací druhého parciálního zlomku postupem v poznámce 2.6.2 dostaneme

$$\int \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{-(2x-1-3)}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x,$$

kde

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2-x+1|$$

a

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)=t \;\Rightarrow\; \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; t\in\mathbb{R}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Celkový výsledek je tady

$$\int \frac{2x^4+3x^3+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = x^2+3x+\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Příklad 2.6.7. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{x^4(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

Protože polynom v čitateli integrandu má nižší stupeň než polynom ve jmenovateli, můžeme podle věty 2.6.1 hledat rozklad integrandu ve tvaru

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{Ex+F}{1+x^2}.$$

Protože integrand je sudá funkce, musí pro všechna $x \neq 0$ platit

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{Ex+F}{1+x^2}=\frac{1}{x^4(1+x^2)}$$

a zároveň

$$-\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}-\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{-Ex+F}{1+x^2}=\frac{1}{x^4(1+x^2)}.$$

Sečtením těchto dvou rovnic dostaneme

$$\frac{2B}{x^2}+\frac{2D}{x^4}+\frac{2F}{1+x^2}=\frac{2}{x^4(1+x^2)},$$

takže platí $A=C=E=0$ a rozklad na parciální zlomky můžeme hledat z rovnosti

$$\frac{B}{x^2}+\frac{D}{x^4}+\frac{F}{1+x^2}=\frac{Bx^2(1+x^2)+D(1+x^2)+Fx^4}{x^4(1+x^2)}=\frac{1}{x^4(1+x^2)}.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x v čitatelích posledních dvou zlomků zjistíme, že platí $B=-1$, $D=1$ a $F=1$.

Výsledek je proto

$$\int \frac{1}{x^4(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+\operatorname{arctg} x.$$

Příklad 2.6.8. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x(1+x^7)}\,\mathrm{d}x-\int \frac{x^7}{x(1+x^7)}\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int \frac{x^6}{x^7(1+x^7)}\,\mathrm{d}x-\int \frac{x^6}{1+x^7}\,\mathrm{d}x}_{\substack{x^7=t \;\Rightarrow\; 7x^6\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R}-\{-1,0\} \;\Rightarrow\; t\in\mathbb{R}-\{-1,0\}}}$$

$$=\frac{1}{7}\int \frac{1}{\underbrace{t(1+t)}_{=\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}}}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{7}\int\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{7}\ln|t|-\frac{2}{7}\ln|1+t|=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln\left|1+x^7\right|.$$

Cvičení

Cvičení 2.6.1: Nalezněte konstanty B a C v důkazu věty 2.6.1.

2.7 Integrály typu $\int R\left(\sqrt{ax^2+bx+c},x\right)\mathrm{d}x$

Definice 2.7.1. Funkce $R:\left(\mathbb{R}^2\right)\to\mathbb{R}$ se nazývá racionální lomená funkce dvou proměnných, když pro všechna $(y,z)\in D_R$ platí

$$R(y,z)=\frac{\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}a_{ij}y^iz^j}{\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}b_{ij}y^iz^j}, \tag{2.6}$$

kde $k\in\mathbb{N}_0$ a $a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{R}$ pro $i,j=0,\ldots,k$.

Poznámka 2.7.2. Integrál $\int R\left(\sqrt{ax^2+bx+c}, x\right) \mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce dvou proměnných (definice 2.7.1) a kde platí $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, následujícími (Eulerovými) substitucemi převedeme na integrál racionální lomené funkce:

1. Pokud platí $a > 0$, zavedeme novou proměnnou t vztahem $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$.
2. Pokud platí $c > 0$, zavedeme novou proměnnou t vztahem $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.
3. Pokud výraz ax^2+bx+c má reálné kořeny α a β, zavedeme novou proměnnou t vztahem $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t(x-\alpha)$.

Znaménko v první a ve druhé substituci volíme tak, jak se nám to zrovna hodí.

Příklad 2.7.3. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x}_{\substack{x=\sinh t \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\cosh t\,\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R} \ \Rightarrow\ t\in\mathbb{R}}} = \int \frac{\cosh t}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \,\mathrm{d}t = \int \frac{\cosh t}{|\cosh t|} \,\mathrm{d}t = \int 1 \,\mathrm{d}t = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Příklad 2.7.4. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x$.

Využijeme fakt, že integrand je sudá funkce, a primitivní funkci nejdříve najdeme pouze na intervalu $(1,+\infty)$. Pro $x \in (-\infty,-1)$ potom primitivní funkci liše dodefinujeme (podobně jako ve cvičení 2.3.1). Pro $x \in (1,+\infty)$ máme

$$\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x}_{\substack{x=\cosh t \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\sinh t\,\mathrm{d}t \\ x\in(1,+\infty) \ \Rightarrow\ t\in(0,+\infty)}} = \int \frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}} \,\mathrm{d}t = \int \frac{\sinh t}{|\sinh t|} \,\mathrm{d}t = \int 1 \,\mathrm{d}t = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Na intervalu $x \in (-\infty,-1)$ lichým dodefinováním dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{argcosh}(-x) = -\ln\left(-x + \sqrt{x^2-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{-1}\right).$$

Celkový výsledek je proto $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$.

Nyní stejný výsledek získáme ještě pomocí první z Eulerových substitucí (poznámka 2.7.2). Platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x}_{\substack{\sqrt{x^2-1}-x=t \ \Rightarrow\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R}-\langle -1,1\rangle \ \Rightarrow\ t\in(-1,0)\cup(1,+\infty)}} = \int -\frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$$
$$= -\ln|t| = \ln\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x}\right| = \ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|.$$

Příklad 2.7.5. Vypočítejte $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1} \,\mathrm{d}x$.

S využitím výsledku příkladu 2.7.4 můžeme psát

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int 1\cdot\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=1\ \Rightarrow\ f(x)=x\\ g(x)=\sqrt{x^2-1}\ \Rightarrow\ g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}} \overset{\text{p.p.}}{=} x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|.$$

Z předchozího řetězce rovností vidíme, že platí $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)$.

Příklad 2.7.6. Vypočítejte $\int x\sqrt{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$\int x\sqrt{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int x\sqrt{(x+2)^2+1}\,\mathrm{d}x}_{\substack{x+2=t\ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ t\in\mathbb{R}}} = \int (t-2)\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int 2t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t}_{\substack{t^2+1=s\ \Rightarrow\ 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}s\\ t\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ s\in\langle 1,+\infty)}} - 2\underbrace{\int \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t}_{\text{ze cvičení 2.7.2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int s^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s - \left(t\sqrt{t^2+1} + \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - \left(t\sqrt{t^2+1} + \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{3}{2}} - \left((x+2)\sqrt{x^2+4x+5} + \ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)\right).$$

Příklad 2.7.7. Vypočítejte $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\frac{1}{x+1}=t\ \Rightarrow\ -\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ x=\frac{1}{t}-1\\ x\in\mathbb{R}-\{-1\}\ \Rightarrow\ t\in\mathbb{R}-\{0\}}} = \int \frac{-1}{t\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-\operatorname{sgn}(t)}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int \frac{-\operatorname{sgn}(t)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left((2t-1)^2+1\right)}}\,\mathrm{d}t}_{\substack{2t-1=s\ \Rightarrow\ 2\mathrm{d}t=\mathrm{d}s\\ t\in\mathbb{R}-\{0\}\ \Rightarrow\ s\in\mathbb{R}-\{-1\}}}$$

$$= \underbrace{\int \frac{-\operatorname{sgn}\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{s^2+1}}\,\mathrm{d}s}_{\text{z příkladu 2.7.3, přičemž } s\neq -1} = \frac{-\operatorname{sgn}\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{2}}\ln\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)$$

$$= -\frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}+\frac{\sqrt{2x^2+2}}{|x+1|}\right) = \ldots = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1-x+\sqrt{2x^2+2}}{|x+1|}\right),$$

kde výraz na začátku posledního řádku jsme upravili podobným způsobem jako výsledek pro interval $(-\infty,-1)$ v příkladě 2.7.4.

Příklad 2.7.8. Vypočítejte $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Zadaný integrál rozdělíme na následující součet tří integrálů:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+2x+2}{x\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^2+x}{x\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x}{x\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x}_{=I_2} + 2\underbrace{\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x}_{=I_3}.\end{aligned}$$

Platí

$$I_1 = \underbrace{\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{x^2+2x+2=t \ \Rightarrow\ (2x+2)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ t\in\langle 1,+\infty)}} = \int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = 2t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2+2x+2},$$

$$\begin{aligned}I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{x+1=t\ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ t\in\mathbb{R}}} = \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t}_{\text{z příkladu 2.7.3}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \\ &= \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_3 &= \underbrace{\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\frac{1}{x}=t\ \Rightarrow\ -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R}-\{0\}\ \Rightarrow\ t\in\mathbb{R}-\{0\}}} = \int \frac{-\mathrm{sgn}\,(t)}{\sqrt{1+2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sgn}\,(t)}{\sqrt{2+4t+4t^2}}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int \frac{-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sgn}\,(t)}{\sqrt{\left((2t+1)^2+1\right)}}\,\mathrm{d}t}_{\substack{2t+1=s\ \Rightarrow\ 2\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}s \\ t\in\mathbb{R}-\{0\}\ \Rightarrow\ s\in\mathbb{R}-\{1\}}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\int \frac{\mathrm{sgn}\,\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\sqrt{s^2+1}}\,\mathrm{d}s}_{\text{jako v příkladě 2.7.7}} = -\frac{\mathrm{sgn}\,\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\sqrt{2}}\ln\left(s+\sqrt{s^2+1}\right) = \frac{\mathrm{sgn}\,\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\sqrt{2}}\ln\left(-s+\sqrt{s^2+1}\right) \\ &= \frac{\mathrm{sgn}\,(x)}{\sqrt{2}}\ln\left(-\frac{2}{x}-1+\frac{\sqrt{2x^2+4x+4}}{|x|}\right) = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{-2-x+\sqrt{2x^2+4x+4}}{|x|}\right),\end{aligned}$$

kde výraz na začátku posledního řádku jsme upravili podobným způsobem jako výsledek pro interval $(-\infty,-1)$ v příkladě 2.7.4.

Celkový výsledek je tedy

$$\frac{1}{2}I_1+I_2+2I_3 = \sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+\sqrt{2}\ln\left(\frac{-2-x+\sqrt{2x^2+4x+4}}{|x|}\right).$$

Příklad 2.7.9. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Integrál spočítáme pomocí první z Eulerových substitucí (poznámka 2.7.2). Platí

$$\begin{aligned}\underbrace{\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\sqrt{x^2+x+1}+x=t\ \Rightarrow\ x=\frac{t^2-1}{1+2t} \\ x\in\mathbb{R}-\{-1\}\ \Rightarrow\ t\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty) \\ \mathrm{d}x=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t}} &= 2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{jako v sekci 2.6}}{=} 2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\frac{1}{1+2t}-\frac{3}{2}\frac{1}{(1+2t)^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= 2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln(1+2t)+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2t},\quad \text{kde } t=\sqrt{x^2+x+1}+x.\end{aligned}$$

Cvičení

Cvičení 2.7.1: V poznámce 2.7.2 byly vyjmenovány tři substituce spolu s podmínkami, za kterých je můžeme použít. Může se stát, že na jeden integrál budeme moci použít všechny tři substituce? Co když nebude splněna ani jedna z uvedených podmínek?

Ukažte, že tyto substituce skutečně vedou na integrál racionální lomené funkce.

Cvičení 2.7.2: Technikou použitou v příkladě 2.7.5 vypočítejte $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Cvičení 2.7.3: Ukažte, že integrál $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$, $a \neq 0$ a $b^2-4ac \neq 0$, můžeme substitucí převést na násobek jednoho z integrálů $\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$, $\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ a $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Cvičení 2.7.4: Ukažte, že integrál $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, $a \neq 0$ a $b^2-4ac \neq 0$, můžeme substitucí převést na násobek jednoho z integrálů $\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $\int \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ a $\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2.8 Integrály typu $\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, x\right)\mathrm{d}x$

Poznámka 2.8.1. Integrál $\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, x\right)\mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce dvou proměnných (definice 2.7.1) a platí $n \in \mathbb{N}$ a $ad-bc \neq 0$, substitucí $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ převedeme na integrál racionální lomené funkce.

Příklad 2.8.2. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{1+x^{\frac{2}{12}}}{\left(x^{\frac{4}{12}}-x^{\frac{3}{12}}\right)x^{\frac{9}{12}}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{x^{\frac{1}{12}}=t \;\Rightarrow\; \frac{1}{12}x^{-\frac{11}{12}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R}^+-\{1\} \;\Rightarrow\; t\in\mathbb{R}^+-\{1\}}} = 12\int \frac{1+t^2}{(t-1)t}\,\mathrm{d}t = 12\int \frac{1-t+t+t^2}{(t-1)t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 12\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{t-1+1+1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = 12\int\left(-\frac{1}{t}+1+\frac{2}{t-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -12\ln t + 12t + 24\ln|t-1| = 12x^{\frac{1}{12}} - \ln x + 24\ln|x^{\frac{1}{12}}-1|.$$

Příklad 2.8.3. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{1}{(x+1)^2\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}=t \;\Rightarrow\; x=\frac{t^3+1}{1-t^3} \\ \mathrm{d}x=\frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\,\mathrm{d}t \\ x\in\mathbb{R}-\{-1,1\} \;\Rightarrow\; t\in\mathbb{R}-\{0,1\}}} = \frac{3}{2}\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Cvičení

Cvičení 2.8.1: Dokažte tvrzení v poznámce 2.8.1.

2.9 Integrály typu $\int x^p (a+bx^q)^r \, \mathrm{d}x$

Poznámka 2.9.1. Integrál $\int x^p (a+bx^q)^r \, \mathrm{d}x$, kde platí $p,q,r \in \mathbb{Q}$ a $a,b \in \mathbb{R}$, následujícími substitucemi převedeme na integrál racionální lomené funkce:

1. Pokud platí $r \in \mathbb{Z}$, použijeme substituci $x = t^n$, kde n je společný jmenovatel čísel p,q.
2. Pokud platí $\frac{p+1}{q} \in \mathbb{Z}$, použijeme substituci $a + bx^q = t^n$, kde n je jmenovatel čísla r.
3. Pokud platí $\frac{p+1}{q} + r \in \mathbb{Z}$, použijeme substituci $ax^{-q} + b = t^n$, kde n je jmenovatel čísla r.

Příklad 2.9.2. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} \, \mathrm{d}x$.

Využijeme fakt, že integrand je sudá funkce, a primitivní funkci nejdříve nalezneme pouze na $\mathbb{R}^+$ a spojitě ji dodefinujeme v nule. Pomocí takto vzniklé funkce potom (stejným způsobem jako ve cvičení 2.3.1) definujeme novou funkci, která bude primitivní funkcí na celém $\mathbb{R}$.

Pro $\mathbb{R}^+$ použitím třetí ze substitucí v poznámce 2.9.1 dostaneme

$$\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} \, \mathrm{d}x}_{\substack{t^4 = x^{-4}+1 \;\Rightarrow\; x = \left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}} \\ \mathrm{d}x = -t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}} \mathrm{d}t \\ x \in \mathbb{R}^+ \;\Rightarrow\; t \in (1,+\infty)}} = \int \frac{-t^2}{t^4-1} \, \mathrm{d}t \underset{\cdots\cdots}{\overset{\text{jako v sekci 2.6}}{=}} -\int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t+1} \right) \mathrm{d}t$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|}_{=\psi(t)},$$

kde platí $t = \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$.

Funkci φ, kde $\varphi(x) = \psi\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}\right)$, spojitě dodefinujeme v nule, tedy

$$\varphi(0) = \lim_{x \to 0_+} \varphi(x) = -\frac{\pi}{4}.$$

Pomocí této funkce φ už stejným způsobem jako pomocí φ ve cvičení 2.3.1 definujeme hledanou primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Protože φ je na $\mathbb{R} - \{0\}$ lichá (neboť ψ je na $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ lichá), výsledná primitivní funkce (označme ji F) bude mít předpis

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Cvičení

Cvičení 2.9.1: Dokažte tvrzení v poznámce 2.9.1.

2.10 Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x) \, \mathrm{d}x$

Poznámka 2.10.1. Integrál $\int R(\sin x, \cos x) \, \mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce dvou proměnných (definice 2.7.1), následujícími substitucemi převedeme na integrál racionální lomené funkce:

1. Pokud je R lichá v proměnné $\sin x$, použijeme substituci $\cos x = t$.
   Platí $\cos x = t$, $\sin^2 x = 1 - t^2$, $-\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.
2. Pokud je R lichá v proměnné $\cos x$, použijeme substituci $\sin x = t$.
   Platí $\sin x = t$, $\cos^2 x = 1 - t^2$, $\cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.
3. Pokud platí $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, použijeme substituci $\operatorname{tg} x = t$.
   Platí $\operatorname{tg} x = t$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, kde $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. Vždy funguje substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.
   Platí $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$, kde $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Čtvrtou z uvedených substitucí sice můžeme použít vždy, ale získaná racionální lomená funkce bude obsahovat vyšší mocniny t než funkce získané ostatními substitucemi.

Příklad 2.10.2. Vypočítejte $\displaystyle\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \sin x (1 - \cos^2 x) \,\mathrm{d}x}_{\substack{\cos x = t \;\Rightarrow\; -\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; t \in \langle -1, 1\rangle}} = -\int \left(1 - t^2\right) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 - t = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x.$$

Příklad 2.10.3. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{\cos(3x)}{\sin^5 x} \,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sin^5 x} \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{\left(1 - 4\sin^2 x\right)\cos x}{\sin^5 x} \,\mathrm{d}x}_{\substack{\sin x = t \;\Rightarrow\; \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x \in \mathbb{R} - \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\} \;\Rightarrow\; t \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle}} = \int \left(t^{-5} - 4t^{-3}\right) \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4t^4} + \frac{2}{t^2} = -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{2}{\sin^2 x}.$$

Příklad 2.10.4. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin(2x)} \,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin(2x)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x \cdot 2 \sin x \cos x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} \,\mathrm{d}x}_{\substack{\operatorname{tg} x = t \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x \in \mathbb{R} - \cup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{k\frac{\pi}{2}\right\} \;\Rightarrow\; t \in \mathbb{R} - \{0\}}} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Příklad 2.10.5. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{a + b\cos x} \,\mathrm{d}x$, kde $a, b > 0$, $a > b$.

$$\underbrace{\int \frac{1}{a + b\cos x} \,\mathrm{d}x}_{\substack{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \;\Rightarrow\; t \in \mathbb{R}}} = \int \frac{1}{a + b\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = 2 \int \frac{1}{a + b + t^2(a - b)} \,\mathrm{d}t = \frac{2}{a+b} \underbrace{\int \frac{1}{\left(t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)^2 + 1} \,\mathrm{d}t}_{\substack{t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = s \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}s \\ t \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; s \in \mathbb{R}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int \frac{1}{1 + s^2} \,\mathrm{d}s = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} s + C_k = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}_{= \varphi(x)} + C_k,$$

kde C_k, $k \in \mathbb{Z}$, je konstanta příslušející intervalu $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$. Hodnoty všech těchto C_k si můžeme libovolně zvolit. Pokud pomocí získané funkce φ a konstant C_k chceme definovat hledanou primitivní funkci, musíme φ dodefinovat ve všech bodech $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a konstanty C_k zvolit tak, aby výsledná funkce byla spojitá na celém $\mathbb{R}$. Protože platí $\lim_{x\to\pi\pm} = \mp\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (φ má tedy ve všech bodech $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, skok o velikosti $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$), můžeme hledanou primitivní funkci (označme ji F) definovat například takto:

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \frac{2k\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, & x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, & x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Příklad 2.10.6. Odvoďte rekurentní vzorec pro výpočet integrálu $I_n = \displaystyle\int \sin^n x \,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Pro $n = 0$ a $n = 1$ platí $I_0 = \int 1 \,\mathrm{d}x = x$ a $I_1 = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$. Pro $n \geq 2$ můžeme použít následující postup:

$$I_n = \underbrace{\int \sin^n x \,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=\sin x \,\Rightarrow\, f(x)=-\cos x \\ g(x)=\sin^{n-1} x \,\Rightarrow\, g'(x)=(n-1)\cos x \sin^{n-2} x}} \overset{\text{p.p.}}{=} -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Z předchozí rovnosti můžeme vyjádřit I_n v závislosti na I_{n-2}. Dostaneme

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \ n \geq 2.$$

Cvičení

Cvičení 2.10.1: Odvoďte substituční vzorce v poznámce 2.10.1.

2.11 Integrály typu $\int R\left(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x}\right) \mathrm{d}x$

Poznámka 2.11.1. Integrál $\int R\left(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x}\right) \mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce n proměnných a platí $a_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, n$, substitucí $e^{\frac{x}{p}} = t$, kde p je společný jmenovatel čísel $a_1, \ldots, a_n$, převedeme na integrál racionální lomené funkce.

Cvičení

Cvičení 2.11.1: Dokažte tvrzení v poznámce 2.11.1.

2.12 Integrály typu $\int \frac{R(\ln x)}{x} \mathrm{d}x$

Poznámka 2.12.1. Integrál $\int \frac{R(\ln x)}{x} \mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce, substitucí $\ln x = t$ převedeme na integrál racionální lomené funkce.

Cvičení

Cvičení 2.12.1: Vymyslete si vlastní substituci, která nějaký netriviální typ integrálu převede na integrál racionální lomené funkce. Tuto substituci po sobě pojmenujte.

Kapitola 3

Určitý Riemannův integrál

3.1 Úvodní informace

Definice 3.1.1. Uvažujme interval $\langle a, b\rangle$. Množinu bodů $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, takovou, že platí $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, nazýváme rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Číslo $\nu(\sigma) = \max\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ nazýváme normou rozdělení σ. Pro funkci f definovanou na $\langle a, b\rangle$ nazýváme výraz $I(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta_k$, kde čísla c_k pro všechna $k = 1, \ldots, n$ splňují $c_k \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle$, integrálním součtem funkce f při rozdělení σ.

Definice 3.1.2. Nechť funkce f je definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Říkáme, že f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, pokud existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$, která splňují $\nu(\sigma) < \delta$, je $|I(f, \sigma) - I| < \varepsilon$.

Výše zmíněné číslo $I \in \mathbb{R}$ se nazývá určitým Riemannovým integrálem funkce f od a do b. Značíme $I = \int_a^b f$.

Poznámka 3.1.3. Nerovnost $|I(f, \sigma) - I| < \varepsilon$ v definici 3.1.2 musí být splněna nezávisle na konkrétní volbě čísel c_k ve výrazu $I(f, \sigma)$ (viz definici 3.1.1).

Definice 3.1.4. Pro funkci f integrovatelnou na $\langle a, b\rangle$ definujeme $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Pro funkci f definovanou v bodě a definujeme $\int_a^a f = 0$.

Věta 3.1.5. Funkce monotónní a funkce spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ mají na tomto intervalu určitý Riemannův integrál.

Věta 3.1.6. Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a α je reálné číslo. Potom funkce $\alpha f + g$ je také integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí $\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$.

Věta 3.1.7. Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Potom f je integrovatelná i na $\langle c, d\rangle$.

Věta 3.1.8. Nechť funkce f je integrovatelná na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. Potom f je integrovatelná i na $\langle a, b\rangle$ a platí $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Věta 3.1.9. Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí:

1. Pokud pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$, potom je $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.
2. Pokud pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) > g(x)$, potom je $\int_a^b f > \int_a^b g$.

Věta 3.1.10. Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $|f|$ je také integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Věta 3.1.11. Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a funkce g vznikne změnou definice funkce f v konečně mnoha bodech intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom g je také integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a platí $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Cvičení

Cvičení 3.1.1: Nechť $C(\langle a,b\rangle)$ je vektorový prostor všech reálných funkcí reálné proměnné, které jsou definované a spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$, kde pro $f,g \in C(\langle a,b\rangle)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ a $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Dokažte, že předpisem $(f,g) = \int_a^b fg$, kde $f,g \in C(\langle a,b\rangle)$, je na prostoru $C(\langle a,b\rangle)$ definován skalární součin.

Cvičení 3.1.2: Nechť funkce f je definovaná a spojitá na $\langle a,b\rangle$ a nechť pro všechny funkce g definované a spojité na $\langle a,b\rangle$, které splňují $g(a)=g(b)=0$, platí $\int_a^b fg = 0$. Dokažte, že f je na celém $\langle a,b\rangle$ rovna nule.

3.2 Výpočet určitého Riemannova integrálu

Věta 3.2.1. Newtonova formule pro určitý Riemannův integrál

Nechť existuje $\int_a^b f$, kde $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, a funkce F je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a diferencovatelná na (a,b) a pro všechna $x \in (a,b)$ je $F'(x) = f(x)$. Potom platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \overset{\text{značíme}}{=} [F(x)]_a^b .$$

Věta 3.2.2. Per partes pro určitý Riemannův integrál

Nechť funkce f,g jsou spojité na $\langle a,b\rangle$ a diferencovatelné na (a,b) a nechť existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$. Potom platí

$$\int_a^b f'g = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věta 3.2.3. Substituce v určitém Riemannově integrálu

Nechť funkce φ je spojitá na $\langle \alpha,\beta\rangle$ a diferencovatelná na (α,β) a nechť funkce f je spojitá na $\varphi(\langle \alpha,\beta\rangle)$. Potom platí

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud integrál vlevo existuje.

Poznámka 3.2.4. Při výpočtu hodnoty určitého Riemannova integrálu $\int_a^b f$ pomocí substituce máme dvě možnosti. První možností je nejdříve najít funkci F, která je primitivní k f na intervalu (a,b) (stejným způsobem jako v kapitole 2) a spojitá na $\langle a,b\rangle$, a potom dosadit do Newtonovy formule. Druhou možností je používat větu 3.2.3 a při každé substituci přepočítat meze integrálu.

Příklad 3.2.5. Vypočítejte $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\sqrt{e^x-1}=t \;\Rightarrow\; x=\ln(t^2+1)\\ \mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ x=0 \;\Rightarrow\; t=0,\; x=\ln 2 \;\Rightarrow\; t=1}} = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\,[t]_0^1 - 2\,[\operatorname{arctg} t]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 3.2.6. Vypočítejte $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{x=\sin t \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t \\ x=0\ \Rightarrow\ t=0,\ x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ t=\frac{\pi}{6}}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\cos^2 t\cdot|\cos t|}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = [\operatorname{tg} t]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Příklad 3.2.7. Vypočítejte $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,\mathrm{d}x}_{\substack{\sin x=t\ \Rightarrow\ \cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x=0\ \Rightarrow\ t=0,\ x=\pi\ \Rightarrow\ t=0}} = \int_0^{0} t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Příklad 3.2.8. Vypočítejte $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

Integrál spočítáme pomocí substituce $\operatorname{tg} x = t$. Nejdříve však zdůrazněme, že **neplatí**

$$\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\operatorname{tg} x=t\ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ x=0\Rightarrow t=0,\ x=\pi\Rightarrow t=0}} = \int_0^{0} (\text{nějaká funkce})\,\mathrm{d}t = 0 \quad (\text{integrál má stejné meze}),$$

protože uvažovanou substituci nemůžeme použít pro $x = \frac{\pi}{2}$. Budeme proto postupovat tak, že zadaný integrál nejdříve pomocí věty 3.1.8 rozdělíme na integrál od 0 do $\frac{\pi}{2}$ a od $\frac{\pi}{2}$ do π. Na každém z intervalů $(0, \frac{\pi}{2})$ a $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ potom k zadanému integrandu nalezneme primitivní funkci, kterou následně spojitě dodefinujeme v bodě $\frac{\pi}{2}$. Výsledné funkce dosadíme do Newtonovy formule.

Na $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ platí

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\operatorname{tg} x=t\ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)\ \Rightarrow\ t\in(0,+\infty)\cup(-\infty,0)}} = \int \frac{1}{1+t^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)}_{=\varphi(x)}.$$

Protože je $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm} \varphi(x) = \mp\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, definujeme hledané primitivní funkce předpisy

$$F_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x\in\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$
$$F_2(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle, \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Podle věty 3.1.8 potom s použitím Newtonovy formule dostaneme

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \overset{\text{věta } 3.1.8}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_1(0) + F_2(\pi) - F_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 0 + 0 - \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Příklad 3.2.9. Vypočítejte $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \,\mathrm{d}x$.

Na zadaný integrál nemůžeme přímo použít integraci per partes, protože funkce v integrandu nemá derivaci v bodě $x = 1$. Můžeme ale s použitím věty 3.1.8 postupovat takto:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \,\mathrm{d}x \overset{\text{věta } 3.1.8}{=} \int_{\frac{1}{e}}^{1} |\ln x| \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} |\ln x| \,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} \ln x \,\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{příklad } 2.5.5}{=} -[x \ln x]_{\frac{1}{e}}^{1} + [x]_{\frac{1}{e}}^{1} + [x \ln x]_{1}^{e} - [x]_{1}^{e} = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Příklad 3.2.10. Vypočítejte $\displaystyle\int_{1}^{n+1} \ln [x] \,\mathrm{d}x$, kde $[x]$ značí dolní celou část čísla x a platí $n \in \mathbb{N}$.

Protože integrujeme funkci, která je konstantní na intervalech $\langle k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, rozdělíme pomocí věty 3.1.8 obor integrace na intervaly $\langle k, k+1\rangle$, $k \in \mathbb{N}$. Na každém z těchto intervalů potom použijeme větu 3.1.11. Dostaneme

$$\int_{1}^{n+1} \ln [x] \,\mathrm{d}x \overset{\text{věta } 3.1.8}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln [x] \,\mathrm{d}x \overset{\text{věta } 3.1.11}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln k \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \ln k \int_{k}^{k+1} 1 \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!).$$

Příklad 3.2.11. Vypočítejte $\displaystyle\int_{0}^{3} x\,[x \operatorname{sgn}(2-x)] \,\mathrm{d}x$, kde $[x]$ značí dolní celou část čísla x.

Předpis integrované funkce můžeme na částech intervalu $\langle 0, 3\rangle$ následujícím způsobem zjednodušit:

$$x\,[x \operatorname{sgn}(2-x)] = \begin{cases} 0, \ x \in \langle 0, 1), \\ x, \ x \in \langle 1, 2), \\ 0, \ x = 2, \\ -3x, \ x \in (2, 3\rangle. \end{cases}$$

S využitím vět 3.1.8 a 3.1.11 proto dostaneme

$$\int_{0}^{3} x\,[x \operatorname{sgn}(2-x)] \,\mathrm{d}x \overset{\text{věta } 3.1.8}{=} \int_{0}^{1} x\,[x \operatorname{sgn}(2-x)] \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} x\,[x \operatorname{sgn}(2-x)] \,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} x\,[x \operatorname{sgn}(2-x)] \,\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{věta } 3.1.11}{=} \int_{0}^{1} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} x \,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (-3x) \,\mathrm{d}x = [\text{konst.}]_{0}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} + \left[\frac{-3x^2}{2}\right]_{2}^{3} = -6.$$

Příklad 3.2.12. Dokažte, že pro každou funkci f, která je spojitá na $\langle 0, 1\rangle$, platí

$$\int_{0}^{1} f\left(x^2\right) \,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f\left((x-1)^2\right) \,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

Protože grafy funkcí φ a ψ, kde $\varphi(x) = x^2$ a $\psi(x) = (x-1)^2$, jsou na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ osově souměrné podle přímky $x = \frac{1}{2}$, jsou na $\langle 0, 1\rangle$ podle stejné osy souměrné i grafy integrandů ve vztahu (3.1). Obsah plochy mezi grafem integrandu pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ a osou x je proto pro oba integrandy stejný. Podle věty 5.1.1 tudíž rovnost (3.1) platí.

Zadanou rovnost ještě dokážeme jiným způsobem, a to tak, že pomocí substituce integrál na levé straně převedeme na integrál na pravé straně. Platí

$$\underbrace{\int_{0}^{1} f\left(x^2\right) \,\mathrm{d}x}_{\substack{x=-t \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \\ x=0 \ \Rightarrow\ t=0,\ x=1 \ \Rightarrow\ t=-1}} = -\int_{0}^{-1} f\left(t^2\right) \,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-1}^{0} f\left(t^2\right) \,\mathrm{d}t}_{\substack{t=s-1 \ \Rightarrow\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}s \\ t=-1 \ \Rightarrow\ s=0,\ t=0 \ \Rightarrow\ s=1}} = \int_{0}^{1} f\left((s-1)^2\right) \,\mathrm{d}s.$$

3.3 Výpočet limity posloupnosti převodem na integrál

Věta 3.3.1. Základní věta integrálního počtu

Nechť funkce f je definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když pro každou posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{+\infty}$ rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ takovou, že platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \nu(\sigma_n)=0$, je posloupnost $(I(f,\sigma_n))_{n=1}^{+\infty}$ konvergentní (viz definici 3.1.1).

V případě existence $\int_a^b f$ má každá výše zmíněná posloupnost $(I(f,\sigma_n))_{n=1}^{+\infty}$ limitu $\int_a^b f$.

Příklad 3.3.2. Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$.

Zadanou limitu spočítáme pomocí věty 3.3.1. Platí $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}=\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}$. Pokud podle definice 3.1.1 označíme $a=0$, $b=1$, $x_k=\frac{k}{n}$, $\Delta_k=\frac{1}{n}$, $f(x)=x$ a $c_k=x_k$, dostaneme podle věty 3.3.1

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

Příklad 3.3.3. Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

Zadanou limitu spočítáme pomocí věty 3.3.1. Platí

$$\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}.$$

Pokud podle definice 3.1.1 označíme $a=0$, $b=\pi$, $x_k=\frac{k\pi}{n}$, $\Delta_k=\frac{\pi}{n}$, $f(x)=\sin x$ a $c_k=x_k$, dostaneme podle věty 3.3.1

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi=\frac{2}{\pi}.$$

Příklad 3.3.4. Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

Zadanou limitu spočítáme pomocí věty 3.3.1. Platí

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^n\frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}}_{\to1}\cdot\sum_{k=1}^n\frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\cdot\frac{\pi}{n}. \tag{3.2}$$

Pokud podle definice 3.1.1 označíme $a=0$, $b=\pi$, $x_k=\frac{k\pi}{n}$, $\Delta_k=\frac{\pi}{n}$, $f(x)=\frac{1}{2+\cos x}$ a $c_k=x_k$, dostaneme z rovnosti (3.2) a věty 3.3.1

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^n\frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=1\cdot\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\cdot\frac{\pi}{n}=\int_0^\pi\frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x\overset{\text{příklad 2.10.5}}{=}\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Cvičení

Cvičení 3.3.1: Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle\beta,\beta+\alpha\rangle$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, $\beta\in\mathbb{R}$. Pomocí věty 3.3.1 ukažte, že platí

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{\alpha k+\beta n}{n}\right)\cdot\frac{\alpha}{n}=\int_\beta^{\beta+\alpha}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\alpha f(\beta+x)\,\mathrm{d}x.$$

3.4 Derivace určitého integrálu

Věta 3.4.1. Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom funkce $F(x)=\int_a^x f$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a v bodech $x_0\in\langle a,b\rangle$ spojitosti funkce f existuje $F'(x_0)$ a platí $F'(x_0)=f(x_0)$.

Poznámka 3.4.2. Ze vzorce pro derivaci složené funkce plyne následující vzorec pro derivaci integrálu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = b'(x)\cdot f(b(x)) - a'(x)\cdot f(a(x)).$$

Příklad 3.4.3. Vypočítejte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t$.

Podle poznámky 3.4.2 či věty 3.4.1 platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{(meze integrálu neobsahují } x\text{)},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} b \quad \text{(v horní mezi integrálu je } b\text{)},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_b^a \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t = -\operatorname{arctg} a.$$

Příklad 3.4.4. Vypočítejte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\ln x}(1+t)^2\,\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{e^{2x}}^{e^{3x}}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\ln x}\left(\int_0^t \cos s\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$.

Podle poznámky 3.4.2 platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\ln x}(1+t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot(1+\ln x)^2,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{e^{2x}}^{e^{3x}}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 3e^{3x}\frac{1}{e^{3x}} - 2e^{2x}\frac{1}{e^{2x}} = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\ln x}\left(\int_0^t \cos s\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot\int_0^{\ln x}\cos s\,\mathrm{d}s = \frac{\sin(\ln x)}{x}.$$

Příklad 3.4.5. Vypočítejte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x x\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

K výpočtu derivace nemůžeme ihned použít větu 3.4.1 či poznámku 3.4.2, protože integrand obsahuje x. Nejdříve proto x z integrandu odstraníme. Platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\int_0^x x\cos(xt)\,\mathrm{d}t}_{\substack{xt=s\ \Rightarrow\ x\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}s\\ t=0\ \Rightarrow\ s=0,\ t=x\ \Rightarrow\ s=x^2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\cos s\,\mathrm{d}s \overset{\text{poznámka 3.4.2}}{=} 2x\cdot\cos(x^2).$$

Příklad 3.4.6. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln\left(t^2+1\right)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}\sin\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln\left(t^2+1\right)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}\sin\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\ln\left(x^4+1\right)}{\cos x\cdot\sin\left(\sin^2 x\right)} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^4+1\right)}{x^4}\cdot\frac{\sin^2 x}{\sin\left(\sin^2 x\right)}\cdot\frac{x^4\cdot x}{\sin^2 x} = 0.$$

Cvičení

Cvičení 3.4.1: Vypočítejte $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\left(\int_0^{xt} e^{s^2}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$. (Nejdříve z integrandu vnějšího integrálu substitucí odstraňte x.)

3.5 Věty o střední hodnotě integrálu

Věta 3.5.1. 1. věta o střední hodnotě

Nechť funkce f a g jsou definované na intervalu $\langle a,b\rangle$, f je integrovatelná a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a fg je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Potom existuje číslo $\mu \in \left\langle \inf_{\langle a,b\rangle} g, \sup_{\langle a,b\rangle} g \right\rangle$ takové, že platí $\int_a^b fg = \mu \int_a^b f$.

Pokud je funkce g navíc spojitá na $\langle a,b\rangle$, potom existuje $c \in \langle a,b\rangle$ takové, že platí $\int_a^b fg = g(c) \int_a^b f$.

Věta 3.5.2. 2. věta o střední hodnotě

Nechť funkce f, g jsou definované a integrovatelné na $\langle a,b\rangle$ a nechť g je monotónní na $\langle a,b\rangle$. Potom existuje číslo $\xi \in \langle a,b\rangle$ takové, že platí

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f.$$

Poznámka 3.5.3. Vhodnou změnou definice funkce g v některém z bodů a a b můžeme ve větě 3.5.2 dostat jednodušší vztah pro $\int_a^b fg$ (viz větu 3.1.11).

Příklad 3.5.4. Vypočítejte $\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \displaystyle\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^x}{x} \sin x \,\mathrm{d}x$.

K výpočtu použijeme 1. větu o střední hodnotě, ve které zvolíme $f(x) = e^x$ a $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. Funkce f je nezáporná a funkce g je pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ spojitá na intervalu $\langle \varepsilon, 2\varepsilon\rangle$. Pro každé pevně zvolené $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ proto podle věty 3.5.1 existuje číslo $c = c(\varepsilon) \in \langle \varepsilon, 2\varepsilon\rangle$ (tím zdůrazňujeme, že c závisí na ε) takové, že platí

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^x}{x} \sin x \,\mathrm{d}x \overset{\text{věta 3.5.1}}{=} \frac{\sin c(\varepsilon)}{c(\varepsilon)} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} e^x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin c(\varepsilon)}{c(\varepsilon)} \left[e^x\right]_\varepsilon^{2\varepsilon} = \frac{\sin c(\varepsilon)}{c(\varepsilon)} \left(e^{2\varepsilon} - e^\varepsilon\right) \overset{\varepsilon\to 0_+}{\longrightarrow} 0.$$

V závěrečném výpočtu limity jsme využili fakt, že číslo c splňuje nerovnosti $\varepsilon \le c(\varepsilon) \le 2\varepsilon$, takže platí $\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} c(\varepsilon) = 0$.

Nyní zadanou limitu spočítáme ještě pomocí 2. věty o střední hodnotě. Zvolme $f(x) = \frac{1}{x}$ a $\tilde{g}(x) = e^x \sin x$. Protože funkce $\tilde{g}$ je pro dostatečně malá $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ součinem dvou funkcí, které jsou ostře rostoucí a nezáporné na intervalu $\langle \varepsilon, 2\varepsilon\rangle$, můžeme funkci g ve větě 3.5.2 pro každé pevně zvolené ε definovat předpisem

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = \varepsilon, \\ \tilde{g}(x), & x \in (\varepsilon, 2\varepsilon\rangle . \end{cases}$$

Podle vět 3.5.2 a 3.1.11 proto pro každé pevně zvolené ε existuje číslo $\xi = \xi(\varepsilon) \in \langle \varepsilon, 2\varepsilon\rangle$ takové, že platí

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^x}{x} \sin x \,\mathrm{d}x &\overset{\text{věta 3.1.11}}{=} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \overset{\text{věta 3.5.2}}{=} \left(0 \cdot \int_\varepsilon^{\xi(\varepsilon)} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + e^{2\varepsilon} \sin(2\varepsilon) \int_{\xi(\varepsilon)}^{2\varepsilon} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{2\varepsilon} \sin(2\varepsilon) \cdot \ln\left(\frac{2\varepsilon}{\xi(\varepsilon)}\right) \overset{\varepsilon\to 0_+}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Na předchozím řádku jsme využili to, že máme $\frac{2\varepsilon}{\xi(\varepsilon)} \in \langle 1, 2\rangle$.

Příklad 3.5.5. Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$, $p \in \mathbb{N}$.

Nejdříve limitu spočítáme pomocí 1. věty o střední hodnotě. Zvolme $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = \sin x$. Pro každou pevně zvolenou dvojici čísel n a p podle věty 3.5.1 existuje číslo $c = c(n,p) \in \langle n, n+p\rangle$ takové, že platí

$$\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x \overset{\text{věta 3.5.1}}{=} \sin(c(n,p)) \int_n^{n+p} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \sin(c(n,p)) \ln\left(\frac{n+p}{n}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nyní zadanou limitu spočítáme ještě pomocí 2. věty o střední hodnotě. Zvolme $f(x) = \sin x$ a $\tilde{g}(x) = \frac{1}{x}$. Protože funkce $\tilde{g}$ je ostře klesající a nezáporná na $\mathbb{R}^+$, můžeme funkci g ve větě 3.5.2 pro každou pevně zvolenou dvojici čísel n a p definovat předpisem

$$g(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x), \;\; x \in \langle n, n+p) \,, \\ 0, \;\; x = n+p. \end{cases}$$

Podle vět 3.5.2 a 3.1.11 pro každou pevně zvolenou dvojici čísel n a p existuje číslo $\xi = \xi(n,p) \in \langle n, n+p \rangle$ takové, že platí

$$\begin{aligned} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x &\overset{\text{věta } 3.1.11}{=} \int_n^{n+p} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \overset{\text{věta } 3.5.2}{=} \left(\frac{1}{n} \int_n^{\xi(n,p)} \sin x \, \mathrm{d}x + 0 \cdot \int_{\xi(n,p)}^{n+p} \sin x \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(-\cos(\xi(n,p)) + \cos(n) \right) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Cvičení

Cvičení 3.5.1: Vypočítejte $\lim\limits_{x \to 0} \int_0^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \left(\int_0^{xt} e^{s^2} \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t$ pomocí věty 3.5.1 i pomocí věty 3.5.2.

Cvičení 3.5.2: Vypočítejte $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon x^3 + 1} \mathrm{d}x$, a to a) pomocí věty 3.5.1, b) pomocí věty 3.5.2, c) pomocí věty 3.4.1, d) pouze pomocí věty o limitě sevřené funkce.

Kapitola 4

Zobecněný Riemannův integrál

4.1 Úvodní informace

Definice 4.1.1. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, a nechť pro každé $x \in (a, b)$ existuje určitý Riemannův integrál $\int_a^x f$. Pokud existuje konečná limita $\lim\limits_{x \to b_-} \displaystyle\int_a^x f$, nazýváme tuto limitu zobecněným Riemannovým integrálem funkce f od a do b. Používáme značení $\lim\limits_{x \to b_-} \displaystyle\int_a^x f = \int_a^b f$ a říkáme, že $\int_a^b f$ existuje či konverguje.

Pokud neexistuje konečná limita $\lim\limits_{x \to b_-} \displaystyle\int_a^x f$, říkáme, že zobecněný Riemannův integrál funkce f od a do b neexistuje či diverguje.

Pokud pro všechna $x \in (a, b)$ existuje určitý Riemannův integrál $\int_a^x f$, ale $\int_a^b f$ jako určitý Riemannův integrál neexistuje, nazýváme bod b kritickým bodem.

Podobně zobecněný Riemannův integrál definujeme v případě, že platí $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a určitý Riemannův integrál $\int_x^b f$ existuje pro všechna $x \in (a, b)$.

Poznámka 4.1.2. Definice 4.1.1 rozšiřuje definici integrálu na případy, kdy f na intervalu od a do b není omezená nebo interval od a do b není omezený. Při rozšiřování určitého Riemannova integrálu $\int_a^x f$, $x \in (a, b)$, na integrál $\int_a^b f$ mohou nastat následující situace:

1. $\lim\limits_{x \to b_-} \displaystyle\int_a^x f$ neexistuje. Například

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} [\sin t]_0^x = \lim_{x \to +\infty} \sin x.$$

2. $\lim\limits_{x \to b_-} \displaystyle\int_a^x f$ existuje, ale není reálná. Například

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x 1 \,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} [t]_0^x = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

3. $\lim\limits_{x \to b_-} \displaystyle\int_a^x f$ existuje a je reálná. Například

$$\lim_{x \to 0_-} \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \,\mathrm{d}t = \lim_{x \to 0_-} \left[\frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^x = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0_-} \left(x^{\frac{2}{3}} - 1\right) = -\frac{3}{2}.$$

Ve třetím z předchozích případů říkáme, že $\int_a^b f$ existuje. V ostatních říkáme, že $\int_a^b f$ neexistuje.

Definice 4.1.3. Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Pokud existují čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, taková, že platí $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ a pro všechna $k = 1, \ldots, n$ existuje zobecněný Riemannův integrál $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ ve smyslu definice 4.1.1, říkáme, že zobecněný Riemannův integrál $\int_a^b f$ konverguje či existuje, a definujeme $\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f$.

V opačném případě říkáme, že zobecněný Riemannův integrál $\int_a^b f$ diverguje či neexistuje.

Věta 4.1.4. Nechť existují zobecněné Riemannovy integrály $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$. Potom platí:

1. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje integrál $\int_a^b (\alpha f + g)$ a platí $\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$.
2. Pro každé $c \in (a, b)$ existují integrály $\int_a^c f$ a $\int_c^b f$ a platí $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. Pokud pro všechna $x \in (a, b)$ platí $f(x) \geq g(x)$, potom je $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

4.2 Výpočet zobecněného Riemannova integrálu

Věta 4.2.1. Newtonova formule pro zobecněný Riemannův integrál

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, a nechť pro každé $x \in (a, b)$ existuje určitý Riemannův integrál $\int_a^x f$. Nechť dále F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) a existuje konečná limita $\lim\limits_{x \to a_+} F(x)$. Potom platí

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x) \overset{\text{označení}}{=} [F(x)]_a^b,$$

pokud alespoň jedna z limit $\lim_{x \to b_-} F(x)$ a $\int_a^b f$ (viz definici 4.1.1) existuje.

Věta 4.2.2. Per partes pro zobecněný Riemannův integrál

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, a nechť pro každé $x \in (a, b)$ existují určité Riemannovy integrály $\int_a^x f'g$ a $\int_a^x fg'$ a nechť dále existuje konečná limita $\lim\limits_{x \to b_-} f(x)g(x)$. Potom platí

$$\int_a^b f'g = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b fg',$$

pokud alespoň jedna z limit $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$ (viz definici 4.1.1) existuje.

Věta 4.2.3. Substituce v zobecněném Riemannově integrálu

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha < \beta$, a nechť funkce φ je ostře monotónní a má spojitou derivaci na $\langle \alpha, \beta)$ a nechť f je spojitá na $\varphi(\langle \alpha, \beta))$. Potom platí

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\lim_{\beta_-} \varphi} f,$$

pokud alespoň jedna z limit $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ a $\int_{\varphi(\alpha)}^{\lim_{\beta_-} \varphi} f$ (viz definici 4.1.1) existuje.

Poznámka 4.2.4. Vidíme, že věty 4.2.1, 4.2.2 a 4.2.3 můžeme použít i tehdy, když některý z objektů $\int_a^b f$, $\int_a^b f'g$, $\int_a^b fg'$, $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ a $\int_{\varphi(\alpha)}^{\lim_{\beta_-} \varphi} f$ je roven $+\infty$ či $-\infty$ (tedy není zobecněným Riemannovým integrálem).

Příklad 4.2.5. Vypočítejte $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{d}x$ (ukázka významu definic 4.1.1 a 4.1.3).

Nejdříve zdůrazněme, že **neplatí**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} x \,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-t}^{t} = \lim_{t\to+\infty} 0 = 0.$$

Zobecněný Riemannův integrál je definován jiným způsobem (viz definice 4.1.1 a 4.1.3).

Vidíme, že zadaný integrál neexistuje jako určitý Riemannův kvůli tomu, že v obou jeho mezích je nekonečno. Podle definice 4.1.3 integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} x \,\mathrm{d}x$ konverguje, pokud existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že integrály $\int_{-\infty}^{a} x \,\mathrm{d}x$ a $\int_{a}^{+\infty} x \,\mathrm{d}x$ existují ve smyslu definice 4.1.1.

Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} x \,\mathrm{d}x$ samozřejmě můžeme rozdělit na více integrálů než na dva, ale vždy pouze dva z nich budou mít nějaký kritický bod (viz definici 4.1.1) a ostatní budou existovat jako určité Riemannovy. Rozdělení na větší počet integrálů je proto v tomto případě zbytečné.

Vzhledem k úvaze v předchozím odstavci říkáme, že integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} x \,\mathrm{d}x$ má dva kritické body, a sice $+\infty$ a $-\infty$.

Podle definice 4.1.1 pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_{a}^{+\infty} x \,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} x \,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{a}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = +\infty,$$

takže integrál $\int_{a}^{+\infty} x \,\mathrm{d}x$ nezávisle na zvoleném $a \in \mathbb{R}$ neexistuje. Podle definice 4.1.3 proto zadaný integrál diverguje.

Příklad 4.2.6. Vypočítejte $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ (ukázka významu definic 4.1.1 a 4.1.3).

Při výpočtu budeme postupovat stejným způsobem jako v předchozím příkladě 4.2.5. Podle definice 4.1.3 integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ konverguje, pokud existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že integrály $\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ a $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ existují ve smyslu definice 4.1.1.

Podle definice 4.1.1 pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} [\operatorname{arctg} x]_{a}^{t} = \lim_{t\to+\infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a,\\ \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{a} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} [\operatorname{arctg} x]_{t}^{a} = \lim_{t\to-\infty} (\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} t) = \operatorname{arctg} a + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Oba dva integrály $\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ a $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ tedy existují pro libovolně zvolené $a \in \mathbb{R}$. Zadaný integrál proto existuje a platí $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \pi$.

Příklad 4.2.7. Vypočítejte $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x$.

Zadaný integrál má jeden kritický bod — nulu —, který je zároveň krajním bodem integračního oboru. Integrál proto nemusíme dělit ve smyslu definice 4.1.3. Výpočtem pomocí věty 4.2.2 dostaneme

$$\underbrace{\int_{0}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x}_{\substack{f'(x)=1 \;\Rightarrow\; f(x)=x \\ g(x)=\ln x \;\Rightarrow\; g'(x)=\frac{1}{x}}} \overset{\text{p.p.}}{=} [x \ln x]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = 1 \cdot \ln 1 - \underbrace{\lim_{x\to0_+} (x \ln x)}_{=0} - [x]_{0}^{1} = -1.$$

Příklad 4.2.8. Vypočítejte $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x + a^2}} \,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Zadaný integrál má jeden kritický bod, a to $+\infty$. Můžeme tedy pomocí věty 4.2.3 rovnou počítat

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x+a^2}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\sqrt{e^x+a^2}=t\ \Rightarrow\ e^x=t^2-a^2\\ \mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-a^2}\,\mathrm{d}t}} = 2\int_{\sqrt{1+a^2}}^{+\infty} \frac{1}{t^2-a^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{1+a^2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{t-a} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{t+a}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left[\ln\left(\frac{t-a}{t+a}\right)\right]_{\sqrt{1+a^2}}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a}\ln 1 - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{1+a^2}-a}{\sqrt{1+a^2}+a}\right) = \ldots = \frac{2}{a}\ln\left(\sqrt{1+a^2}+a\right).$$

Příklad 4.2.9. Vypočítejte $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (důležitý referenční integrál).

Pro $\alpha = 1$ má zadaný integrál jeden kritický bod, a to nulu. Platí

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0_+} [\ln x]_t^1 = \ln 1 - \lim_{t\to 0_+} \ln t = +\infty.$$

Pro $\alpha \neq 1$ má zadaný integrál nejvýše jeden kritický bod — nulu (pro $\alpha < 0$ existuje jako určitý Riemannův). Platí

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0_+}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_t^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{t\to 0_+} t^{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1,\\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1.\end{cases}$$

Vidíme tedy, že pro $\alpha < 1$ platí $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}$ a pro $\alpha \geq 1$ zadaný integrál neexistuje.

Příklad 4.2.10. Vypočítejte $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (důležitý referenční integrál).

Zadaný integrál má jeden kritický bod, a to $+\infty$.

Pro $\alpha = 1$ platí

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \ln t - \ln 1 = +\infty.$$

Pro $\alpha \neq 1$ platí

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^t = \left(\frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{t\to+\infty} t^{1-\alpha}\right) - \frac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1,\\ +\infty, & \alpha < 1.\end{cases}$$

Vidíme tedy, že pro $\alpha > 1$ platí $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ a pro $\alpha \leq 1$ zadaný integrál neexistuje.

4.3 Vyšetřování konvergence zobecněného Riemannova integrálu

Tato sekce ukazuje použití některých technik, pomocí kterých můžeme rozhodnout, jestli zadaný integrál $\int_a^b f$ konverguje, aniž bychom se jej museli pokoušet počítat.

Doporučuji Vám, abyste si při čtení této sekce nejdříve zkusili úvodní rozcvičku.

4.3.1 Úvodní rozcvička

Při vyšetřování konvergence integrálu se často používá technika, při které k zadané funkci f a bodu a hledáme funkci g, která má co nejjednodušší předpis a pro kterou je $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ nějaké vhodné číslo. Stejná technika se používá i při vyšetřování konvergence řad (viz kapitolu 6). Nejdříve si proto zmíněné hledání funkce g na několika příkladech vyzkoušíme.

Příklad 4.3.1.1. Pro zadanou funkci f, bod a a směr přibližování $s \in \{+,-\}$ k bodu a nalezněte co nejjednodušší funkci g ve tvaru $g(x) = \alpha(\beta x - \gamma)^\delta$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, pro kterou platí $\lim\limits_{x\to a_s} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

1. $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $s = +$.

   Pokud zvolíme $g(x) = x$, máme $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2. $f(x) = \sin\left(\sqrt{\ln(1+\operatorname{tg} x)}\right)$, $a = 0$, $s = +$.

   Protože platí

$$\lim_{x\to 0_+} \sin\left(\sqrt{\ln(1+\operatorname{tg} x)}\right) = \lim_{x\to 0_+} \underbrace{\frac{\sin\left(\sqrt{\ln(1+\operatorname{tg} x)}\right)}{\sqrt{\ln(1+\operatorname{tg} x)}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{\ln(1+\operatorname{tg} x)}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{x}}}_{\to 1} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x\to 0_+} \sqrt{x},$$

   můžeme funkci g zvolit jako $g(x) = \sqrt{x}$.

3. $f(x) = \sqrt{x} - 1$, $a = 1$, $s = +$.

   Protože platí

$$\lim_{x\to 1_+} (\sqrt{x}-1) = \lim_{x\to 1_+} (\sqrt{x}-1)\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1_+} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1_+} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}_{\to\frac{1}{2}} \cdot (x-1) = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{2}(x-1),$$

   můžeme funkci g zvolit jako $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)$.

   Funkci g můžeme hledat například také následujícím způsobem:

$$\underbrace{\lim_{x\to 1_+} \frac{\sqrt{x}-1}{\alpha(\beta x-\gamma)^\delta}}_{\substack{\text{pro } \beta=\gamma,\ \delta>0 \text{ můžeme} \\ \text{použít větu 1.3.1}}} \overset{\substack{\text{L'H při} \\ \beta=\gamma,\ \delta>0}}{=} \lim_{x\to 1_+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\alpha\beta^\delta\delta(x-1)^{\delta-1}} = \frac{1}{2\alpha\beta^\delta\delta} \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{(x-1)^{\delta-1}} \overset{\text{pro } \delta=1}{=} \frac{1}{2\alpha\beta}.$$

   Limitu 1 tedy dostaneme například tehdy, když zvolíme $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta = 1$ (z čehož plyne $\gamma = 1$). Dostáváme tak stejnou funkci g jako výše.

4. $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$, $a = 0$, $s = +$.

   Protože počítáme limitu v nule, hledaná funkce g bude mít tvar $g(x) = \alpha x^\delta$, $\alpha \neq 0$. Platí

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}}{\alpha x^\delta} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0_+} \frac{x - \sin x}{x^{\delta+1}\sin x} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0_+} \frac{x-\sin x}{(x^{\delta+2})\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0_+} \frac{x-\sin x}{x^{\delta+2}}$$
$$\overset{\substack{\text{L'H pro} \\ \delta\neq -2}}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0_+} \frac{1-\cos x}{(\delta+2)x^{\delta+1}} \overset{\substack{\text{L'H pro} \\ \delta\neq -1}}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{(\delta+2)(\delta+1)x^\delta} \overset{\delta=1,\ \alpha=\frac{1}{6}}{=} 1.$$

   Protože pro $\alpha = \frac{1}{6}$ a $\delta = 1$ předchozí soustava rovností platí, můžeme funkci g zvolit jako $g(x) = \frac{x}{6}$.

5. $f(x) = \frac{3x^3+x^2-x+1}{6x^5+7x^2+10}$, $a = +\infty$, $s = -$.

   Protože platí

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3+x^2-x+1}{6x^5+7x^2+10} = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\frac{3x^3+x^2-x+1}{6x^5+7x^2+10}\cdot x^2}_{\to\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{x^2},$$

   můžeme funkci g zvolit jako $g(x) = \frac{1}{2x^2}$.

6. $f(x)=\frac{1}{\operatorname{arccotg}^p(x-1)}$, $p\in\mathbb{R}$, $a=+\infty$, $s=-$.
Protože platí

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\operatorname{arccotg}^p(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{(x-1)^p\cdot\operatorname{arccotg}^p(x-1)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{(x-1)^p}{x^p}}_{\to 1}\cdot x^p=\lim_{x\to+\infty}x^p,$$

můžeme funkci g pro libovolné p zvolit jako $g(x)=x^p$.

Cvičení

V následujících cvičeních pro zadanou funkci f, bod a a směr přibližování $s\in\{+,-\}$ k bodu a nalezněte co nejjednodušší funkci g ve tvaru $g(x)=\alpha(\beta x-\gamma)^\delta$, kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, pro kterou platí $\lim_{x\to a_s}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Cvičení 4.3.1.1: $f(x)=\frac{1}{x^3+1}$, $a=-1$, $s=+$.

Cvičení 4.3.1.2: $f(x)=\ln(\cos x)$, $a=0$, $s=+$.

Cvičení 4.3.1.3: $f(x)=x\operatorname{arctg}x$, $a=+\infty$, $s=-$.

Cvičení 4.3.1.4: $f(x)=x\left(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right)$, $a=+\infty$, $s=-$.

Cvičení 4.3.1.5: $f(x)=\frac{1}{\sinh\sqrt{\cos x}}$, $a=\frac{\pi}{2}$, $s=-$.

Cvičení 4.3.1.6: $f(x)=\operatorname{tg}\left(\ln\left(1+\frac{x^2}{x^3+x+1}\right)\right)$, $a=0$, $s=+$.

Cvičení 4.3.1.7: $f(x)=\frac{4^x-1}{x^2+x}$, $a=0$, $s=+$.

Cvičení 4.3.1.8: $f(x)=\ln\left(\left(\frac{\sqrt{x}+x}{x+2}\right)^{x^p+1}\right)$, $p\in\mathbb{R}$, $a=+\infty$, $s=-$.

Cvičení 4.3.1.9: $f(x)=\frac{1}{x^6\sqrt[p]{x^2+x+3}}$, $p\in\mathbb{N}$, $a=+\infty$, $s=-$.

Cvičení 4.3.1.10: $f(x)=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\right)^p}$, $p\in\mathbb{R}$, $a=\frac{\pi}{4}$, $s=+$.

Cvičení 4.3.1.11: $f(x)=\frac{1}{x-1-\arccos x}$, $a=1$, $s=-$.

Cvičení 4.3.1.12: $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x+2}\right)$, $a=+\infty$, $s=-$.

Cvičení 4.3.1.13: $f(x)=\int_1^{x^2}e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, $a=1$, $s=+$.

4.3.2 Vyšetřování konvergence integrálu nezáporné funkce

Věta 4.3.2.2. Srovnávací kritérium

Nechť $a\in\mathbb{R}$ a $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, a nechť funkce f a g pro všechna $x\in\langle a,b)$ splňují $0\le f(x)\le g(x)$ a nechť pro každé $x\in(a,b)$ existují určité Riemannovy integrály $\int_a^x f$, $\int_a^x g$. Potom platí:

1. Když $\int_a^b g$ konverguje, potom $\int_a^b f$ konverguje.

2. Když $\int_a^b f$ diverguje, potom $\int_a^b g$ diverguje.

Věta 4.3.2.3. Srovnávací kritérium (limitní verze)

Nechť $a\in\mathbb{R}$ a $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, a nechť funkce f je nezáporná a funkce g kladná na $\langle a,b)$. Nechť pro každé $x\in(a,b)$ existují určité Riemannovy integrály $\int_a^x f$, $\int_a^x g$ a existuje limita $\lim\limits_{x\to b_-}\frac{f(x)}{g(x)}=L$. Potom platí:

1. Když je $L < +\infty$ a zároveň $\int_a^b g$ konverguje, potom $\int_a^b f$ konverguje.
2. Když je $L > 0$ a zároveň $\int_a^b g$ diverguje, potom $\int_a^b f$ diverguje.
3. Když je $L \in (0, +\infty)$, potom $\int_a^b g$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_a^b f$.

Poznámka 4.3.2.4. O používání limitního tvaru srovnávacího kritéria

Předpokládejme, že chceme rozhodnout o konvergenci integrálu $\int_a^b f$, kde platí $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\lim_{b_-} f = +\infty$. Zároveň víme, že pro libovolné $x \in (a, b)$ existuje $\int_a^x f$ jako určitý Riemannův integrál.

Integrál $\int_a^b f$ budeme při používání kritéria 4.3.2.3 většinou srovnávat s integrálem

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} \, \mathrm{d}x, \tag{4.1}$$

který pro $\alpha < 1$ konverguje, jinak diverguje (což můžeme ověřit přímým výpočtem nebo tím, že ho substitucí $b - x = t$ a přičtením konstanty převedeme na integrál v příkladu 4.2.9). Všimněte si, že integrand integrálu (4.1) je speciálním případem funkce g v sekci 4.3.1.

Pokud tedy v kritériu 4.3.2.3 zvolíme jako funkci g integrand integrálu (4.1), budeme počítat limitu (označme ji L)

$$\lim_{x \to b_-} f(x)(b-x)^\alpha = L. \tag{4.2}$$

Nyní zvážíme, jestli můžeme hodnotu parametru α zvolit tak, aby platilo $L \in (0, +\infty)$. V takovém případě můžeme usuzovat na konvergenci i na divergenci integrálu $\int_a^b f$ (podle toho, jestli konverguje, nebo diverguje $\int_a^b g$). To se hodí v případech, kdy funkce f závisí na nějakém parametru.

Pokud takové α volit nelze, můžeme se ho pokusit tipnout tak, aby platilo $L < +\infty$ a zároveň integrál (4.1) konvergoval. V takovém případě můžeme usuzovat (pouze) na konvergenci $\int_a^b f$.

Pokud parametr α nelze volit předchozími dvěma způsoby, můžeme jeho hodnotu zkusit tipnout tak, aby platilo $L > 0$ a zároveň integrál (4.1) divergoval. V takovém případě můžeme usuzovat (pouze) na divergenci integrálu $\int_a^b f$.

V průběhu výpočtu limity (4.2) je velmi vhodné celý součin postupně zjednodušovat použitím věty o aritmetice limit (podobně jako v sekci 4.3.1).

Obdobně budeme postupovat i v případech, kdy integrál $\int_a^b f$ bude vypadat jinak než v předchozích odstavcích. Pokud například bude platit $b = +\infty$, budeme srovnávat s integrálem

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x,$$

který pro $\alpha > 1$ konverguje, jinak diverguje (viz příklad 4.2.10).

Pokud kritickým bodem integrálu $\int_a^b f$ nebude b, ale $a \in \mathbb{R}$, budeme srovnávat s integrálem

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} \, \mathrm{d}x.$$

Příklad 4.3.2.5. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x$.

Zadaný integrál má jediný kritický bod, a sice jedničku. Postupujme přesně podle poznámky 4.3.2.4. Protože platí $a = 0$, $b = 1$, budeme srovnávat s integrálem (4.1) ve tvaru $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} \, \mathrm{d}x$. Limita (4.2) potom bude

$$\lim_{x \to 1_-} \frac{(1-x)^\alpha}{1-x^2} = \lim_{x \to 1_-} \frac{1}{1+x} \frac{(1-x)^\alpha}{1-x} = \lim_{x \to 1_-} \frac{1}{1+x} \cdot \lim_{x \to 1_-} \frac{(1-x)^\alpha}{1-x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 1_-} \frac{(1-x)^\alpha}{1-x} = L.$$

Zvolíme-li nyní $\alpha = 1$, dostaneme $L = \frac{1}{2}$, takže podle kritéria 4.3.2.3 zadaný integrál diverguje.

Pokud bychom zvolili $\alpha > 1$, dostali bychom $L = 0$. Protože by však $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,dx$ divergoval, nemohli bychom podle kritéria 4.3.2.3 o zadaném integrálu nic říci.

Podobná situace by nastala, pokud bychom zvolili $\alpha < 1$. V tomto případě by $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,dx$ konvergoval a zároveň by platilo $L = +\infty$, takže o zadaném integrálu bychom podle kritéria 4.3.2.3 opět nemohli nic říci.

Příklad 4.3.2.6. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^\pi \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

Zadaný integrál má jediný kritický bod, a sice π. Postupujme opět přesně podle poznámky 4.3.2.4. Protože platí $a = 1$, $b = \pi$, bude mít srovnávací integrál (4.1) tvar $\int_1^\pi \frac{1}{(\pi-x)^\alpha}\,dx$. Limita (4.2) proto bude

$$\underbrace{\lim_{x\to\pi_-} \frac{(\pi-x)^\alpha}{\sqrt{\sin x}}}_{\pi-x=y\ \Rightarrow\ y\to 0_+} = \lim_{y\to 0_+} \frac{y^\alpha}{\sqrt{\sin(\pi-y)}} = \lim_{y\to 0_+} \frac{y^\alpha}{\sqrt{\sin y}} = \lim_{y\to 0_+} \frac{y^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{y}}{\sqrt{\sin y}} = \lim_{y\to 0_+} y^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} = L.$$

Nyní můžeme v závislosti na volbě parametru α dostat následující výsledky:

- Pro $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ je $L = +\infty$ a $\int_1^\pi \frac{1}{(\pi-x)^\alpha}\,dx$ konverguje. V tomto případě o zadaném integrálu nemůžeme nic říci.
- Pro $\alpha = \frac{1}{2}$ je $L = 1$ a $\int_1^\pi \frac{1}{(\pi-x)^\alpha}\,dx$ opět konverguje. Zjišťujeme, že zadaný integrál konverguje.
- Pro $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ je $L = 0$ a $\int_1^\pi \frac{1}{(\pi-x)^\alpha}\,dx$ opět konverguje. Zjišťujeme, že zadaný integrál konverguje.
- Pro $\alpha \geq 1$ je $L = 0$ a $\int_1^\pi \frac{1}{(\pi-x)^\alpha}\,dx$ diverguje. O zadaném integrálu proto nemůžeme nic říci.

Příklad 4.3.2.7. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-\sqrt{x})^p}\,dx$, kde $p \in \mathbb{R}$.

Zadaný integrál má nejvýše jeden kritický bod, a sice jedničku (pro $p \leq 0$ jde o určitý Riemannův integrál). Postupujme opět přesně podle poznámky 4.3.2.4. Protože platí $a = 0$, $b = 1$, bude mít srovnávací integrál (4.1) tvar $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,dx$. Limita (4.2) proto bude

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1_-} \frac{(1-x)^\alpha}{(1-\sqrt{x})^p} &= \lim_{x\to 1_-} \frac{(1-x)^\alpha}{(1-\sqrt{x})^p}\,\frac{(1+\sqrt{x})^p}{(1+\sqrt{x})^p} = \lim_{x\to 1_-} (1+\sqrt{x})^p \frac{(1-x)^\alpha}{(1-x)^p} \\ &= \lim_{x\to 1_-} (1+\sqrt{x})^p \cdot \lim_{x\to 1_-} \frac{(1-x)^\alpha}{(1-x)^p} = 2^p \cdot \lim_{x\to 1_-} \frac{(1-x)^\alpha}{(1-x)^p} = L.\end{aligned}$$

Zvolíme-li nyní $\alpha = p$, dostaneme $L = 2^p \in (0, +\infty)$. Zadaný integrál tedy konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\,dx$. Ten ale dobře známe. Pro $p < 1$ konverguje a pro $p \geq 1$ diverguje.

Všimněte si, že pokud v předchozím odstavci nezvolíme $\alpha = p$, diskuze se (hodně) protáhne. Pokud bychom zvolili například $\alpha = 2p$, dostali bychom pro $p > 0$ limitu $L = 0$. Podle kritéria 4.3.2.3 bychom se proto o zadaném integrálu něco dozvěděli pouze pro taková $p > 0$, pro která $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{2p}}\,dx$ konverguje, tedy pouze pro $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Pro $p \geq \frac{1}{2}$ bychom stále nic nevěděli. Volbou $\alpha = 2p$ bychom rovněž nic nezjistili pro $p < 0$, což nám ale vzhledem k diskuzi v úvodním odstavci příkladu nevadí.

Obdobně pokud bychom zvolili například $\alpha = 2$, integrál $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,dx$ by divergoval, takže bychom podle kritéria 4.3.2.3 o zadaném integrálu něco zjistili pouze v případě, že by vyšlo $L > 0$, tedy pouze pro $p \geq 2$. Pro $p < 2$ bychom stále nic nevěděli.

Příklad 4.3.2.8. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Zadaný integrál má dva kritické body, a sice nulu a $+\infty$. Rozdělíme jej proto například na integrály $I_1 = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}\,dx$ a $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Protože platí $\lim\limits_{x\to0_+}\left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, můžeme integrál I_1 srovnat s konvergentním integrálem $\int_0^1 \frac{-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (mínus je zde proto, aby integrandy v kritériu 4.3.2.3 měly stejné znaménko). Zjistíme tak, že I_1 konverguje.

Integrál I_2 srovnáme s (zatím obecným) integrálem $\int_1^{+\infty} -\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$. V kritériu 4.3.2.3 proto budeme počítat limitu

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}\cdot x^\alpha=\lim_{x\to+\infty} -\frac{\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to+\infty} -\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x^{-\frac{1}{2}-\alpha}}\overset{\text{pro }\alpha=\frac{3}{2}}{=}1.$$

Pro $\alpha=\frac{3}{2}$ tedy dostáváme limitu jedna a zároveň srovnávací integrál konverguje. I_2 proto také konverguje.

Zadaný integrál proto konverguje.

Příklad 4.3.2.9. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arccotg} x}{x^p\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$, kde $p\in\mathbb{R}$.

Zadaný integrál má pro obecné $p\in\mathbb{R}$ dva kritické body, a sice nulu a $+\infty$. Rozdělíme jej proto například na integrály $I_1=\int_0^1\frac{\operatorname{arccotg} x}{x^p\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$ a $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arccotg} x}{x^p\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$.

Integrál I_1 srovnáme s integrálem $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, kde číslo α opět zvolíme později. Limita v kritériu 4.3.2.3 proto bude

$$\lim_{x\to0_+}\frac{\operatorname{arccotg} x}{x^p\sqrt{x^2+4}}\cdot x^\alpha\overset{\text{pro }\alpha=p}{=}\frac{\pi}{4}.$$

Integrál I_1 proto konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$. Pro $p<1$ tedy konverguje a pro $p\geq1$ diverguje.

Integrál I_2 srovnáme s integrálem $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$. Limita v kritériu 4.3.2.3 bude

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arccotg} x}{x^p\sqrt{x^2+4}}\cdot x^\alpha=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x\cdot\operatorname{arccotg} x}_{\to1}\frac{x^\alpha}{x^{p+1}\cdot x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^{p+2}}\overset{\text{pro }\alpha=p+2}{=}1.$$

Integrál I_2 proto konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p+2}}\,\mathrm{d}x$. Pro $p>-1$ tedy konverguje a pro $p\leq-1$ diverguje.

Zadaný integrál tudíž pro $p\in(-1,1)$ konverguje a pro ostatní p diverguje.

Příklad 4.3.2.10. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}\,\mathrm{d}x$, kde $p\in\mathbb{R}$ (důležitý integrál).

Zadaný integrál má pro obecné $p\in\mathbb{R}$ dva kritické body, a sice nulu a $+\infty$. Rozdělíme jej proto například na integrály $I_1=\int_0^1x^pe^{-x}\,\mathrm{d}x$ a $I_2=\int_1^{+\infty}x^pe^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Integrál I_1 srovnáme s integrálem $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$. Limita v kritériu 4.3.2.3 bude

$$\lim_{x\to0_+}x^pe^{-x}\cdot x^\alpha\overset{\text{pro }\alpha=-p}{=}1.$$

Integrál I_1 proto konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_0^1\frac{1}{x^{-p}}\,\mathrm{d}x$. Pro $p>-1$ tedy konverguje a pro $p\leq-1$ diverguje.

Integrál I_2 srovnáme s integrálem $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$. Limita v kritériu 4.3.2.3 bude

$$\lim_{x\to+\infty}x^pe^{-x}\cdot x^\alpha\overset{\text{viz příklad 1.3.5}}{=}0$$

nezávisle na hodnotách čísel p a α. Pokud zvolíme například $\alpha=2$, bude předchozí výpočet limity představovat srovnání s konvergentním integrálem, takže z kritéria 4.3.2.3 zjistíme, že I_2 konverguje pro libovolné reálné p.

Zadaný integrál tedy pro $p>-1$ konverguje a pro $p\leq-1$ diverguje.

Příklad 4.3.2.11. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x}\,\mathrm{d}x$, kde $p, q \in \mathbb{R}$ (důležitý integrál).

Zadaný integrál má jeden kritický bod, a sice $+\infty$.

Uvažujme nejdříve $p > 1$. Pro každé takové p můžeme najít kladné číslo ε, pro které platí $p - \varepsilon > 1$. Vezměme toto ε a srovnejme zadaný integrál s konvergentním integrálem $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}\,\mathrm{d}x$. Limita v kritériu 4.3.2.3 bude

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-\varepsilon}}{x^p \ln^q x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\varepsilon \ln^q x} \overset{\text{viz cvičení 1.3.1}}{=} 0$$

nezávisle na hodnotě čísla q. Pro $p > 1$ proto zadaný integrál konverguje.

Nyní uvažujme $p < 1$. Pro každé takové p můžeme najít kladné číslo ε, pro které platí $p + \varepsilon < 1$. Vezměme toto ε a srovnejme zadaný integrál s divergentním integrálem $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{p+\varepsilon}}\,\mathrm{d}x$. Limita v kritériu 4.3.2.3 bude

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+\varepsilon}}{x^p \ln^q x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\varepsilon}{\ln^q x} \overset{\text{viz cvičení 1.3.1}}{=} +\infty$$

nezávisle na hodnotě čísla q. Pro $p < 1$ proto zadaný integrál diverguje.

Zbývá nám vyšetřit případ $p = 1$. Pro $p = 1$ zadaný integrál pomocí substituce $\ln x = t$ transformujeme na integrál $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^q}\,\mathrm{d}x$, který pro $q > 1$ konverguje a pro $q \leq 1$ diverguje.

Zadaný integrál proto pro $p > 1$ a pro $p = 1$ a $q > 1$ konverguje. Jinak diverguje.

Příklad 4.3.2.12. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^p)x^2}\,\mathrm{d}x$, kde $p \in \mathbb{R}$.

Zadaný integrál má jeden kritický bod, a sice $+\infty$.

Protože pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$ a všechna $p \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$\frac{1}{(1+x^p)x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

a zároveň integrál $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje, plyne z věty 4.3.2.2, že zadaný integrál pro všechna $p \in \mathbb{R}$ konverguje.

Cvičení

Cvičení 4.3.2.14: Řešte příklad 4.3.2.11 tak, že zadaný integrál substitucí převedete na integrál podobný tomu v příkladě 4.3.2.10.

Cvičení 4.3.2.15: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\int_{\frac{1}{x^3}}^{\frac{1}{x^2}} e^{t^2}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.2.16: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cvičení 4.3.2.17: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x}\,\mathrm{d}x$, kde $p, q \in \mathbb{R}$.

Cvičení 4.3.2.18: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x}\,\mathrm{d}x$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$.

Cvičení 4.3.2.19: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\arccos^p x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, kde $p \in \mathbb{R}$.

Cvičení 4.3.2.20: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x^p\sqrt{4+\sin x}}\,\mathrm{d}x$, kde $p \in \mathbb{R}$.

Cvičení 4.3.2.21: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sin x + x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.2.22: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\sin x)\cdot\sqrt[4]{\frac{\sqrt{x}+2}{x^5+3\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.2.23: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\left(\int_0^{xt} e^{s^2}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$. (Můžete použít stejný trik jako ve cvičení 3.4.1.)

Cvičení 4.3.2.24: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_{e^{\frac{2}{\pi}}}^{+\infty} \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.2.25: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+\sqrt{x})x^q}\,\mathrm{d}x$, kde $q\in\mathbb{R}$.

Cvičení 4.3.2.26: Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^p)x^q}\,\mathrm{d}x$, kde $p,q\in\mathbb{R}$.

4.3.3 Vyšetřování konvergence integrálu funkcí měnících znaménko

Věta 4.3.3.13. Nechť $a\in\mathbb{R}$ a $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, a nechť pro každé $x\in(a,b)$ existuje určitý Riemannův integrál $\int_a^x f$ a integrál $\int_a^b |f|$ konverguje. Potom konverguje i $\int_a^b f$ a platí $\int_a^b |f| \geq \left|\int_a^b f\right|$.

Definice 4.3.3.14. Nechť $a\in\mathbb{R}$ a $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, a nechť pro každé $x\in(a,b)$ existuje určitý Riemannův integrál $\int_a^x f$.

Pokud integrál $\int_a^b |f|$ konverguje, říkáme, že $\int_a^b f$ konverguje absolutně.

Pokud $\int_a^b |f|$ diverguje a zároveň $\int_a^b f$ konverguje, říkáme, že $\int_a^b f$ konverguje neabsolutně.

Věta 4.3.3.15. Bolzanovo-Cauchyho kritérium konvergence zobecněného Riemannova integrálu

Nechť $a\in\mathbb{R}$ a $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, a nechť pro každé $x\in(a,b)$ existuje určitý Riemannův integrál $\int_a^x f$. Potom platí

$$\int_a^b f \text{ konverguje } \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\right)\left(\exists c\in(a,b)\right)\left(\forall x_1,x_2\in(c,b)\right)\left(\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right|<\varepsilon\right).$$

Věta 4.3.3.16. Dirichletovo kritérium konvergence zobecněného Riemannova integrálu

Nechť $a\in\mathbb{R}$ a $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, a nechť pro každé $x\in(a,b)$ existuje určitý Riemannův integrál $\int_a^x f$. Nechť dále platí:

1. funkce $F(x)=\int_a^x f$ je omezená na $\langle a,b)$,
2. funkce g je monotónní na $\langle a,b)$ a platí $\lim_{b_-} g = 0$.

Potom integrál $\int_a^b fg$ konverguje.

Věta 4.3.3.17. Abelovo kritérium konvergence zobecněného Riemannova integrálu

Nechť $a\in\mathbb{R}$ a $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, a nechť pro každé $x\in(a,b)$ existuje určitý Riemannův integrál $\int_a^x f$. Nechť dále platí:

1. integrál $\int_a^b f$ konverguje,

2. funkce g je monotónní a omezená na $\langle a, b)$.

Potom integrál $\int_a^b fg$ konverguje.

Poznámka 4.3.3.18. V této sekci se nám budou velmi hodit následující odhady:

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$
$$|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Příklad 4.3.3.19. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \, \mathrm{d}x$, kde $p \in \mathbb{R}$.

Zadaný integrál má pro obecné $p \in \mathbb{R}$ dva kritické body, a sice nulu a $+\infty$. Rozdělíme jej proto například na integrály $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} \, \mathrm{d}x$ a $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \, \mathrm{d}x$.

Integrál I_1 je integrálem kladné funkce, takže na něj můžeme použít postupy ze sekce 4.3.2. Srovnáme ho proto s integrálem $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Limita v kritériu 4.3.2.3 bude

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\sin x}{x^p} \cdot x^\alpha \overset{\text{pro } \alpha = p-1}{=} 1.$$

Integrál I_1 proto konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}} \, \mathrm{d}x$. Pro $p < 2$ tedy konverguje a pro $p \geq 2$ diverguje.

Přejděme teď k integrálu I_2. Nejdříve pro $p > 0$ vyšetříme, jestli konverguje absolutně. Použijeme k tomu následující soustavu nerovností:

$$\frac{1}{x^p} \geq \frac{|\sin x|}{x^p} \overset{\text{poznámka 4.3.3.18}}{\geq} \frac{1}{2x^p} - \frac{\cos(2x)}{2x^p}. \tag{4.3}$$

Integrujme nyní levé a pravé strany nerovností v soustavě (4.3) od jedné do $+\infty$. Dostaneme

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}}_{\substack{=J_1 \\ \text{pro } p>1 \text{ konverguje,} \\ \text{pro } p\leq 1 \text{ diverguje}}} \geq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \, \mathrm{d}x \overset{\substack{\text{pokud má pravá} \\ \text{strana smysl}}}{\geq} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p} \, \mathrm{d}x}_{\substack{=J_1/2 \\ \text{pro } p>1 \text{ konverguje,} \\ \text{pro } p\leq 1 \text{ diverguje}}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x^p} \, \mathrm{d}x}_{\substack{=J_2 \\ \text{pro } p>0 \text{ konverguje,} \\ \text{pro } p\leq 0 \text{ diverguje}}}. \tag{4.4}$$

Integrál J_1 v předchozí soustavě nerovností pro $p > 1$ konverguje a pro $p \leq 1$ diverguje. Integrál J_2 pro všechna $p > 0$ podle Dirichletova kritéria (věta 4.3.3.16) konverguje, neboť funkce

$$F(x) = \int_1^x \cos(2t) \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2} \sin(2t)\right]_1^x = \frac{1}{2}(\sin(2x) - \sin 1)$$

je omezená a funkce $g(x) = \frac{1}{2x^p}$ pro $p > 0$ ostře klesá k nule. (Pro $p \leq 0$ integrál J_2 diverguje, viz cvičení 4.3.3.27.) Pravá strana pravé z nerovností v (4.4) má proto pro všechna $p > 0$ smysl a celá soustava nerovností (4.4) pro všechna kladná p platí.

Podívejme se teď, co se z této soustavy dozvíme o absolutní konvergenci integrálu I_2. Pro $p > 1$ podle kritéria 4.3.2.2 z levé nerovnosti vyplývá, že integrál $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \, \mathrm{d}x$ konverguje. (A pravá nerovnost nám říká pouze to, že hodnota tohoto integrálu je minimálně nějaké neznámé reálné číslo.) Pro $p \in (0, 1\rangle$ zase podle kritéria 4.3.2.2 z pravé nerovnosti plyne, že integrál $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \, \mathrm{d}x$ diverguje. (A levá nerovnost nám říká, že hodnota tohoto integrálu je maximálně $+\infty$.) Integrál I_2 tedy pro $p > 1$ konverguje absolutně a pro $p \in (0, 1\rangle$ nekonverguje absolutně.

Integrál I_2 pro $p \in (0, 1\rangle$ sice nekonverguje absolutně, ale stále může konvergovat alespoň neabsolutně. Fakt, že I_2 skutečně konverguje, plyne z Dirichletova kritéria, protože funkce

$$F(x) = \int_1^x \sin t \, \mathrm{d}t = [-\cos t]_1^x = \cos 1 - \cos x$$

je omezená a funkce $g(x) = \frac{1}{x^p}$ klesá k nule.

Nakonec pomocí Bolzanova-Cauchyho kritéria (věta 4.3.3.15) ukážeme, že pro $p \leq 0$ integrál I_2 diverguje. Budete tedy dokazovat výrok (viz větu 4.3.3.15)

$$\left(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right)(\forall c \in (1, +\infty))\left(\exists x_1, x_2 \in (c, +\infty)\right)\left(\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x^p}\, \mathrm{d}x\right| \geq \varepsilon\right).$$

Zvolme pro libovolné $c \in (1, +\infty)$ čísla x_1 a x_2 jako $x_1 = 2k\pi$ a $x_2 = 2k\pi + \pi$, $k = [c+1]$, kde hranaté závorky značí dolní celou část. Potom platí

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x^p}\, \mathrm{d}x\right| \overset{\substack{\sin x \geq 0\\ x \geq 0}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x^p}\, \mathrm{d}x \overset{p \leq 0}{\geq} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x_1^p}\, \mathrm{d}x \overset{x_1^{-p} \geq 1}{\geq} \int_{x_1}^{x_2} \sin x\, \mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_{x_1}^{x_2} = 2.$$

Můžeme tedy volit například $\varepsilon = 2$.

Zadaný integrál proto pro $p \in (1, 2)$ absolutně konverguje, pro $p \in (0, 1\rangle$ neabsolutně konverguje a pro ostatní p diverguje.

Příklad 4.3.3.20. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos^3\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x$.

Zadaný integrál má jeden kritický bod, a sice $+\infty$. Při vyšetřování jeho konvergence si pomůžeme substitucí. Dostaneme

$$\int_1^{+\infty} \cos^3\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x = \underbrace{\int_1^{+\infty} 2x \cdot \frac{\cos^3\left(x^2\right)}{2x}\, \mathrm{d}x}_{x^2 = t \;\Rightarrow\; 2x\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t} = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^3(t)}{2\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t,$$

kde integrál vpravo podle Dirichletova kritéria (věta 4.3.3.16) konverguje, protože funkce

$$F(t) = \int_1^t \cos^3 s\, \mathrm{d}s = \left[\sin s - \frac{1}{3}\sin^3 s\right]_1^t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t - \sin 1 + \frac{1}{3}\sin^3 1$$

je omezená a funkce $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ klesá k nule. Podle věty 4.2.3 proto zadaný integrál konverguje.

Ještě ukážeme, že zadaný integrál nekonverguje absolutně. S využitím vzorců v poznámce 2.2.6 můžeme pro každé $c \in (1, +\infty)$ odvodit odhad

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_1^c \left|\cos^3\left(x^2\right)\right|\, \mathrm{d}x}_{x^2 = t \;\Rightarrow\; 2x\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t} &= \int_1^{c^2} \frac{\left|\cos^3(t)\right|}{2\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t \overset{\substack{\text{jako}\\ \text{v poznámce}\\ 4.3.3.18}}{\geq} \int_1^{c^2} \frac{\cos^4(t)}{2\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = \int_1^{c^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right)^2 \mathrm{d}t\\ &= \int_1^{c^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \left(\frac{1}{4} + \cos(2t) + \frac{\cos^2(2t)}{4}\right) \mathrm{d}t = \int_1^{c^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \left(\frac{3}{8} + \cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)\right) \mathrm{d}t\\ &= \int_1^{c^2} \frac{3}{16\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t + \int_1^{c^2} \frac{\cos(2t)}{2\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t + \int_1^{c^2} \frac{\cos(4t)}{16\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Protože platí $\displaystyle\lim_{c \to +\infty} \int_1^{c^2} \frac{3}{16\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = +\infty$ a zároveň integrály $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ a $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(4t)}{16\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ podle Dirichletova kritéria (věta 4.3.3.16) konvergují, dostáváme z odhadu (4.5) a z vět o nerovnostech mezi limitami, že platí $\int_1^{+\infty} \left|\cos^3\left(x^2\right)\right|\, \mathrm{d}x = +\infty$.

Zadaný integrál proto neabsolutně konverguje.

Příklad 4.3.3.21. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\left(\sin^2 x \cos x\right)\cdot(2x+3)}{4x^2+5x+7}\cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$.

Zadaný integrál má jeden kritický bod, a sice $+\infty$. Začneme tím, že rozhodneme o konvergenci integrálu

$$\int_4^{+\infty} \frac{\left(\sin^2 x \cos x\right)\cdot(2x+3)}{4x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

Protože funkce $g(x)=\frac{2x+3}{4x^2+5x+7}$ má pro $x\to+\infty$ limitu nula a od jistého $x_0\in(4,+\infty)$ je ostře monotónní (neboť je definována jako podíl dvou polynomů) a funkce

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{x_0}^{x}=\frac{1}{3}\left(\sin^3 x-\sin^3 x_0\right)$$

je omezená, můžeme na integrál

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\left(\sin^2 x \cos x\right)\cdot(2x+3)}{4x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x=\int_{4}^{+\infty} \frac{\left(\sin^2 x \cos x\right)\cdot(2x+3)}{4x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x-\underbrace{\int_{4}^{x_0} \frac{\left(\sin^2 x \cos x\right)\cdot(2x+3)}{4x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x}_{\text{určitý Riemannův integrál}} \tag{4.7}$$

použít Dirichletovo kritérium (věta 4.3.3.16). Integrál na levé straně rovnice (4.7) tedy konverguje. Proto konverguje i integrál (4.6), neboť podle rovnice (4.7) se tyto integrály liší pouze o konstantu.

Z Abelova kritéria (věta 4.3.3.17) potom z konvergence integrálu (4.6) a z faktu, že funkce $g(x)=\operatorname{arctg} x$ je monotónní a omezená, plyne, že zadaný integrál konverguje.

Ještě ukážeme, že zadaný integrál nekonverguje absolutně. Nechť x_0 je stejný bod jako výše. S využitím vzorců v poznámce 2.2.6 můžeme pro každé $c\in(x_0,+\infty)$ odvodit odhad

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{c} \frac{\left|\sin^2 x \cos x\right|\cdot(2x+3)}{4x^2+5x+7}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x &\overset{\substack{\text{jako}\\ \text{v poznámce}\\ 4.3.3.18}}{\geq} \int_{x_0}^{c} \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos(4x)}{4}\right)\cdot(2x+3)}{4x^2+5x+7}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x\\ &=\int_{x_0}^{c}\underbrace{\frac{(2x+3)\cdot\operatorname{arctg} x}{4\left(4x^2+5x+7\right)}}_{=\varphi_1(x)}\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{c}\underbrace{\frac{\cos(4x)\cdot(2x+3)\cdot\operatorname{arctg} x}{4\left(4x^2+5x+7\right)}}_{=\varphi_2(x)}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Uvažujme nyní limitu předchozích integrálů pro $c\to+\infty$. Pokud integrál $\int_{x_0}^{+\infty}\varphi_1$ srovnáme s integrálem $\int_{x_0}^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (věta 4.3.2.3), zjistíme, že platí $\int_{x_0}^{+\infty}\varphi_1=+\infty$. Integrál $\int_{x_0}^{+\infty}\varphi_2$ podle Abelova kritéria (věta 4.3.3.17) konverguje, což můžeme zdůvodnit podobným způsobem jako u integrálu v zadání tohoto příkladu. Z odhadu (4.8) a z vět o nerovnostech mezi limitami proto plyne $\int_{x_0}^{+\infty}\frac{\left|\sin^2 x\cos x\right|\cdot(2x+3)}{4x^2+5x+7}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x=+\infty$.

Zadaný integrál tedy neabsolutně konverguje.

Příklad 4.3.3.22. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-\sin x}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$.

Zadaný integrál má jeden kritický bod, a sice $+\infty$. Pomocí Bolzanova-Cauchyho kritéria (věta 4.3.3.15) ukážeme, že diverguje. Budeme tedy dokazovat výrok

$$\left(\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+\right)\left(\forall c\in(1,+\infty)\right)\left(\exists x_1,x_2\in(c,+\infty)\right)\left(\left|\int_{x_1}^{x_2}x^{-\sin x}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x\right|\geq\varepsilon\right).$$

Zvolme pro libovolné $c\in(1,+\infty)$ čísla x_1 a x_2 jako $x_1=2k\pi+\pi$ a $x_2=2(k+1)\pi$, $k=[c+1]$, kde hranaté závorky značí dolní celou část. Potom platí

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}x^{-\sin x}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x\right|\overset{\sin x\leq 0}{=}\int_{x_1}^{x_2}x^{-\sin x}\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x\overset{\substack{-\sin x\geq 0\\ x\geq x_1\geq 1}}{\geq}-\int_{x_1}^{x_2}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[\cos x\right]_{x_1}^{x_2}=2.$$

Můžeme tedy volit například $\varepsilon=2$.

Cvičení

Cvičení 4.3.3.27: Pomocí věty 4.3.3.15 ukažte, že integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x^p}\,\mathrm{d}x$ z příkladu 4.3.3.19 pro všechna $p \in \mathbb{R}_0^-$ diverguje.

Cvičení 4.3.3.28: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x + 1}{x+2}\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.3.29: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\ln\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.3.30: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^{+\infty} \ln x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.3.31: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^3 x \cdot \ln(x+2)}{x+3}\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.3.32: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} e^{\alpha x}\cos(\beta x)\mathrm{d}x$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Cvičení 4.3.3.33: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)\cos(3x)\cdot(x^3+6x+2)}{5x^4+7}\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.3.34: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{5x+1}\cos x\,\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.3.35: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} \sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.3.36: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n v proměnné x.

Cvičení 4.3.3.37: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x^3+x^2+1}{x^2+x}} \cdot \operatorname{arccotg} x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.3.38: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^{+\infty} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

Cvičení 4.3.3.39: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^{+\infty} \sin x \cdot \ln^{\alpha}\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cvičení 4.3.3.40: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_2^{+\infty} \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\cdot(1+\cos x)\mathrm{d}x$.

Kapitola 5

Několik aplikací integrálního počtu

5.1 Obsah rovinné plochy

Věta 5.1.1. Nechť rovinná plocha P je definována jako $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | a\le x\le b\wedge g(x)\le y\le f(x)\right\}$, kde f a g jsou funkce spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$, které pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$ splňují nerovnost $g(x)\le f(x)$. Potom pro obsah S plochy P platí

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

Definice 5.1.2. Zobrazení $\varphi:\langle\alpha,\beta\rangle\to\mathbb{R}^2$, které je spojité a prosté na $\langle\alpha,\beta\rangle$, nazýváme jednoduchou křivkou (jedná se tedy o křivku, jež neprotíná sama sebe). Je-li φ prosté pouze na $\langle\alpha,\beta)$ a zároveň platí $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$, nazýváme ho jednoduchou uzavřenou křivkou.

Věta 5.1.3. Nechť $\varphi:\langle\alpha,\beta\rangle\to\mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka zadaná parametricky funkcemi $x=x(t)$ a $y=y(t)$, které jsou spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$. Potom pro obsah S plochy uzavřené křivkou φ platí následující vztahy ($\dot\varphi$ značí derivaci φ podle t):

$$S=\left|-\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t\right|, \tag{5.2}$$

$$S=\left|\int_\alpha^\beta x(t)\dot{y}(t)\mathrm{d}t\right|, \tag{5.3}$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\int_\alpha^\beta \left[x(t)\dot{y}(t)-y(t)\dot{x}(t)\right]\mathrm{d}t\right|. \tag{5.4}$$

(Třetí ze vzorců vznikl ze dvou předešlých. Absolutní hodnota zaručuje, že plocha bude kladná při libovolném směru obíhání křivky.)

Příklad 5.1.4. Spočítejte obsah S plochy omezené křivkami $y=(x+1)^2$, $x=\sin(\pi y)$ a $y=0$.

Plochu rozdělíme na části

$$P_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | -1\le x\le 0\wedge 0\le y\le (x+1)^2\right\},$$
$$P_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le y\le 1\wedge 0\le x\le \sin(\pi y)\right\},$$

jejichž obsahy S_1 a S_2 můžeme spočítat podle věty 5.1.1. Platí

$$S=S_1+S_2=\int_{-1}^0 (x+1)^2\,\mathrm{d}x+\int_0^1\sin(\pi y)\,\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi y)\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}.$$

Příklad 5.1.5. Spočítejte obsah S plochy omezené křivkami $y^2x = 1 - x$ a $x = \frac{1}{2}$.

Pro výpočet obsahu zadané plochy si nejdříve vyjádříme x v závislosti na y. Platí $x = \frac{1}{1+y^2} = \varphi(y)$. Protože obor hodnot funkce φ má na $\mathbb{R}$ maximum 1 a infimum 0, bude zadaná plocha tvořena body, jejichž x-ová souřadnice splňuje $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$. Tomu odpovídají y-ové souřadnice $y \in \langle -1, 1 \rangle$. Podle věty 5.1.1 proto platí

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}y = \left[\operatorname{arctg} y - \frac{y}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Příklad 5.1.6. Spočítejte obsah plochy S uzavřené křivkou φ zadanou parametricky jako

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos(t), \\ y(t) &= b\sin(t), \end{aligned}$$

kde a, b jsou kladné parametry a platí $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanou křivkou je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Obsah plochy, kterou uzavírá, spočítáme nejsnadněji asi vzorcem (5.4). Nejprve spočítáme derivace:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -a\sin(t), \\ \dot{y}(t) &= b\cos(t). \end{aligned}$$

Dosazením do vzorce (5.4) získáme

$$S = \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} ab \underbrace{\left(\sin^2 t + \cos^2 t \right)}_{=1} \mathrm{d}t \right| = \pi ab.$$

5.2 Délka křivky

Věta 5.2.1. Pro délku L křivky $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$, kde funkce φ_k, $k = 1, \ldots, n$, jsou spolu se svými prvními derivacemi spojité na $\langle \alpha, \beta \rangle$, platí vztah

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \dot{\varphi}_k^2(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Zvolíme-li například $n = 2$, $t = x$ (parametr t se shoduje s osou x kartézské soustavy souřadnic) a $\varphi(x) = (x, f(x))$, dostaneme následující vzorec pro výpočet délky grafu funkce f:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x. \tag{5.5}$$

Poznámka 5.2.2. Vzorec (5.5) můžeme nematematicky odvodit následujícím způsobem:

Zvolíme si nekonečně krátký interval délky $\mathrm{d}x$, na kterém se hodnoty funkce f změní o $\mathrm{d}y$, a na tomto intervalu aproximujeme graf funkce f úsečkou. Podle Pythagorovy věty bude mít taková úsečka délku

$$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Sečtením délek všech těchto nekonečně krátkých úseček (integrací) získáme vztah (5.5).

Příklad 5.2.3. Spočítejte délku grafu funkce $y = e^x$ pro $0 \le x \le x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Dosazením do vzorce (5.5) obdržíme

$$L = \underbrace{\int_0^{x_0} \sqrt{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\sqrt{1+e^{2x}}=t \;\Rightarrow\; e^{2x}=t^2-1 \\ 2e^{2x}\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x=\frac{t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \left[1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}\right)\right]\mathrm{d}t = \left[t+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}}$$

$$= \ldots = x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1+e^{2x_0}} + \ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{1+e^{2x_0}}+1}.$$

5.3 Objem rotačního tělesa

Věta 5.3.1. Nechť plocha P je definována jako

$$P = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, a\le x\le b,\; g(x)\le y\le f(x)\right\},$$

kde f a g jsou funkce spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$, které pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$ vyhovují soustavě nerovností $0\le g(x)\le f(x)$. Potom pro objem V^x tělesa vzniklého rotací plochy P kolem osy x platí

$$V^x = \pi\int_b^a \left(f^2(x)-g^2(x)\right)\mathrm{d}x. \tag{5.6}$$

Objem V^y tělesa, které vznikne rotací plochy P kolem osy y, je dán vzorcem

$$V^y = 2\pi\int_b^a |x|\,(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x. \tag{5.7}$$

Poznámka 5.3.2. Vzorec (5.6) můžeme nematematicky odvodit takto:

Těleso rozřežeme řezy kolmými na osu x na duté válce o nekonečně malé výšce dx a vnějším a vnitřním poloměru $f(x)$ a $g(x)$. Každý z těchto válců bude mít objem

$$\pi f^2(x)\mathrm{d}x - \pi g^2(x)\mathrm{d}x.$$

Sečtením objemů všech válců (integrací) dostaneme vzorec (5.6).

Při nematematickém odvozování vzorce (5.7) si můžeme představit, že uvažované těleso je sestaveno z dutých válců, které mají podstavu o poloměru $|x|$, výšku $f(x)-g(x)$ a stěnu o nekonečně malé šířce dx. Každý takový dutý válec bude mít objem

$$2\pi\,|x|\,(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Sečtením objemů všech uvažovaných dutých válců pomocí integrálu obdržíme formuli (5.7).

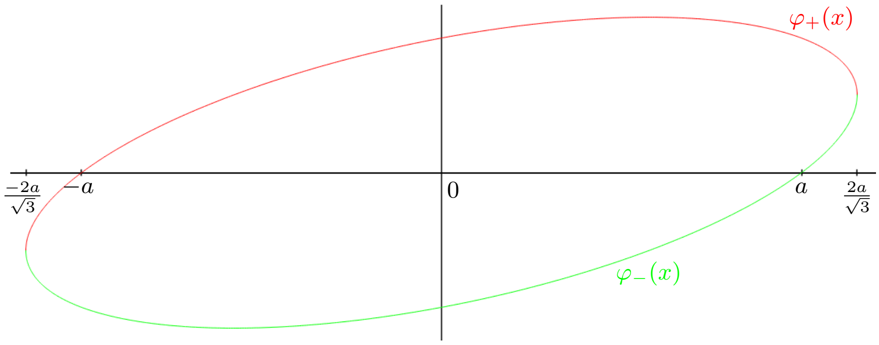
Příklad 5.3.3. Spočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, kde $a,b\in\mathbb{R}^+$, kolem osy x.

Vyjádřením proměnné y z rovnice, která popisuje zadanou křivku, získáme funkci popisující oblouk této křivky nad osou x. Platí

$$y = \sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(b-\frac{b}{a}x\right)\left(b+\frac{b}{a}x\right)}. \tag{5.8}$$

Tento předpis má smysl pro všechna $x\in\langle -a,a\rangle$. Objem zadaného tělesa nyní spočítáme dosazením do vzorce (5.6). Platí

$$V^x = \pi\int_{-a}^{a}\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$



Obrázek 5.1: Náčrt situace. Červená část křivky je popsána funkcí φ_+ a zelená funkcí φ_-.

Příklad 5.3.4. Spočítejte objem tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené křivkou $x^2 - xy + y^2 = a^2$, kde $a \in \mathbb{R}^+$, kolem osy x.

Situace je znázorněna na obrázku 5.1. Nejdříve najdeme funkce, které popisují část křivky nad osou x. Vyjádříme proto ze zadané rovnice y. Platí

$$y = \frac{x \pm \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2} = \varphi_\pm(x), \tag{5.9}$$

kde je $|x| \leq \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Pro funkci φ_- dostaneme z podmínky $y \geq 0$ (chceme část křivky nad osou x) podmínku $x \geq a$. Protože platí $\varphi_+(x) \geq \varphi_-(x)$, funkce φ_- v obrázku 5.1 odpovídá níže položenému grafu funkce.

Pro funkci φ_+ dostaneme z podmínky $y \geq 0$ podmínku $x \geq -a$.

Objem zadaného tělesa můžeme počítat jako dvojnásobek objemu tělesa vzniklého rotací části plochy v prvním kvadrantu. Dosazením do vzorce (5.6) získáme

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \pi \int_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \varphi_+^2(x)\,\mathrm{d}x - 2 \cdot \pi \int_a^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \varphi_-^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \left(\frac{x + \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2} \right)^2 \mathrm{d}x - 2\pi \int_a^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \left(\frac{x - \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2} \right)^2 \mathrm{d}x = \ldots = \frac{8}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

5.4 Povrch rotačního tělesa

Věta 5.4.1. Nechť $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá (uzavřená) křivka zadaná parametricky funkcemi $x = x(t)$ a $y = y(t)$, které jsou spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí $y(t) \geq 0$. Potom pro obsah S rotační plochy, jež vznikne rotací φ kolem osy x, platí

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ve speciálním případě $t = x$ a $y(t) = f(t)$ dostaneme následující vzorec pro výpočet obsahu plochy vzniklé rotací grafu funkce f:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \tag{5.10}$$

Poznámka 5.4.2. Předchozí vztah můžeme nematematicky odvodit například tak, že uvažovanou plochu rozřežeme řezy kolmými na osu x na pláště kosých válců o nekonečně malé straně $\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ (délka úseku grafu funkce f aproximovaného úsečkou, viz vzorec (5.5)) a poloměru $f(x)$. Každý takový plášť bude mít obsah

$$2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Sečtením obsahů všech plášťů získáme vzorec (5.10).

Příklad 5.4.3. Spočítejte obsah plochy, která vznikne rotací křivky $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, kde $a,b\in\mathbb{R}^+$ a $a>b$, kolem osy x.

Nejdříve si vyjádříme funkci f, kterou budeme kolem osy x otáčet. Podle vzorce (5.8) platí

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

kde $x\in\langle -a,a\rangle$. Derivace funkce f potom je $f'(x)=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$. Nyní dosadíme do vzorce (5.10), přičemž využijeme fakt, že funkce f je sudá. Dostaneme

$$\begin{aligned}
S&=2\cdot 2\pi\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}}\,\mathrm{d}x=4\pi b\underbrace{\int_0^a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^4}x^2}\,\mathrm{d}x}_{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}x=t\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t}\\
&=\frac{4\pi ba^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\overset{\text{cvičení } 2.7.2}{=}\frac{4\pi ba^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t\right]_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\\
&=2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right).
\end{aligned}$$

Cvičení

Cvičení 5.4.1: Řešte příklad 5.4.3 za předpokladu, že platí $b\geq a$.

5.5 Výpočet souřadnic těžiště úsečky a homogenní plochy

Věta 5.5.1. Nechť $a,b\in\mathbb{R}$. Pro souřadnici těžiště x_T úsečky

$$M=\{x\in\mathbb{R}|a\leq x\leq b\}$$

o hustotě $m=m(x)$ platí vztah

$$x_T=\frac{\int_a^b x\,m(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b m(x)\mathrm{d}x}. \tag{5.11}$$

Věta 5.5.2. Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$ a pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$ platí $g(x)\leq f(x)$. Pro souřadnice těžiště (x_T,y_T) plochy

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\leq x\leq b\wedge g(x)\leq y\leq f(x)\right\} \tag{5.12}$$

platí vztahy

$$x_T=\frac{\int_a^b x\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x}{\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x},\quad y_T=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b\left(f^2(x)-g^2(x)\right)\mathrm{d}x}{\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x}. \tag{5.13}$$

Poznámka 5.5.3. Obecný vzorec pro výpočet souřadnic těžiště plochy (5.12) o hustotě $m = m(x,y)$ zní

$$x_T = \frac{\int_M x\, m(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_M m(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \quad y_T = \frac{\int_M y\, m(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_M m(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \tag{5.14}$$

kde $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ značí integrál funkce $f = f(x,y)$ přes množinu M.

Jednotlivé integrály ve vztazích 5.14 můžeme nematematicky vyčíslit například tak, že množinu M rozřežeme na plátky o šířce přesně jednoho reálného čísla, které se táhnou ve směru osy y, a pro každé (pevné) x potom spočítáme integrál zadané funkce v proměnné y přes plátek příslušející tomuto x. Integrály přes všechny plátky potom integrací v proměnné x sečteme.

Pro integrály v (5.14) bude při $m(x,y) = $ konst. (takže m vytkneme) platit

$$\int_M x\,m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m\int_a^b x \underbrace{\left(\int_{g(x)}^{f(x)} 1\,\mathrm{d}y\right)}_{=(f(x)-g(x))} \mathrm{d}x = m\int_a^b x\,(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_M y\,m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m\int_a^b \underbrace{\left(\int_{g(x)}^{f(x)} y\,\mathrm{d}y\right)}_{=\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{g(x)}^{f(x)}} \mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{1}{2}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)\mathrm{d}x,$$

$$\int_M m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m\int_a^b \underbrace{\left(\int_{g(x)}^{f(x)} 1\,\mathrm{d}y\right)}_{=(f(x)-g(x))} \mathrm{d}x = m\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Tím jsme odvodili vzorce (5.13).

Příklad 5.5.4. Určete souřadnice těžiště tělesa, které vznikne rotací plochy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$, kde platí $a,b \in \mathbb{R}^+$, $0 \le x \le a$ a $0 \le y \le b$, kolem osy x.

Hledané těžiště bude ležet na ose x, protože zadané těleso je podle této osy osově souměrné. Polohu těžiště na ose x musíme dopočítat.

Rozřežeme-li těleso na plátky o šířce právě jednoho reálného čísla, které budou kolmé na osu x, budou mít tyto plátky podle vzorce (5.8) tvar kruhů o poloměru $y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ a obsahu $\pi y^2(x)$. Na zadané těleso se proto můžeme dívat jako na úsečku o hustotě $m = m(x) = \pi y^2(x)$. Dosazením do vzorce (5.11) získáme

$$x_T = \frac{\int_0^a x\pi y^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^a \pi y^2(x)\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a x\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x}{\int_0^a \pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2b^2}{\frac{2}{3}\pi ab^2} = \frac{3}{8}a.$$

Příklad 5.5.5. Určete souřadnice těžiště plochy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$, kde platí $a,b \in \mathbb{R}^+$, $0 \le x \le a$ a $0 \le y \le b$.

Podle vzorce (5.8) platí $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Dosazením do vzorců (5.13) získáme

$$x_T = \frac{\int_0^a \frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x}{\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x} \quad \text{a} \quad y_T = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x}{\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x}.$$

Výpočtem jednotlivých integrálů v předchozích vztazích dostaneme

$$\int_0^a \frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^2b,$$

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi ab}{4},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{ab^2}{3}.$$

Platí proto $x_T = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$ a $y_T = \frac{4}{3}\frac{b}{\pi}$.

Kapitola 6

Číselné řady

6.1 Úvodní informace

Definice 6.1.1. Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost. Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ definovanou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ vztahem $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ nazýváme posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pokud posloupnost $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ má limitu v $\mathbb{C}$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje. Pokud $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ má limitu, která není konečná, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podstatně diverguje. Limitu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ v obou těchto případech nazýváme součtem řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Pokud posloupnost $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ limitu nemá, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ osciluje.

Řady, které podstatně divergují nebo oscilují, nazýváme souhrnně divergentní.

Pokud řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ obě konvergují, obě podstatně divergují nebo obě oscilují, říkáme, že řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ mají stejný charakter.

Poznámka 6.1.2. Řadu i její součet označujeme stejným symbolem.

Věta 6.1.3. Změnou, vynecháním či přidáním konečně mnoha členů se charakter řady nezmění.

Věta 6.1.4. Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ jsou číselné posloupnosti a α je komplexní číslo. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n,$$

pokud má pravá strana smysl.

Věta 6.1.5. Bolzanovo-Cauchyho kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0) (\forall p \in \mathbb{N}) \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Věta 6.1.6. Nutná podmínka konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost taková, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje. Potom platí $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

6.2 Sčítání řad

Příklad 6.2.1. Sečtěte řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Řadu sečteme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Pro libovolné pevně zvolené $N \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{4}{n+2} - \frac{3}{n+3}\right).$$

Podívejme se nyní, jak vypadá součet několika prvních členů sumy. Platí

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{4}{n+2} - \frac{3}{n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \cancel{\frac{3}{4}}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \cancel{\frac{4}{4}} - \cancel{\frac{3}{5}}\right) + \left(-\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{4}{5}} - \cancel{\frac{3}{6}}\right) + \left(-\cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{4}{6}} - \frac{3}{7}\right) + \left(-\cancel{\frac{1}{6}} + \frac{4}{7} - \frac{3}{8}\right) + \dots\right)$$
$$\overset{\substack{\text{většina členů}\\ \text{se odečte}}}{=} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{N+2} - \frac{3}{N+3}\right).$$

V limitě pro $N \to +\infty$ proto dostaneme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}$.

Příklad 6.2.2. Sečtěte řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$.

Budeme postupovat tak, že nejdříve pro $q \in (-1, 1)$ sečteme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$. Pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci f_N definovanou na $(-1, 1)$ vztahem $f_N(q) = \sum_{n=1}^{N} nq^{n-1}$. Tato funkce má na $(-1, 1)$ primitivní funkci

$$\int f_N(q)\mathrm{d}q = \int \sum_{n=1}^{N} nq^{n-1}\mathrm{d}q = \sum_{n=1}^{N} q^n \overset{\substack{\text{součet prvních } N \text{ členů}\\ \text{geometrické posloupnosti}}}{=} q\frac{q^N - 1}{q-1} = \frac{q^{N+1} - q}{q-1},$$

takže splňuje vztah

$$f_N(q) = \left(\frac{q^{N+1} - q}{q-1}\right)' = \frac{\left((N+1)q^N - 1\right)(q-1) - \left(q^{N+1} - q\right)}{(q-1)^2}.$$

Podle tohoto vztahu platí

$$\lim_{N \to +\infty} f_N(q) \overset{\text{viz cvičení 1.3.1}}{=} \frac{1}{(q-1)^2}.$$

Zadaná řada má proto součet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{3} f_N\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

6.3 Konvergence řad s kladnými členy

6.3.1 Integrální kritérium konvergence řady

Věta 6.3.1.1. Integrální kritérium konvergence

Nechť funkce f je nezáporná a klesající na $\langle 1, +\infty)$. Potom integrál $\int_1^{+\infty} f$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

Příklad 6.3.1.2. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$, kde $p, q \in \mathbb{R}$ (důležitá referenční řada).

Pro $p < 0$ zadaná řada diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence (viz větu 6.1.6). Platí totiž $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p \ln^q n} = +\infty$ (viz cvičení 1.3.1). Tuto podmínku řada nesplňuje ani v případě $p = 0$ a zároveň $q \leq 0$.

Pro ostatní kombinace parametrů p a q funkce $f(x) = \frac{1}{x^p \ln^q x}$ od nějakého $x_0 \in \mathbb{N}$ ostře klesá, neboť platí

$$f'(x) = -\frac{1}{x^{p+1} \ln^q x}\left(p + \frac{q}{\ln x}\right) < 0 \text{ (od nějakého } x_0 \in \mathbb{N}).$$

Můžeme proto použít integrální kritérium (věta 6.3.1.1), podle kterého má zadaná řada stejný charakter jako integrál v příkladu 4.3.2.11.

Celkově tedy platí, že zadaná řada v případě $p > 1$ a v případě $p = 1$ a zároveň $q > 1$ konverguje a v ostatních případech diverguje.

6.3.2 Srovnávací kritérium konvergence řady

Věta 6.3.2.3. Srovnávací kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ jsou posloupnosti nezáporných čísel takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. Potom platí:

1. Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.
2. Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

Věta 6.3.2.4. Srovnávací kritérium konvergence řady (podílový tvar)

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ jsou posloupnosti kladných čísel takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Potom platí:

1. Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.
2. Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

Věta 6.3.2.5. Srovnávací kritérium konvergence řady (limitní tvar)

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel a nechť existuje limita $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$. Potom platí:

1. Pokud je $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Pokud je $L > 0$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.
3. Pokud je $L \in (0, +\infty)$, potom řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ mají stejný charakter.

Poznámka 6.3.2.6. Při používání srovnávacích kritérií (věty 6.3.2.3–6.3.2.5) budeme zadanou řadu většinou srovnávat s některou z řad $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$ a $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p \ln^q n}$, kde platí $p, q \in \mathbb{R}$. Věty 6.3.2.3 a 6.3.2.5 budeme používat stejným způsobem jako věty 4.3.2.2 a 4.3.2.3 pro vyšetřování konvergence integrálu.

Příklad 6.3.2.7. Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n} - 1}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Charakter zadané řady vyšetříme pomocí srovnávacího kritéria (věta 6.3.2.5). Protože platí

$$\frac{\sqrt[n]{n} - 1}{n^\alpha} = \frac{e^{\frac{\ln n}{n}} - 1}{n^\alpha} = \underbrace{\frac{e^{\frac{\ln n}{n}} - 1}{\frac{\ln n}{n}}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1} \cdot \frac{\ln n}{n^{(\alpha+1)}},$$

můžeme zadanou řadu srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{(\alpha+1)}}$ (viz příklad 6.3.1.2), čímž zjistíme, že tyto řady mají stejný charakter.

Zadaná řada proto podle srovnávacího kritéria pro $\alpha > 0$ konverguje a pro $\alpha \leq 0$ diverguje.

Příklad 6.3.2.8. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Zadanou řadu srovnáme (věta 6.3.2.5) s divergentní řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Limita ve srovnávacím kritériu bude

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

takže tyto řady mají stejný charakter.

Zadaná řada proto diverguje.

Cvičení

Cvičení 6.3.2.1: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arccotg}\,(2^n)$.

Cvičení 6.3.2.2: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n + 3^n}{5^n + 2^n}$.

Cvičení 6.3.2.3: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+3)}$.

Cvičení 6.3.2.4: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+5n+7}\cdot\ln n}$.

Cvičení 6.3.2.5: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+3}\right)}{(n+4)^p}$, $p \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.3.2.6: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(3^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}\right) n^p$, $p \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.3.2.7: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+3}{n^2+n+1}\right)^{2n}$.

Cvičení 6.3.2.8: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$.

Cvičení 6.3.2.9: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln^2 n}$.

Cvičení 6.3.2.10: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^p e^{-\ln^2 n}$, $p \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.3.2.11: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^2+n\right) e^{-\sqrt{n}}$.

Cvičení 6.3.2.12: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)$, $p \in \mathbb{R}_0^+$.

Cvičení 6.3.2.13: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+\sin n)\operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)}{(n^3+2)^p}$, $p \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.3.2.14: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\left(1+\sqrt[n]{n^5+4n^2}+\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)}$.

Cvičení 6.3.2.15: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x - 1}}$.

6.3.3 Odmocninové a podílové kritérium konvergence řady

Věta 6.3.3.9. Odmocninové kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel. Potom platí:

1. Pokud existuje číslo $q \in \langle 0,1)$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Pokud pro nekonečně mnoho čísel $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.

Věta 6.3.3.10. Odmocninové kritérium konvergence řady (limitní tvar)

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel. Potom platí:

1. Pokud je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Pokud je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.

Věta 6.3.3.11. Podílové kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel. Potom platí:

1. Pokud existuje číslo $q \in (0,1)$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.

Věta 6.3.3.12. Podílové kritérium konvergence řady (limitní tvar)

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel. Potom platí:

1. Pokud je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Pokud je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 6.3.3.13. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Použijeme podílové kritérium (věta 6.3.3.12). Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Podle podílového kritéria tedy zadaná řada konverguje.

Příklad 6.3.3.14. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(k\alpha)}{1+x^2+\cos^2(k\alpha)}$, kde $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Pro $x = 0$ a pro $\alpha = q\pi$, $q \in \mathbb{Q}$, má zadaná řady od nějakého indexu n_0 všechny členy nulové, tudíž konverguje. V ostatních případech použijeme podílové kritérium (věta 6.3.3.11). Pokud označíme $a_n = nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(k\alpha)}{1+x^2+\cos^2(k\alpha)}$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sin^2((n+1)\alpha)}{1+x^2+\cos^2((n+1)\alpha)} \leq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^2}.$$

Z definice limity plyne, že podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ je od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ menší než nějaké číslo, které je menší než jedna. A to nezávisle na uvažovaných hodnotách parametrů $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{R} - \{q\pi | q \in \mathbb{Q}\}$. Z podílového kritéria proto zadaná řada pro všechna $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{R} - \{q\pi | q \in \mathbb{Q}\}$ konverguje.

Rovněž můžeme říci, že řada v předchozím případě konverguje podle kritéria 6.3.2.4, kde volíme $b_n = \frac{n}{(1+x^2)^n}$, tedy $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ totiž podle podílového kritéria konverguje.

Celkově řada konverguje pro libovolná $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Příklad 6.3.3.15. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{(2n-\ln n)}$.

Charakter zadané řady vyšetříme pomocí odmocninového kritéria (věta 6.3.3.9). Platí

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{(2n-\ln n)}} = \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{\left(2-\frac{\ln n}{n}\right)} \overset{\text{viz níže}}{\leq} \left(\frac{2}{3}\right)^{\left(2-\frac{\ln n}{n}\right)} \xrightarrow{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^2. \tag{6.1}$$

Výše použitá nerovnost plyne z toho, že funkce $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$ je rostoucí a platí $\cos n \leq 1$. Výraz na levé straně odhadu (6.1) je proto z definice limity od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ menší než nějaké číslo, které je menší než jedna, takže zadaná řada podle odmocninového kritéria konverguje.

Příklad 6.3.3.16. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}^n\left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)$, kde $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Pro $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ (nezávisle na hodnotě parametru β) řada podle odmocninového kritéria (věta 6.3.3.10) konverguje, protože platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\operatorname{tg}^n\left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right) = \operatorname{tg}(\alpha) < 1.$$

Stejným způsobem můžeme zdůvodnit, že pro $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ řada diverguje.

Nakonec ukážeme, že pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$ řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence (věta 6.1.6). Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{n}\right) - 1\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{n}\right)-1}}}_{\to e}\right]^{\overbrace{n\cdot\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{n}\right)-1\right)}^{\to 2\beta}} = e^{2\beta} \neq 0,$$

neboť limita exponentu je

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\beta}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{n}\right)} = 2\beta.$$

Charakter řady tedy nezávisí na parametru β. Pro $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ řada konverguje a pro $\alpha \in \left\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ diverguje.

Cvičení

Cvičení 6.3.3.16: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n^2 + 20n} - \frac{1}{2} \right)^n$.

Cvičení 6.3.3.17: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n - 2 + \sin n}{n} \right)^{n^2}$.

Cvičení 6.3.3.18: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n n^p$, kde $x \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.3.3.19: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}}$.

Cvičení 6.3.3.20: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{\sqrt{k^2+1}}$.

6.3.4 Raabeovo a Gaussovo kritérium konvergence řady

Věta 6.3.4.17. Raabeovo kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel. Potom platí:

1. Pokud existuje číslo $\alpha \in (1, +\infty)$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geq \alpha$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leq 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.

Věta 6.3.4.18. Raabeovo kritérium konvergence řady (limitní tvar)

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel. Potom platí:

1. Pokud je $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n > 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Pokud je $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n < 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.

Věta 6.3.4.19. Gaussovo kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel, pro níž existují čísla $q, \alpha \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a omezená posloupnost $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}. \tag{6.2}$$

Potom platí:

1. Pokud je $q < 1$ nebo je $q = 1$ a zároveň $\alpha > 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Pokud je $q > 1$ nebo je $q = 1$ a zároveň $\alpha \leq 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.

Poznámka 6.3.4.20. Pro koeficienty q a α ve větě 6.3.4.19 platí

$$q = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \alpha = \lim_{n \to +\infty} n \left(q - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right).$$

Příklad 6.3.4.21. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}{n!\cdot n^p}$, kde $a\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{N}_0$.

Vidíme, že pro $a\in\mathbb{Z}_0^-$ řada konverguje, protože její členy jsou od jistého indexu n_0 nulové.

Dále vidíme, že pro $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ členy řady od jistého n_0 nemění znaménko, takže se na ni můžeme dívat jako na řadu s kladnými členy. V tomto případě ji budeme vyšetřovat pomocí Gaussova kritéria (věta 6.3.4.19). Použijeme jej ale na řadu, jejíž n-tý člen je a_{n-1}, kde a_n je n-tý člen zadané řady. Tato řada má totiž stejný charakter jako zadaná řada a rozklad (6.2) se pro ni hledá snadněji. Platí

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a+n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^p = \frac{a+n-1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^p \overset{\text{binomická věta}}{=} \frac{a+n-1}{n}\left(1-\frac{p}{n}+\frac{\varphi_n}{n^2}\right),$$

kde $(\varphi_n)_{n=2}^{+\infty}$ je posloupnost, která má reálnou limitu. Podle poznámky 6.3.4.20 platí $q=1$. Spočítejme nyní druhý parametr v Gaussově kritériu. Podle poznámky 6.3.4.20 je

$$\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)n = -a+\frac{(a-1)p}{n}-\frac{(a-1)\varphi_n}{n^2}+p-\frac{\varphi_n}{n}+1 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -a+p+1=\alpha. \tag{6.3}$$

V tuto chvíli můžeme říci, že podle Raabeova kritéria (věta 6.3.4.18) řada pro $p>a$ konverguje a pro $p<a$ diverguje. Zbývá nám ještě případ $p=a$.

Nalezněme proto parametr ε a omezenou posloupnost $(c_n)_{n=2}^{+\infty}$ v Gaussově kritériu. S využitím rozpisu v (6.3) máme

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}-1+\frac{-a+p+1}{n} = -\frac{(a-1)p}{n^2}+\frac{(a-1)\varphi_n}{n^3}+\frac{\varphi_n}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{=\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}\cdot\underbrace{\left(-(a-1)p+\frac{(a-1)\varphi_n}{n}+\varphi_n\right)}_{=c_n},$$

kde jsme označili n-tý člen hledané posloupnosti $(c_n)_{n=2}^{+\infty}$ a parametr ε. Z Gaussova kritéria vyplývá, že při $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ zadaná řada pro $p>a$ konverguje a pro $p\le a$ diverguje.

Celkově tedy zadaná řada v případě $a\in\mathbb{Z}_0^-$ a v případě $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ a zároveň $p>a$ konverguje a v ostatních případech diverguje.

Příklad 6.3.4.22. Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel taková, že pro všechna $n\in\mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1-\frac{1}{n}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ diverguje.

Členy v zadané nerovnici můžeme přeskupit tak, že dostaneme nerovnici

$$\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n\le 1.$$

Z Raabeova kritéria (věta 6.3.4.17) proto zadaná řada diverguje.

Cvičení

Cvičení 6.3.4.21: Řešte příklad 6.3.4.21 tak, že při použití Gaussova kritéria nebudete pracovat s podílem $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, ale s podílem $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, kde a_n je n-tý člen zadané řady.

Cvičení 6.3.4.22: Pomocí Gaussova kritéria (věta 6.3.4.19) rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, kde $p=\frac{1}{2},1,2$.

Cvičení 6.3.4.23: Řešte příklad 6.3.3.18 pomocí Raabeova kritéria (věta 6.3.4.17).

Cvičení 6.3.4.24: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(e-1)\cdot\ln\left(e-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\ln\left(e-\frac{1}{n}\right)$.

6.4 Konvergence řad s obecnými členy

Věta 6.4.1. Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost taková, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konverguje. Potom konverguje i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a platí $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \geq \left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right|$.

Definice 6.4.2. Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost. Pokud řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverguje a zároveň $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně.

Definice 6.4.3. Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ nazýváme řadou se střídavými znaménky.

6.4.1 Leibnizovo, Dirichletovo a Abelovo kritérium konvergence řady

Věta 6.4.1.4. Dirichletovo kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je reálná posloupnost, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ komplexní posloupnost a nechť platí:

1. posloupnost $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$, kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, je omezená,
2. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je monotónní a platí $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Potom řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta 6.4.1.5. Abelovo kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je reálná posloupnost, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ komplexní posloupnost a nechť platí:

1. řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje,
2. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je monotónní a konvergentní.

Potom řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta 6.4.1.6. Leibnizovo kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je klesající posloupnost kladných čísel, která splňuje podmínku $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Potom řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje.

Poznámka 6.4.1.7. Posloupnosti $(\sum_{k=1}^{n} \sin(\alpha k))_{n=1}^{+\infty}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, a $(\sum_{k=1}^{n} \cos(\alpha k))_{n=1}^{+\infty}$, kde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi | l \in \mathbb{Z}\}$, jsou omezené.

Příklad 6.4.1.8. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$.

Nejdříve vyšetříme absolutní konvergenci. Protože platí $\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p}$, podle výsledků příkladu 6.3.1.2 zadaná řada pro $p > 1$ konverguje absolutně a pro ostatní p nekonverguje absolutně.

Nyní vyšetříme neabsolutní konvergenci. Pro $p \in \langle 0, 1\rangle$ řada podle Leibnizova kritéria (věta 6.4.1.6) konverguje. Pro $p \leq 0$ diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence (věta 6.1.6).

Celkově proto zadaná řada pro $p > 1$ absolutně konverguje, pro $p \in \langle 0, 1\rangle$ neabsolutně konverguje a pro $p \leq 0$ diverguje.

Příklad 6.4.1.9. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[100]{n}}$.

Srovnáním (věta 6.3.2.5) s divergentní řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ zjistíme, že zadaná řada nekonverguje absolutně.

Co se týče neabsolutní konvergence, zadaná řada podle Abelova kritéria (věta 6.4.1.5) konverguje, protože řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[100]{n}}$ podle výsledků příkladu 6.4.1.8 konverguje a posloupnost $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)_{n=1}^{+\infty}$ je monotónní ($\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$) a konvergentní.

Celkově tedy zadaná řada neabsolutně konverguje.

Příklad 6.4.1.10. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$.

Při vyšetřování konvergence zadané řady budeme postupovat podobně jako při vyšetřování konvergence integrálů v příkladech 4.3.3.19, 4.3.3.20 a 4.3.3.21. Využijeme přitom následující rovnost:

$$
\begin{aligned}
(-1)^n \sin^2 n = (-1)^n \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2n)}{2}\right) &= \frac{(-1)^n}{2} - \frac{\cos(\pi n)\cos(2n)}{2} \\
&= \frac{(-1)^n}{2} - \frac{\cos((\pi+2)n) + \cos((\pi-2)n)}{4}.
\end{aligned}
$$

Podle předchozí rovnosti platí

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((\pi+2)n)}{4n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((\pi-2)n)}{4n},
$$

pokud má pravá strana smysl. A ta smysl má, protože všechny tři řady na pravé straně podle Dirichletova kritéria (věta 6.4.1.4) konvergují, neboť podle poznámky 6.4.1.7 mají řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos((\pi+2)n)$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos((\pi-2)n)$ omezené částečné součty. Zadaná řada proto konverguje.

Ještě ukážeme, že zadaná řada nekonverguje absolutně. Opět použijeme stejný postup jako při vyšetřování konvergence integrálu. Pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ platí

$$
\sum_{n=1}^{N} \left|\frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1-\cos(2n)}{2n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2n)}{2n},
$$

kde první suma na pravé straně je N-tý částečný součet podstatně divergentní řady a druhá suma je N-tý částečný součet řady, která podle Dirichletova kritéria konverguje (podobně jako řady v předchozím odstavci). Podle věty o aritmetice limit proto platí $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}\right| = +\infty$.

Celkově proto zadaná řada neabsolutně konverguje.

Příklad 6.4.1.11. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot 2^n \cdot \frac{\sin^{2n} x}{n}$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Pro větší přehlednost si zadanou řadu napíšeme ve tvaru

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^n}{n}, \quad y = 2\sin^2 x.
$$

Na její charakter má největší vliv velikost čísla y. Pokud platí $y \in \langle 0, 1)$, tedy $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, řada podle odmocninového kritéria (věta 6.3.3.10) absolutně konverguje, neboť platí

$$
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \cdot \frac{y^n}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{y}{\sqrt[n]{n}} = y \in \langle 0, 1).
$$

Obdobně pokud platí $y > 1$, tedy $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence (věta 6.1.6), protože například podle cvičení 1.3.1 platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y^n}{n} = +\infty.$$

Zbývá vyšetřit případ $y = 1$, tedy $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. V tomto případě řada podle Leibnizova kritéria (věta 6.4.1.6) konverguje.

Celkově proto zadaná řada v případě $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ absolutně konverguje, v případě $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, neabsolutně konverguje a pro ostatní hodnoty parametru x diverguje.

Cvičení

Cvičení 6.4.1.1: Dokažte tvrzení v poznámce 6.4.1.7. (Rozšiřte sumu číslem $\sin\frac{\alpha}{2}$ a použijte součtové vzorce pro goniometrické funkce.)

Cvičení 6.4.1.2: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}(\ln n) \cdot \operatorname{arccotg}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$.

Cvičení 6.4.1.3: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot\sin(2n)}{\ln n}$.

Cvičení 6.4.1.4: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^2 - 2x\right)^n \cdot \ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.4.1.5: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.4.1.6: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.4.1.7: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^n \operatorname{arctg}^n x$, $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.4.1.8: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{arccotg}(nx))^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.4.1.9: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \arccos\left(1 - \frac{1}{n^p}\right)$, $p \in \mathbb{R}_0^+$.

Cvičení 6.4.1.10: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{arctg}(nx))^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.4.1.11: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)\right)^n \cdot x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.4.1.12: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln x)^n}{3^n} \cdot \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení 6.4.1.13: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$.

Cvičení 6.4.1.14: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nx)x^{\ln n}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

6.4.2 Modifikované Raabeovo a Gaussovo kritérium konvergence řady

Věta 6.4.2.12. Modifikované Raabeovo kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel. Potom platí:

1. Pokud existuje číslo $\alpha \in (0, +\infty)$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geq \alpha$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje.
2. Pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leq 0$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ diverguje.

Věta 6.4.2.13. Modifikované Raabeovo kritérium konvergence řady (limitní tvar)

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel. Potom platí:

1. Pokud je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) n > 0$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje.
2. Pokud je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) n < 0$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ diverguje.

Věta 6.4.2.14. Modifikované Gaussovo kritérium konvergence řady

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost kladných čísel, pro níž existují čísla $q, \alpha \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a omezená posloupnost $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}. \tag{6.4}$$

Potom platí:

1. Pokud je $q < 1$ nebo je $q = 1$ a zároveň $\alpha > 1$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ absolutně konverguje.
2. Pokud je $q = 1$ a zároveň $\alpha \in (0, 1\rangle$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ neabsolutně konverguje.
3. Pokud je $q > 1$ nebo je $q = 1$ a zároveň $\alpha \leq 0$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ diverguje.

Příklad 6.4.2.15. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{x}{n}$, kde $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}$ a $x \in \mathbb{R}$.

Vidíme, že pro $x \in \mathbb{N}_0$ jsou všechny členy řady od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ nulové. Řada v tomto případě absolutně konverguje.

Uvažujme nyní $x \notin \mathbb{N}_0$. Vidíme, že existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \binom{x}{n}$ je řada se střídavými znaménky (viz definici 6.4.3). Označme proto $\left|\binom{x}{n}\right| = a_n$ a pomocí modifikovaného Gaussova kritéria (věta 6.4.2.14) vyšetřeme charakter řady, jejíž n-tý člen je a_{n-1} (podobně jako v příkladě 6.3.4.21). Platí

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{|x-n+1|}{n} \stackrel{n>x+1}{=} 1 - \frac{x+1}{n},$$

což je přímo hledaný rozklad (6.4).

Z modifikovaného Gaussova kritéria proto plyne, že zadaná řada pro $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ absolutně konverguje, pro $x \in (-1, 0)$ neabsolutně konverguje a pro $x \leq -1$ diverguje.

Celkově zadaná řada pro $x \geq 0$ absolutně konverguje, pro $x \in (-1, 0)$ neabsolutně konverguje a pro $x \leq -1$ diverguje.

Cvičení

Cvičení 6.4.2.15: Vyřešte příklad 6.4.2.15 tak, že při použití modifikovaného Gaussova kritéria nebudete pracovat s podílem $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, ale s podílem $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, kde a_n je absolutní hodnota n-tého členu zadané řady.

Cvičení 6.4.2.16: Vyřešte příklad 6.4.1.11 pomocí kritéria 6.4.2.14.

6.4.3 Uzávorkování řady

Definice 6.4.3.16. Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, v níž je $k_1 = 1$. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, kde platí

$$A_n = a_{k_n} + a_{(k_n+1)} + \ldots + a_{(k_{n+1}-1)},$$

nazýváme uzávorkováním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Věta 6.4.3.17. Pokud řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i každé její uzávorkování $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ a řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ mají stejný součet.

Věta 6.4.3.18. Nechť řada $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ je uzávorkováním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$ a nechť platí:

1. existuje číslo $M \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $k_{n+1} - k_n \leq M$,
2. platí $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Potom řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ mají stejný charakter a v případě konvergence i stejný součet.

Příklad 6.4.3.19. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-1)^{n+1}n+1}$.

Zadaná řada nekonverguje absolutně, protože z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\left|(-1)^{n+1}n+1\right| \leq n+1$, čili

$$\left|\frac{1}{(-1)^{n+1}n+1}\right| \geq \frac{1}{n+1},$$

kde číslo vpravo je n-tý člen podstatně divergentní řady.

Vyšetřeme proto neabsolutní konvergenci, a to tak, že řadu uzávorkujeme po dvou členech, tedy $k_n = 2n-1$ (viz definici 6.4.3.16). Vznikne řada $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, v níž platí

$$A_n = a_{k_n} + a_{(k_n+1)} = \frac{1}{k_n(-1)^{k_n+1}+1} + \frac{1}{(k_n+1)(-1)^{k_n+2}+1} \overset{k_n=2n-1}{=} \frac{1}{2n} + \frac{1}{-2n+1} = \frac{1}{2n-4n^2},$$

kde číslo úplně vpravo je n-tý člen konvergentní řady (o čemž se můžeme přesvědčit srovnáním s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2}$). Protože zadaná řada splňuje nutnou podmínku konvergence (věta 6.1.6), plyne z věty 6.4.3.18, že neabsolutně konverguje.

Příklad 6.4.3.20. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Srovnáním (věta 6.3.2.5) s divergentní řadou $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ zjistíme, že zadaná řada nekonverguje absolutně. Platí totiž

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\frac{(-1)^n}{n}}\right| = 1.$$

Vyšetříme proto ještě neabsolutní konvergenci. Zde budeme postupovat tak, že zadanou řadu uzávorkujeme po dvou členech. V definici 6.4.3.16 tedy bude platit $k_n = 2n - 2$. (Tentokrát ale máme $k_1 = 2$, protože naše řada začíná členem pro $n = 2$.) Uzávorkováním vznikne řada $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, jejíž n-tý člen má tvar

$$\begin{aligned} A_n = a_{k_n} + a_{(k_n+1)} &= \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k_n}}{k_n}\right) + \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k_n+1}}{k_n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2n-2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2n-1}{2n-2}\right) + \ln\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Jedná se proto o řadu konvergentní. Protože platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$, vyplývá z věty 6.4.3.18, že zadaná řada konverguje.

Zadaná řada proto neabsolutně konverguje.

Cvičení

Cvičení 6.4.3.17: Řešte příklad 6.3.2.8 pomocí věty 6.4.3.18.

6.5 Součinová řada

Definice 6.5.1. Nechť $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{+\infty}$ jsou číselné posloupnosti. Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ definujme $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ nazýváme součinovou řadou řad $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Věta 6.5.2. Nechť řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ konverguje. Potom součinová řada těchto řad konverguje a má součet $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Příklad 6.5.3. Z předpokladu, že pro libovolné $\alpha \in \mathbb{C}$ platí $e^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$, dokažte, že pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí $e^\alpha \cdot e^\beta = e^{\alpha+\beta}$.

Označme $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ a $b_n = \frac{\beta^n}{n!}$. Pokud ukážeme, že součinová řada $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ řad $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ má součet $e^{\alpha+\beta}$ a že řada $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{C}$ absolutně konverguje, potom bude tvrzení v zadání vyplývat z věty 6.5.2.

Podle definice 6.5.1 platí

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \frac{1}{n!} = \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!},$$

kde číslo úplně vpravo je n-tý člen řady, která má podle předpokladu v zadání součet $e^{\alpha+\beta}$. Absolutní konvergence řady $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ plyne například z podílového kritéria (věta 6.3.3.12), při jehož použití dostaneme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|\alpha|^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha|}{n+1} = 0.$$

Podle předchozího odstavce tedy zadaná rovnost platí.

Výsledky cvičení

2.3.1 Pro f lichou např. $F(x) = \varphi(x)$ pro $x \in \langle 0, a)$ a $F(x) = \varphi(-x)$ pro $x \in (-a, 0)$. Pro f sudou $F(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ pro $x \in \langle 0, a)$ a $F(x) = -\varphi(-x) + \varphi(0)$ pro $x \in (-a, 0)$. **2.7.2** $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$, $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)$. **3.4.1** 0. **3.5.1** 0. **3.5.2** 1. **4.3.1.1** $g(x) = \frac{1}{3(x+1)}$. **4.3.1.2** $g(x) = -\frac{x^2}{2}$. **4.3.1.3** $g(x) = \frac{\pi}{2}x$. **4.3.1.4** $g(x) = -1$. **4.3.1.5** $g(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-\frac{1}{2}}$. **4.3.1.6** $g(x) = x^2$. **4.3.1.7** $g(x) = \ln 4$. **4.3.1.8** $g(x) = x^{\left(p-\frac{1}{2}\right)}$. **4.3.1.9** $g(x) = x^{-6-\frac{2}{p}}$. **4.3.1.10** $g(x) = 2^{\frac{p}{2}} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{-p}$. **4.3.1.11** $g(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. **4.3.1.12** $g(x) = \frac{1}{2x}$. **4.3.1.13** $g(x) = 2(x-1)$. **4.3.2.15** Konverguje. **4.3.2.16** Diverguje. **4.3.2.17** Pro $p > 1$ a zároveň $q < 1$ konverguje, jinak diverguje. **4.3.2.18** Diverguje. **4.3.2.19** Pro $p > -1$ konverguje, pro $p \leq -1$ diverguje. **4.3.2.20** Pro $p \in (0, 1)$ konverguje, jinak diverguje. **4.3.2.21** Diverguje. **4.3.2.22** Konverguje. **4.3.2.23** Konverguje. **4.3.2.24** Diverguje. **4.3.2.25** Pro $q > \frac{1}{2}$ konverguje, jinak diverguje. **4.3.2.26** Pro $p + q > 1$ a pro $q > 1$ konverguje. Pro $p + q \leq 1$ a zároveň $q \leq 1$ diverguje. **4.3.3.28** Diverguje. **4.3.3.29** Diverguje. **4.3.3.30** Absolutně konverguje. **4.3.3.31** Neabsolutně konverguje. **4.3.3.32** Pro $\alpha < 0$ absolutně konverguje, jinak diverguje. **4.3.3.33** Neabsolutně konverguje. **4.3.3.34** Diverguje. **4.3.3.35** Diverguje. **4.3.3.36** Absolutně konverguje. **4.3.3.37** Neabsolutně konverguje. **4.3.3.38** Diverguje. **4.3.3.39** Pro $\alpha > 1$ absolutně konverguje, pro $\alpha \in (0, 1\rangle$ neabsolutně konverguje a pro $\alpha \leq 0$ diverguje. **4.3.3.40** Diverguje. **5.4.1** $S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}+b}{a}\right)$ pro $b > a$, $S = 4\pi a^2$ pro $a = b$. **6.3.2.1** Konverguje. **6.3.2.2** Konverguje. **6.3.2.3** Diverguje. **6.3.2.4** Konverguje. **6.3.2.5** Pro $p > 0$ konverguje, pro $p \leq 0$ diverguje. **6.3.2.6** Pro $p < 0$ konverguje, jinak diverguje. **6.3.2.7** Diverguje. **6.3.2.8** Konverguje. **6.3.2.9** Konverguje. **6.3.2.10** Konverguje. **6.3.2.11** Konverguje **6.3.2.12** Pro $p > \frac{1}{2}$ konverguje, pro $p \leq \frac{1}{2}$ diverguje. **6.3.2.13** Pro $p > \frac{1}{6}$ konverguje, pro $p \leq \frac{1}{6}$ diverguje. **6.3.2.14** Konverguje. **6.3.2.15** Diverguje. **6.3.3.16** Konverguje. **6.3.3.17** Konverguje. **6.3.3.18** Pro $x < 1$ a pro $x = 1$ a zároveň $p < -1$ konverguje. Jinak diverguje. **6.3.3.19** Konverguje. **6.3.3.20** Diverguje. **6.3.4.24** Diverguje. **6.4.1.2** Neabsolutně konverguje. **6.4.1.3** Neabsolutně konverguje. **6.4.1.4** Pro $x \in \left(1 - \sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 1 + \sqrt{2}\right)$ absolutně konverguje, pro $x = 1$ neabsolutně konverguje, jinak diverguje. **6.4.1.5** Pro $x \in (-1, 1)$ absolutně konverguje, jinak diverguje. **6.4.1.6** Pro $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, absolutně konverguje, jinak neabsolutně konverguje. **6.4.1.7** Pro $x = \langle -1, 1\rangle$ absolutně konverguje, jinak diverguje. **6.4.1.8** Pro $x > 0$ absolutně konverguje, jinak diverguje. **6.4.1.9** Pro $p > 2$ absolutně konverguje, pro $p \in (0, 2\rangle$ neabsolutně konverguje, pro $p = 0$ diverguje. **6.4.1.10** Pro $x = 0$ absolutně konverguje, jinak diverguje. **6.4.1.11** Pro $|x| < \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$ absolutně konverguje, jinak diverguje. **6.4.1.12** Pro $x \in \left(e^{-3}, e^3\right)$ absolutně konverguje, pro $x = e^3$ neabsolutně konverguje, jinak diverguje. **6.4.1.13** Pro $y < 1$ a pro $x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ absolutně konverguje, pro $y = 1$ a zároveň $x \notin \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ neabsolutně konverguje, jinak diverguje. **6.4.1.14** Pro $x < e^{-1}$ absolutně konverguje, pro $x \in \left\langle e^{-1}, 1\right)$ neabsolutně konverguje, pro $x \geq 1$ diverguje.

Literatura

[1] B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 1. vydání, (2003).

[2] V. Jarník, *Integrální počet I*, Academia, 6. vydání, (1984).

[3] J. Mareš a J. Vondráčková, *Cvičení z matematické analýzy: diferenciální počet*, ČVUT, 5. vydání, (2007).

[4] E. Pelantová, *Matematická analýza 2*, ČVUT, 1. vydání, (2007).

[5] E. Pelantová a J. Vondráčková, *Cvičení z matematické analýzy: integrální počet a řady*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, 3. vydání, (2006).

[6] S. Pošta a P. Pošta, *Analýza v příkladech 2*, ČVUT, 1. vydání, (2010).