

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ



KATEDRA MATEMATIKY
Zaměření: Softwarové inženýrství

Parciální diferenciální rovnice ve zpracování obrazu

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Autor práce:
Vedoucí práce:
Akademický rok:

Anna Kratochvílová
Ing. Tomáš Oberhuber
2006/2007

Prohlášení

Prohlašuji, že výzkumný úkol na téma „Parciální diferenciální rovnice ve zpracování obrazu“ jsem vypracovala samostatně. Použitou literaturu a podkladové materiály uvádím v příloženém seznamu literatury.

V Praze 9.9. 2007

Anna Kratochvílová

Obsah

Prohlášení	2
Kapitola 1. Úvod	4
Kapitola 2. Základní pojmy zpracování obrazu	6
2.1. Snímání a digitalizace obrazu.....	7
2.2. Předzpracování obrazu	7
2.3. Segmentace / detekce hran.....	10
Kapitola 3. PDE modely.....	17
3.1. Rovnice vedení tepla	19
3.2. Nelineární modely	25
Kapitola 4. Level set metoda	30
Kapitola 5. Numerické schéma	39
Kapitola 6. Výsledky.....	43
6.1. Rovnice vedení tepla	43
6.2. Model Perona-Malik.....	45
6.3. Regularizovaný Perona-Malik	49
6.4. Level set metoda	52
Kapitola 7. Závěr	58

Kapitola 1.

Úvod

Práce se zabývá zpracováním digitálních obrazů. Toto téma je v současné době velmi rozšířené a s narůstajícím rozvojem digitálních technologií zasahuje do řady inženýrských oborů, např. do zpracování medicínských obrazů, v jakostním inženýrství, v biotechnologiích a jinde. Zpracování obrazu je jedna z perspektivních oblastí počítačové grafiky. Díky rozvoji počítačových technologií a velkému rozmachu digitální techniky, jako jsou fotoaparáty či kamerové systémy, nabývá zpracování obrazu na velkém významu. Svě uplatnění nalézá v průmyslových aplikacích, bezpečnostních systémech, ale i v digitální fotografii.

Segmentace obrazových dat představuje nedílnou součást zpracování digitálního obrazu. S rozšířením informačních technologií do širokého spektra veřejnosti narůstá objem pořízených dat, a proto se navrhuje metody na jejich přesné a rychlé zpracování. V poslední letech se pro účely segmentace často využívá přístup označovaného aktivní modely [35], který je založen na minimalizaci vhodně zvoleného energetického funkcionálu. Pro samotnou výpočetní realizaci implicitních aktivních modelů je v současnosti využíváno level set metody, která představuje robustní přístup založený na řešení parciálních diferenciálních rovnic. Její stinnou stránkou je vysoká výpočetní náročnost, která tuto metodu činí hůře použitelnou při segmentaci obrazu v reálném čase. Klíčovým krokem většiny systémů pro zpracování obrazu je segmentace obrazu. Výsledky segmentace jsou využívány například pro rozpoznávání a klasifikaci objektů. V průběhu let bylo publikováno mnoho rozličných segmentačních metod. V této práci si uvedeme některé techniky předzpracování obrazu často používané pro zkvalitnění následné segmentace, ke které použijeme již zmíněnou level set metodu.

Následující bude věnována pojímům z teorie zpracování obrazu. Seznámíme se s digitálním obrazem a jeho reprezentací. V podkapitole o předzpracování obrazu si uvedeme základní metody pro odstranění šumu v obraze, či pro potlačení zkreslení vzniklého při digitalizaci a přenosu obrazu a pro další. Představíme si podstatu detekce hran, a seznámíme se s principy některých hranových detektorů. V závěru této kapitoly si uvedeme výčet přístupů k segmentaci obrazu.

Obsahem třetí kapitoly bude seznámení s modely tvořenými parciálními diferenciálními rovnicemi. Nejprve si vymezíme prostor na kterém budeme pracovat, půjde o oblast Ω , kterou rozšíříme na celé \mathbb{R}^2 . Základní parciální diferenciální rovnice ve zpracování obrazu je rovnice vedení tepla. Abychom

odůvodnili použití této rovnice uvedeme invarianty, které splňuje. Shrnutím působení rovnice vedení tepla na obraz, dojdeme k závěru, že je nutné tento model modifikovat. Kvůli její silné vyhlazovací schopnosti (rozmazání hran), je nutné rovnici vedení tepla nahradit nelineární parciální diferenciální rovnicí. Proto si následně odvodíme nelineární modely. Půjde o model Perona-Malik a regularizaci modelu Perona-Malik.

V rámci čtvrté kapitoly si detailně popíšeme tzv. level set metodu představenou Osherem a Sethianem [19]. Nejprve odvodíme základní rovnici, jejímž řešením jsme schopni sledovat pohyb nulové vrstevnice implicitně zadané funkce v čase. Poté si představíme její rozšířený tvar, který je používán pro segmentaci obrazu, zahrnující tři druhy pohybu rozhraní. Nakonec se s jednotlivými druhy pohybu hranice blíže seznámíme. Dále si uvedeme jiný tvar level set rovnice. Tento použijeme pro dokázání výsledků, jak působí na konkrétní obrázky.

Protože se ve výše uvedených modelech (což jsou rovnice vedení tepla, model Perona-Malik, regularizace modelu Perona-Malik a level set model) a i v jejich aproximacích řeší parciální diferenciální rovnice, odvodíme si v páté kapitole numerické schéma pro řešení těchto rovnic. Seznámíme se s prostorovou a časovou diskretizací. K implementaci použijeme Mersonovu metodu.

Šestá kapitola je věnována výsledkům jednotlivých metod. Zde si ukážeme, jak jsou zkoumané metody úspěšné a jak se chovají v jednotlivých případech. Na závěr zhodnotíme výsledky naší práce a splnění zadaných úkolů.

Kapitola 2.

Základní pojmy zpracování obrazu

Zpracování obrazu se zabývá obrazovou informací. Chápejme obraz intuitivně, jako průmět reálného světa na sítnici oka, jako fotografii, obraz na obrazovce počítače, obrázek na papíře, či odraz vodní hladiny. Pro vnímání obrazu počítačem, nazývané počítačové vidění, je třeba najít relaci mezi vstupním obrazem a vytvořenými modely reálného světa. Přechodem od vstupního obrazu k modelu se obrazová informace musí zjednodušit a zároveň si uchovat, co nejvíce. Mezi vstupním obrazem a modelem (úplným popisem, interpretací, klasifikací) se definuje několik úrovní reprezentace obrazové informace. Počítačové vidění se potom skládá z návrhu těchto přechodových reprezentací a algoritmů pro jejich vytváření a zavedení vztahů mezi nimi.

Zamysleme se nejprve nad otázkou, proč je porozumění (interpretace) v úlohách počítačového vidění těžké? Příčinou jsou:

1. *Ztráta informace při perspektivním zobrazení* původně trojrozměrné scény do dvojrozměrné obrazové roviny čidla kamery. Všechny body na polopřímce dané bodem (x, y) v obrazové rovině ve směru od středu promítání se zobrazí právě do bodu (x, y) . Zpětná úloha, která se snaží odvodit trojrozměrné vlastnosti objektů z obrazu jediné kamery, má tedy nekonečně mnoho řešení. Ve skutečnosti ji lze řešit jen tehdy, je-li možné využít dalších dodatečných znalostí.
2. *Komplikovaný a nejednoznačný vztah mezi jasem*, který měří kamera či fotoaparát a většina jiných obrazových senzorů, a *tvaru* povrchu 3D objektů ve scéně. Jas bodu závisí na mnoha vlivech (odrazivosti povrchu pozorovaného předmětu, poloze a vlastnostech zdrojů světla, orientaci povrchu vzhledem k pozorovateli). Úloha určení 3D vlastností pozorovaných objektů na základě radiometrických měření je také nedostatečně určená úloha.
3. *Veliké množství obrazových dat*. Ať se jedná o data z kamer, nebo např. „jen“ o skenovaný text. Zpracování iteračně je pak značně paměťové a i časově náročné.

4. *Šum*, který je v obraze reálné scény vždy přítomen. Proto je při zpracování velmi často nutné použít pravděpodobnostní techniky, a tedy komplikovanější matematické nástroje. Často ovšem není k dispozici tolik obrazů, aby bylo možné korektně odhadnout statistické vlastnosti obrazových signálů. Nezbyvá než se uchylovat k různým zjednodušením.
5. *Vztah mezi pozorovaným detailem a zjištěvaným celkem*. Algoritmy zpracování obrazu mohou obvykle analyzovat vlastnosti jen části obrazu prostřednictvím malého kousku. Tímto způsobem se těžko zjišťují globální vlastnosti obrazu, o které většinou jde.

Postup zpracování a rozpoznávání obrazu reálného světa lze obvykle rozložit do několika základních kroků:

- (i) Snímání a digitalizace obrazu
- (ii) Předzpracování obrazu
- (iii) Segmentace obrazu / detekce hran
- (iv) Porozumění obsahu obrazu

2.1. Snímání a digitalizace obrazu

Prvním krokem zpracování obrazu je snímání a digitalizace obrazu. Získaný obraz je v číselné formě uložen do počítače. Vstupní informací může být jas (z kamery, scanneru), nebo několik spektrálních složek (nejčastěji červená, zelená a modrá) při barevném snímání. Digitalizací se převádí vstupní analogový signál do diskrétního tvaru. Vstupní signál je vzorkován a kvantován. Výsledkem je matice čísel popisujících obraz - digitální obraz. Jednomu prvku matice se říká obrazový element, pixel. Matematickým modelem obrazu je spojitá funkce dvou proměnných - obrazová funkce $f(x, y)$. Hodnota obrazové funkce bývá dána podle konkrétní potřeby, může to být jediné reálné číslo (jas, červená barva, atp.), v počítačové grafice se obvykle jedná o 3 hodnoty R-G-B, H-S-V, H-L-S, aj.

2.2. Předzpracování obrazu

Druhým základním krokem je předzpracování obrazu. Cílem předzpracování je potlačit šum a zkruslení vzniklé při digitalizaci a přenosu obrazu, např. korekce geometrického zkruslení družicových snímků díky zakřivenosti Země. Jindy se předzpracování snaží zvýšit kontrast, pokud jde o obraz, určený pouze k prohlížení člověkem (např. fotografie), či se snaží zvýraznit určité rysy obrazu podstatné pro další zpracování. Příkladem může být hledání hran. Potíž je v tom, že šum je tvořen

hlavně vysokými frekvencemi a hrany s sebou nesou také vysoké frekvence. Metody pro odstranění šumu tudíž ořezávají vysoké frekvence v obraze, což zároveň poškozuje hrany. Je třeba najít inteligentní metody pro odstranění šumu, které ale zachovávají hrany.

Odstraňování šumu

Pro popis šumu se používá teorie pravděpodobnosti. Bílý šum je šum, jehož pravděpodobnost výskytu je stejná pro všechny frekvence. Gaussův šum má danu pravděpodobnost výskytu vztahem

$$G_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (0.1)$$

kde μ je střední hodnota a σ je střední kvadratická odchylka

Odstraňování šumu závisí na způsobu získání obrazu a na charakteristice šumu. Pokud máme k dispozici více exemplářů téhož obrazu, a není-li jejich zdroj zatížen systematickou chybou, pak je nejsnazší postup na odstranění šumu následující. Pro každý pixel napočítáme průměr nebo medián z pixelů ležících na stejných souřadnicích přes všechny exempláře téhož obrazu. Tento případ bohužel není příliš častý. Obvykle máme k dispozici pouze jediný exemplář obrazu a odstraňujeme šum na základě lokální charakteristiky okolí každého pixel. Ovšem za předpokladu že se okolí pixel příliš nemění. V lepším případě známe charakteristiku šumu.

Filtry pracující v prostorové oblasti

Nejjednodušší filtrovací metody vycházející z lokální statistiky okolí počítají hodnotu pixelu jako průměr z jeho okolí. Tím dochází k potlačení vysokých frekvencí (šumu), ale také k rozmazání hran. Tato technika se nazývá obyčejné průměrování. Jednotlivé lineární filtry se liší váhami v lineární kombinaci, které jsou dány příslušnou konvoluční maskou h .

Konvoluce funkcí $f(x, y)$ a $h(x, y)$ je definována vztahem

$$h(x, y) * f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(k, l) f(x - k, y - l) dk dl. \quad (0.2)$$

Konvoluci je možné chápat jako posunující se zkreslující „okno“ funkce $h(x, y)$, kterým zkoumáme funkci $f(x, y)$. Funkce $h(x, y)$ se také označuje jako jádro konvoluce.

Při práci s digitálním obrazem se používá tzv. diskrétní konvoluce, která je diskrétní dvojrozměrnou podobou předchozího vztahu,

$$h(i, j) * f(i, j) = \sum_{n=-k}^k \sum_{m=-k}^k h(n, m) f(i - n, j - m) \quad (0.3)$$

Tuto operaci si můžeme představit jako násobení matice a vektoru. Kde jde o matici konvoluční masky a o vektor, který vytvoříme tak, že si jednotlivé řádky „matice“ obrazu poskládáme za sebe.

Uvedeme si podrobněji Gaussovu lineární filtraci. Konvoluce Gaussova jádra $G_\sigma(x)$, definovaného vztahem (0.1) je navíc ekvivalentní rovnici vedení tepla, což si dokážeme později.

Konvoluce Gaussova jádra a počátečního obrázku u_0 může být interpretována také na frekvenční oblasti. Definujme si Fourierovu transformaci:

$$F[f](\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)e^{-i\omega x} dx, \text{ kde } \omega \in \mathbb{R}^2.$$

Platí, že

$$F[G_\sigma * f](\omega) = F[G_\sigma](\omega)F[f](\omega)$$

a

$$F[G_\sigma](\omega) = \exp\left(-\frac{|\omega|^2}{2\sigma^2}\right)$$

z toho vyplývá, že

$$F[G_\sigma * f](\omega) = \exp\left(-\frac{|\omega|^2}{2\sigma^2}\right)F[f](\omega).$$

Pro velká ω se exponenciála blíží k nule, což znamená, že vysoké frekvence jsou potlačeny. Konvoluce Gaussova jádra je tedy low-pass filtr, potlačuje vysoké frekvence. Což implikuje vyhlazovací vlastnost.



Obrázek 1: Příklad použití Gaussova jádra s různým σ : $\sigma = 0$, $\sigma = 5$, $\sigma = 16$

Filtr, který detekuje Gaussův šum, můžeme aproximovat konvolučním jádrem tvaru:

$$h = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{2}{16} & \frac{4}{16} & \frac{2}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

Dalším příkladem je filtrace pomocí mediánu. Necht' x je náhodná veličina. Medián M je hodnota, pro kterou je pravděpodobnost jevu $x < M$ rovna jedné polovině. Tato technika spočívá

v reprezentaci okolí bodu $f(i, j)$ jeho mediánem. Stačí uspořádat vzestupně hodnoty jasu v lokálním okolí a medián určit jako prvek, který je uprostřed této posloupnosti. Aby se snadno určil prostřední prvek, používají se posloupnosti s lichým počtem prvků, typicky 3×3 , 5×5 , atd. Okolí bodu, které se používá nemusí být nutně čtvercové či obdélníkové, výhodné je okolí ve tvaru kříže. Tato metoda zachovává hrany, ale narušuje tenké čáry a ostré rohy.

Tedy jsme našli metody pro odstranění šumu, které zachovávají hrany. Nejvíc nás bude zajímat konvoluce Gaussovým jádrem z toho důvodu, že je ekvivalentní s rovnicí vedení tepla. Touto rovnicí se budeme zabývat podrobněji.

2.3. Segmentace / detekce hran

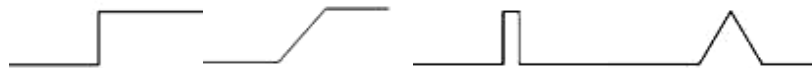
Kvůli neustálému vývoji a rozšiřování informačních technologií narůstá objem dat, která jsou potřeba určitým způsobem zpracovávat, vyhodnocovat a uchovávat. Hledají se proto postupy, jež jednotlivé operace provádějí dostatečně přesně a co nejefektivněji. V naší práci se budeme podrobněji zabývat oblastí zpracování obrazu, a to problémem segmentace.

Segmentace obrazu představuje proces, při němž dělíme vstupní obraz na souvislé oblasti splňující určité kritérium. Jinými slovy, snažíme se oddělit pixely zkoumaných objektů v popředí od pixelů patřících do pozadí obrazu. My se budeme zabývat pouze segmentací šedotónních dat. Metody pro segmentaci barevného obrazu jsou popsány v [36].

Detekce a rozpoznávání objektů v obraze je jedním z nejtěžších problémů zpracování. Za objekty lze považovat ty části obrazu, které nás z hlediska dalšího zpracování zajímají. Kvalitní segmentace / detekce hran jsou klíčovými pro porozumění obsahu obrazu a většinu vyšších metod zpracování obrazu. Z počátku, kdy byl problém segmentace řešen pouze pro úzké spektrum vstupních dat, byly vyvinuty jednoduché přístupy. Uvedme například globální a lokální prahování [23, 35], metody založené na narůstání, spojování a dělení oblastí. Později přicházejí složitější postupy založené na principech matematické morfologie [25]. Výše uvedenými přístupy se dále zabývat nebudeme. My se blíže seznámíme s metodami založenými na detekci hran a v poslední době hojně používaným postupem označovaným level set metoda, který řeší problém segmentace pomocí nulové vrstevnice. V jedné z následujících kapitol se seznámíme s podstatou level set modelů.

Detekce hran

Modelem ideální hrany může být skoková funkce. V reálných obrazech je změna jasu postupná, nikoli skoková, takže je vhodnější použít šikmou funkci. Pokud se obě definované funkce objeví v obraze vedle sebe, vznikají ještě další dva typy hran: čára a střecha. Jednotlivé typy hran jsou znázorněny na následujícím obrázku.



Obrázek 2: Typy hran v obraze. Zleva: skoková, šikmá, čára a střecha.

Proces detekce hran se dá rozdělit na tři fáze: filtrování, diferenciaci a detekci. Šum vzniklý při vzorkování obrazu, kvantování, rozmazání či nevhodném nastavení kamery může být částečně odstraněn vhodným filtrem. Diferenciaci pak zvýrazní oblasti v obraze, kde je změna intenzity jasu obrazu významná. Nakonec jsou detekovány a lokalizovány body, kde je změna intenzity nejvýznamnější.

I přesto, že detekce hran náleží k problémům nižší úrovně zpracování obrazu, je to složitý a dosud ne zcela vyřešený problém v reálných scénách. Hrana v obraze je dána vlastnostmi obrazového elementu a jeho okolí. Je určena náhlou změnou hodnoty obrazové funkce $f(x, y)$ a tím je naznačeno fyzické rozmístění objektů v obraze. Lokální hrany jsou detekovány pomocí hranových detektorů na základě rozdílu hodnot okolních pixelů. Hranový detektor je algoritmus, který produkuje množinu hran (bodů, pixelů, nebo fragmentů) v obraze. Existuje mnoho hranových detektorů. Matematickým nástrojem pro studium změn funkce dvou proměnných jsou parciální derivace. Změnu tvaru funkce udává její gradient, vektorová veličina ∇ , určující směr největšího růstu funkce (směr gradientu) a strmost tohoto růstu (velikost, modul gradientu). Pixely s velkým modulem gradientu odpovídají hranám. Pro spojitou obrazovou funkci $f(x, y)$ jsou velikost gradientu $|\nabla f(x, y)|$ a směr gradientu ψ dány vztahy

$$|\nabla f(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

$$\psi = \arg\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Někdy nás zajímá pouze velikost gradientu (též velikost hrany) bez ohledu na její směr. Druhá parciální derivace se také dá využít při detekci hran. Definujme si lineární Laplaceův operátor (Laplacián) $\nabla^2 = \Delta$, který vychází z druhých parciálních derivací

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$



Obrázek 3: Vlevo gradient obrázku, vpravo laplace obrázku.

Parciální derivace si aproximujeme pomocí diferencí – zpětné, dopředné a centrální (0.4) diference. Obraz je v počítači reprezentován sítí (maticí) s nějakým krokem h_x, h_y . $f(x, y) = f(i, j)$, kde $i = 0, \dots, N_x; j = 0, \dots, N_y$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(i, j) &= \frac{f(i, j) - f(i - 1, j)}{h_x}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(i, j) &= \frac{f(i + 1, j) - f(i, j)}{h_x}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(i, j) &= \frac{1}{2} \frac{f(i + 1, j) - f(i - 1, j)}{h_x} \end{aligned} \quad (0.4)$$

Hrany nalezené v obraze lokálními operátory se někdy používají pro hledání hranic objektů. Za předpokladu, že objektu odpovídá oblast homogenního jasu, jsou body hranice právě pixely s vysokou hodnotou gradientu. Hranové pixely se spojují do hranic, a proto se směr hrany někdy definuje jako kolmý na směr gradientu. Hranové pixely se při takové volbě orientace hrany mohou přirozeně spojovat do hranic.

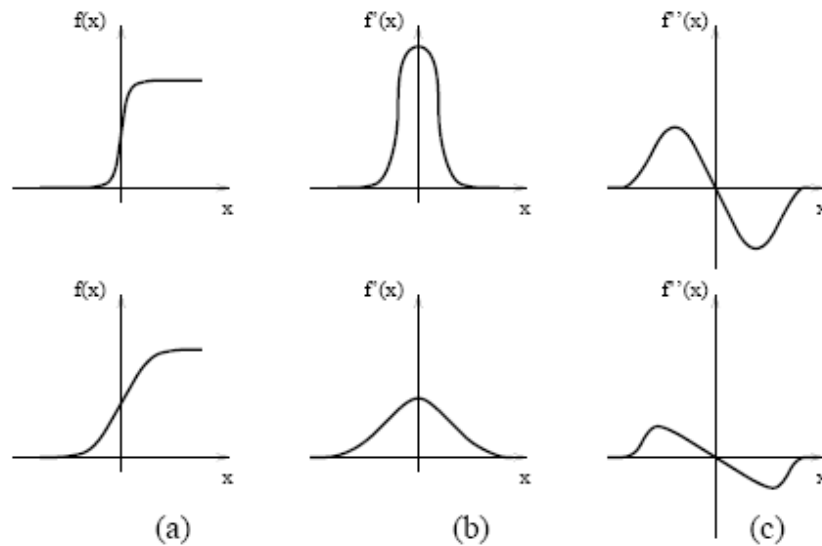
Hranové detektory

Detekce pomocí první derivace

První derivaci diskrétního obrazu získáme jako rozdíl okolních pixelů obrazu. Slovo okolních nemusí přímo znamenat sousedních. V nejjednodušším případě vypočítáme derivaci pro řádky, resp. sloupce zvlášť. Bereme sousední pixely zleva doprava, resp. shora dolů. Problémem operátorů aproximujících derivaci diferencemi v malém okolí je velká závislost jejich chování na konkrétním obrázku. Velikost masky musí odpovídat velikosti detailů v obrázku. Také citlivost na šum je značná.

Detekce pomocí druhé derivace

Při použití druhé derivace se používá detekce průchodu nulou. Je totiž mnohem jednodušší nalézt průchod nulou než extrém. Základem přístupu je hledání polohy hrany v obraze v místě průchodu druhé derivace obrazové funkce nulou. První derivace obrazové funkce nabývá svého maxima v místě hrany. Druhá derivace protíná v místě hrany nulovou hodnotu. Situaci ilustruje pro jednoduchost v 1D případě (Obrázek 4), kde (a) ukazuje skokovou hranu, (b) její první derivaci a (c) průběh druhé derivace. Hledat polohu hrany v místě průchodu nulou je díky strmosti přechodu u druhé derivace mnohem spolehlivější než na plochem maximu u první derivace.



Obrázek 4: 1D jasový profil ilustrující polohu skokové hrany v místě průchodu 2. derivace obrazové funkce nulou.

Nevýhodou metod druhé derivace detekující průchod nulou je příliš velké vyhlazení obrazu, ztráta ostrých rohů, a sklon vytvářet uzavřené smyčky hran.

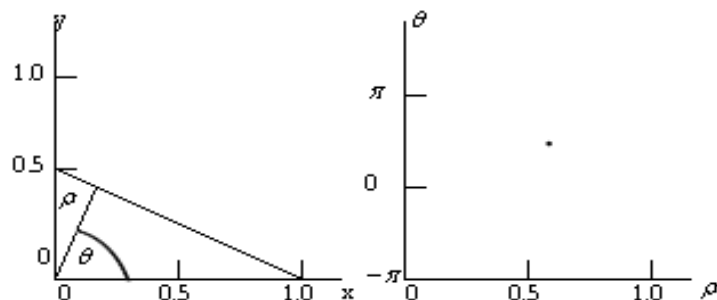
Houghovy transformace

Houghova transformace byla vyvinuta k reprezentaci čar a rovinných křivek. Obrovskou výhodou této metody je její robustnost, kdy segmentace není příliš citlivá na porušená data nebo šum. Jde o transformaci z Kartézského souřadnicového systému do polárního.

Parametrické vyjádření přímky je:

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta,$$

kde ρ je normalizovaná vzdálenost přímky od počátku a θ je úhel vzhledem k ose x . Body obrazu jsou prezentovány křivkami v parametrickém prostoru. Jedná-li se o kolinéární body (z jedné přímky), křivky v parametrickém prostoru se nejčastěji protínají právě v bodě reprezentující parametry hledané křivky (přímky).



Obrázek 5: Houghova transformace přímky.

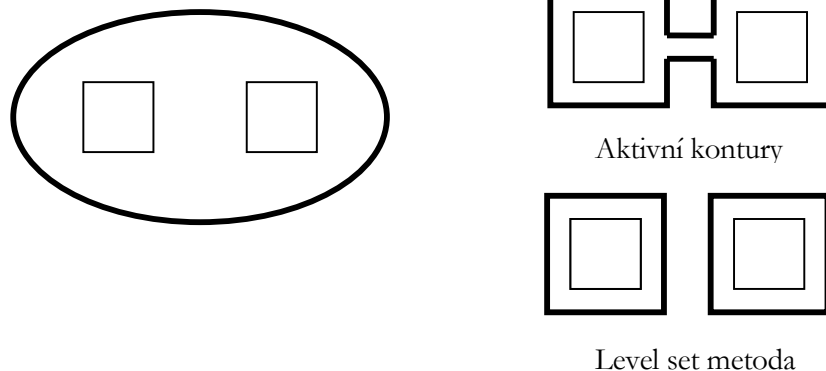
Nevýhodou Houghovy transformace je nepřesnost úprav obrazu v blízkosti počátku.

Aktivní kontury

Aktivní kontury (snakes, active contours) je metoda postupného tvarování kontur až ke hraně objektu v obraze. Model aktivní kontury je popsán parametrickou funkcí. Metoda je vhodná i pro složité a komplexní tvary. A umožňuje nastavení parametrů ovlivňujících výsledný tvar kontury.

Level set metoda

Obdobný přístup jako aktivní kontury využívá tzv. level set metoda (vrstevnicová metoda) představená pány Osherem a Sethianem [19]. Křivka je reprezentována tzv. nulovou hladinou - řezem v rovině xy nějakou vícedimenzionální implicitní funkcí. Tato funkce se nazývá level set funkcí a každému bodu roviny xy přiřazuje jeho výšku nad nulovou hladinou. Povrch funkce se postupně přizpůsobuje tvaru objektů v obraze. Základní rozdíl vrstevnicové metody proti klasickým aktivním konturám je ten, že tvar křivky neměníme přímo, ale prostřednictvím level set funkce. Obecně lze říci, že vrstevnicová metoda je efektivnější pro komplexní objekty se složitými tvary. Předností level set metody je, že dokáže postihnout topologické změny v obraze, jako např. rozdělení jedné křivky na více křivek, či naopak spojení dvou a více křivek do jedné. Obě techniky, aktivní kontury i level set metoda, vyžadují manuální inicializaci, která přibližně odpovídá cílovému tvaru křivky. S touto metodou se seznámíme podrobněji v jedné z následujících kapitol.



Obrázek 6: Rozdíl metody aktivních kontur a level set metody při postihnutí topologických změn v obrazu.

Segmentace obrazu

Obecná definice segmentace říká, že je to proces dělení obrazu do částí, které korespondují s konkrétními objekty v obraze. Jinými slovy, každému obrazovému pixelu je přiřazen index segmentu vyjadřující určitý objekt v obraze. Segmentace je jeden z nejdůležitějších kroků analýzy obrazu. Informaci o rozdělení obrazu do jednotlivých segmentů využívají vyšší algoritmy zpracování obrazu. Snaží se porozumět obsahu obrazu. Konkrétním úkolem může být detekce přítomnosti příslušného objektu nebo nalezení a klasifikace objektů v obraze. Precizní segmentace je důležitá i pro 3D modelování objektů.

Definice : Segmentace obrazu $f(x, y)$ je jeho dělení na jednotlivé objekty R_1, R_2, \dots, R_n tak, že tyto objekty splňují následující kritéria:

$$\bigcup_{i=1}^n R_i \subset f(x, y),$$

$$R_i \cap R_j = \phi, i \neq j,$$

Každý objekt splňuje jedno z tvrzení (popř. množinu tvrzení): Všechny pixely v objektu R_i mají stejnou úroveň šedi. Všechny pixely v objektu R_i se neliší v úrovni šedi více než o předepsanou hodnotu. Standardní odchylka úrovně šedi všech pixelů objektu R_i je dostatečně malá.

Možné přístupy k segmentaci

V průběhu let bylo publikováno mnoho segmentačních algoritmů. V první řadě se zaměříme na obecné segmentační techniky. K segmentaci je možné přistoupit několika základními způsoby. Podle přístupu dělíme tyto segmentační algoritmy.

Metody orientované na oblasti v obraze

Principiálně jsou stejné jako hranové detektory. Pokud lze identifikovat hrany, měly by tyto hrany teoreticky ohraničovat. Kontury regionů však mohou být porušené, nemusí ohraničovat celý region. Ani v opačném případě není zaručeno, že hranice regionů nalezené hranovým detektorem budou stejné jako ty nalezené metodou na hledání oblastí. A v praxi také nejsou stejné.

Statistické metody

V tomto případě je základem segmentace statistická analýza obrazových dat, nejčastěji hodnot pixelů. Strukturní informace je obvykle zanedbávána.

Znalostní metody

Znalost vlastností segmentovaných objektů (tvar, barva, struktura, apod.) mohou segmentaci značně ulehčit. Metody patřící do této kategorie využívají atlas předloh či modelů segmentovaných objektů (např. u medicínských dat to může být atlas lidských tkání). Atlas je generován automaticky ze souboru trénovacích dat, nebo jsou do něj informace vkládány ručně na základě lidské zkušenosti. V průběhu segmentace algoritmus hledá transformaci známých objektů, šablon v atlasu, na objekty nalezené v obraze. Tento proces se obvykle nazývá atlas-warping.

Hybridní metody

Některé segmentační techniky je těžké zařadit do jedné z předchozích tří kategorií, protože obsahují prvky každé z nich. Mluvíme tedy o tzv. hybridních metodách. Mezi hybridní řadíme také metody založené na matematické morfologii. Jedná se o skupinu metod, která pro segmentaci využívá matematických charakteristik obrazu, např. průběh gradientu.

Čtvrtý bod Porozumění obsahu obrazu není předmětem této práce, tedy se jím nebudeme zabývat.

Kapitola 3.

PDE modely

V této kapitole se budeme zabývat několika konkrétními parciálními diferenciálními rovnicemi, PDE (*partial differential equation*), které se používají při zpracování obrazu. Jde o rovnici vedení tepla a rovnici, kde vhodnou modifikací měníme účinky rovnice na daný obraz. Nejprve pojmy a značení, které budeme používat.

Umístěním obrázku ve spojitém případě budeme rozumět oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Obrázek je jasová funkce $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že každému bodu (x, y) přiřazuje hodnotu $u(x, y)$. Navíc budeme uvažovat pouze obrázky ve stupních šedi s jedním kanálem. Pak $u(x, y)$ značí hodnotu úrovně šedi na pixelu (x, y) . Kromě toho budeme označením u rozumět „dokonalý“ původní obrázek popisující reálnou scénu. Symbolem u_0 , což je také funkce $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, budeme označovat získaný obrázek z obrázku u , degradací u . Degradace obrazu je způsobená, buď přenosem signálu nebo defekty v zobrazování. Chyby v přenosu se v obraze projeví jako šum (náhodná perturbace) a chyby zobrazení jsou rozmazání obrazu (deterministická perturbace).

Vezměme si nejjednodušší model vztahu mezi „dokonalým“ původním obrázkem u s jeho degradací u_0 : (η představuje šum a R rozmazání)

$$u_0 = Ru + \eta \quad (0.5)$$

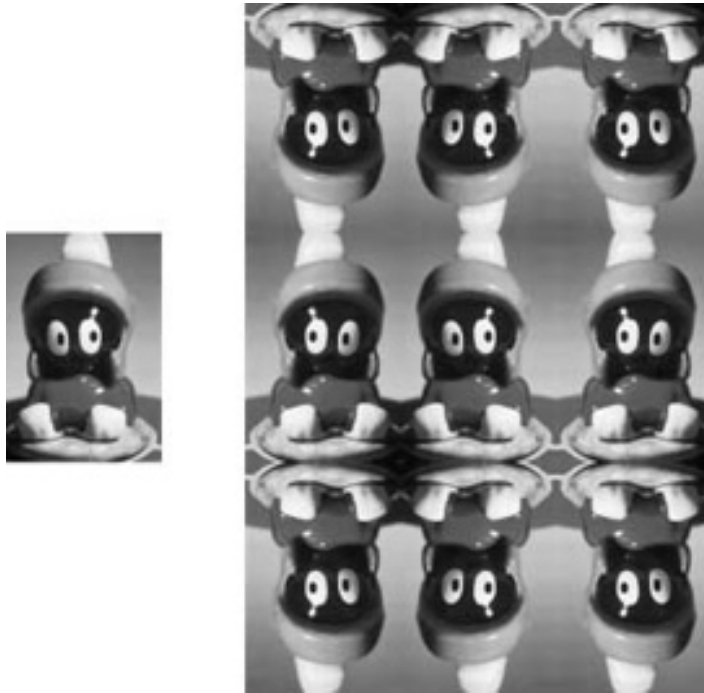
Je otázkou jak rekonstruovat obrázek u z u_0 a z (0.5), když R známe, ale pro η jsou známé pouze některé statistické údaje (průměr, variace), např. u Gaussova šumu známe pouze střední hodnotu a rozptyl. R je lineární operátor, je to např. konvoluce. V diskrétním případě si můžeme R představit jako matici (viz konvoluce (0.2), (0.3)). Pokud je tato matice špatně podmíněna, pak nejsme schopni numerickými metodami získat k ní inverzní a tedy nejsme ani schopni získat rekonstruovaný obrázek u z u_0 . Budeme předpokládat pro zjednodušení, že R je identický operátor.

Pro řešení PDE musíme mít zadané okrajové podmínky. V našem případě se Dirichletovy okrajové podmínky nehodí kvůli možnému tvoření artefaktů. Neumannovy okrajové podmínky by bylo možné použít, ale ve zpracování obrazu se nejvíce používá rozšíření. Musíme u_0 rozšířit na celé \mathbb{R}^2 - symetrií a pak periodizací.(viz Obrázek 7).

Necht' $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ rozšíříme u_0 na $(-1,1) \times (-1,1)$ symetrií:

$$\tilde{u}_0(x, y) = u_0(\pm x, \pm y); \forall (x, y) \in (-1,1) \times (-1,1).$$

Pak rozšíříme na \mathbb{R}^2 periodizací. Funkci, která takto vznikne budeme nazývat 2-periodická vzhledem ke všem proměnným. Obrázek tedy symetricky „oklopíme“ a pak tuto dvojici periodicky rozložíme na celé \mathbb{R}^2 . Tento způsob rozšíření u_0 je ve zpracování obrazu často používán.



Obrázek 7: Rozšíření obrázku u_0 původně definované na $(0,1) \times (0,1)$ do \mathbb{R}^2 symetrií a pak periodizací.(převzato z [7])

Dále v textu budeme označením u_0 rozumět její rozšíření. Máme rekonstruovat obrázek u z u_0 . Jak bylo řečeno v předchozí kapitole u lineární filtrace, pokud u_0 je poškozeno šumem, odstraňuje se šum konvolucí pomocí konvolučního jádra h (0.2). Ve spojitém případě:

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(k, l) u_0(x - k, y - l) dk dl \quad (0.6)$$

kde h je dané konvoluční jádro. Vezměme Gaussovo jádro (0.1), tzv. Gaussián.

$$G_\sigma(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2\sigma^2}\right) \quad (0.7)$$

A obrázek u dostaneme po odstranění šumu z obrázku u_0 následovně:

$$u(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}^2} G_\sigma(x', y') u_0(x - x', y - y') dx' dy' = (G_\sigma * u_0)(x, y) \quad (0.8)$$

Kde vztah mezi t a σ je:

$$\sigma = \sqrt{2t} \quad (0.9)$$

Rovnice vedení tepla je ekvivalentní konvoluci Gaussovým jádrem. To je důvod, proč se využívá rovnice vedení tepla ve zpracování obrazu. Koenderink, viz [1], dokázal vypočtením výrazů

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t),$$

kde u je dáno (0.8), že mezi těmito výrazy platí následující vztah:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) \text{ na } \mathbb{R}^2 \times (0, T) \\ u(x, y, t = 0) = u_0(x, y) \text{ na } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (0.10)$$

Kde

$$\Delta u(x, y, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t)$$

Dostáváme rovnici vedení tepla.

3.1. Rovnice vedení tepla

Nyní si uvedeme větu o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice vedení tepla. Pohybujeme se v oblasti $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Zavedme si symboly $L_{\#}^1(\Omega)$ a $L_{\#}^{\infty}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} L_{\#}^1(\Omega) &= \left\{ u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; 2\text{-periodická, } \int_{\Omega} |u(x, y)| dx dy < +\infty \right\} \\ L_{\#}^{\infty}(\Omega) &= \left\{ u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; 2\text{-periodická, } \text{ess sup}_{\Omega} |u(x, y)| < +\infty \right\} \end{aligned} \quad (0.11)$$

Věta 1: Necht' je dáno $u_0 \in L_{\#}^1(\Omega)$ a Gaussovo jádro G_{σ} definované (0.7) a (0.9), pak

$$(i) \quad u(x, y, t) = (G_{\sigma} * u_0)(x, y) \text{ splňuje } \forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) \text{ na } \mathbb{R}^2 \times (0, T) \\ u(x, y, t = 0) = u_0(x, y) \text{ na } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (0.12)$$

$$(ii) \quad \text{Pokud } u_0 \in L_{\#}^{\infty}(\Omega), \text{ pak } \forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\inf_{\mathbb{R}^2} u_0(x, y) \leq u(x, y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^2} u_0(x, y)$$

$$(iii) \quad u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \times (0, T)), \text{ pro } \forall T > 0$$

$$(iv) \quad \lim_{(x, y, t) \rightarrow (x^0, t)} u(x, y, t) = g(x^0) = u_0 \text{ pro } \forall x^0 \in \mathbb{R}^2, \text{ kde } (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0.$$

Důkaz : viz [2].

Co se touto větou dovídáme? V prvním bodě je formulovaná ekvivalence rovnice vedení tepla s konvolucí Gaussiánem. Druhý bod dává, že pomocí konvoluce Gaussiánem se nemůžeme dostat mimo hodnoty jasu obrázku u_0 . Dalším bodem dostáváme tvrzení, že pro libovolně malý čas T je řešení rovnice vedení tepla hladká funkce na \mathbb{R}^2 . V posledním bodě (iv) je formulováno, že řešení se vyvíjí spojitě z počáteční podmínky, není to žádná skoková změna (Věta 1:).

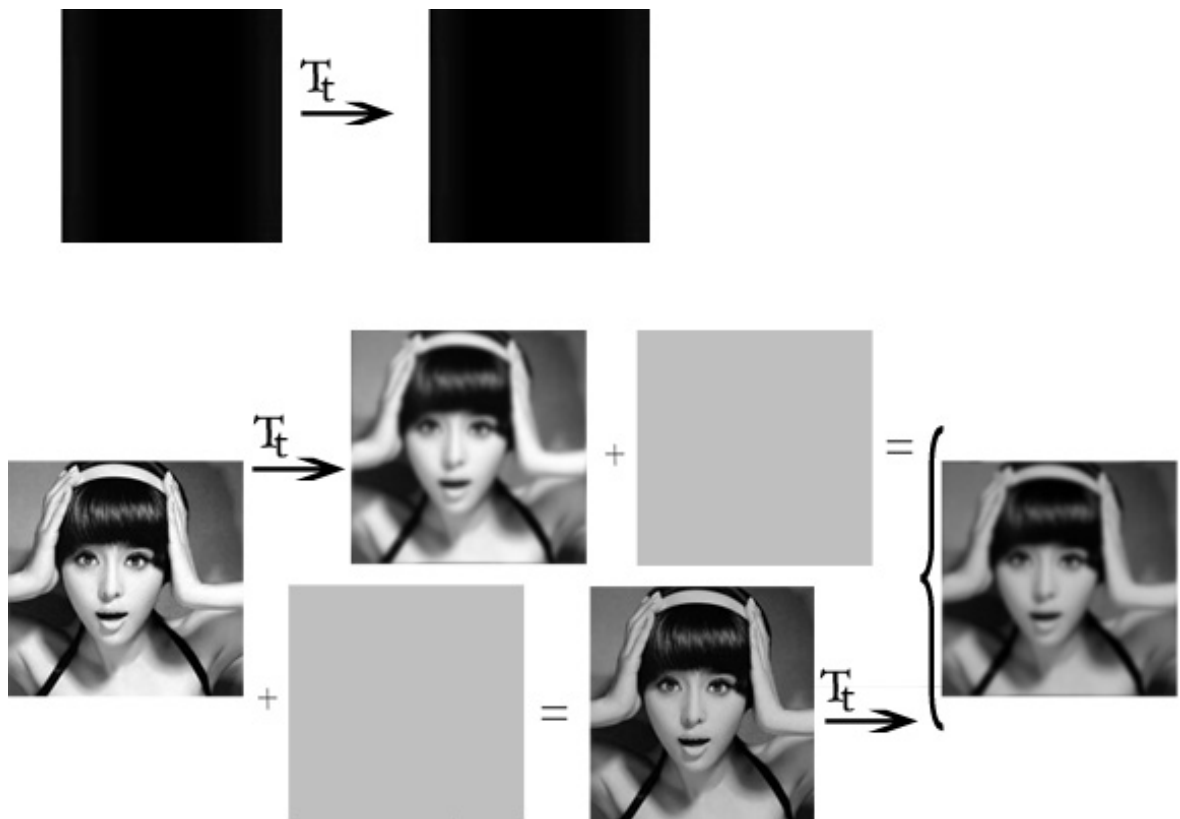
Invariantní vlastnosti řešení rovnice vedení tepla

Řešení rovnice vedení tepla u dostaneme z u_0 , označíme si to jako $u = T_t u_0$. Necht' $T_t, t > 0$, je množina operátorů z L^1_Ω do L^1_Ω definovaných $u = T_t u_0$. Protože T_t je konvoluce, což je lineární operace, je T_t množina lineárních operátorů. Uvedeme si invariantní vlastnosti operátorů z T_t .

1. Invariant posun stupně šedé:

$$T_t(0) = 0 \text{ a } T_t(u_0 + c) = T_t u_0 + c, \text{ pro libovolnou konstantu } c$$

Interpretace: Černý obrázek zůstane černý. A když přičteme konstantní jas k obrázku, ať před vyhlazením, tak po vyhlazení, dostaneme stejný výsledek.

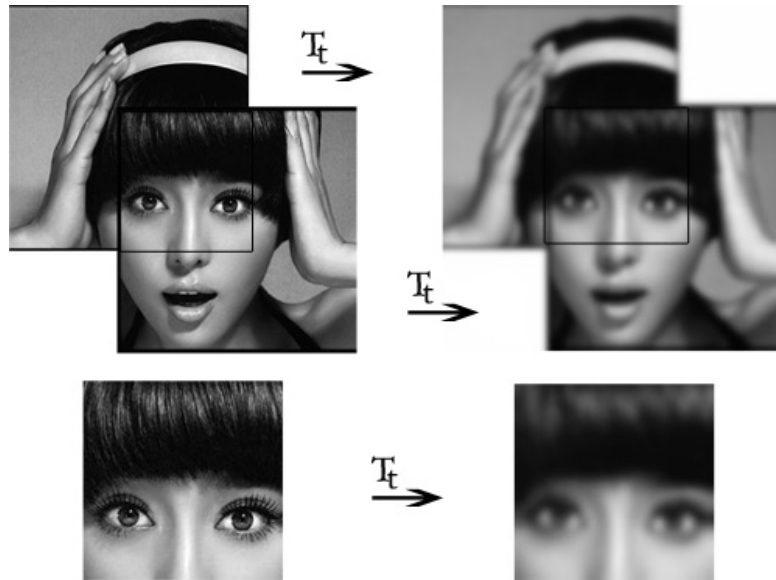


Obrázek 8: Invariant posun stupně šedé.

2. Translační invariant (posun)

$$T_t(\tau_h u_0) = \tau_h(T_t u_0), \text{ kde } \tau_h \text{ je posun, } \tau_h(f)(x, y) = f(x + h_1, y + h_2), h = (h_1, h_2)$$

Interpretace: Účinek operátoru T_t na každý bod v obrázku nezávisí na jeho pozici v obrázku.

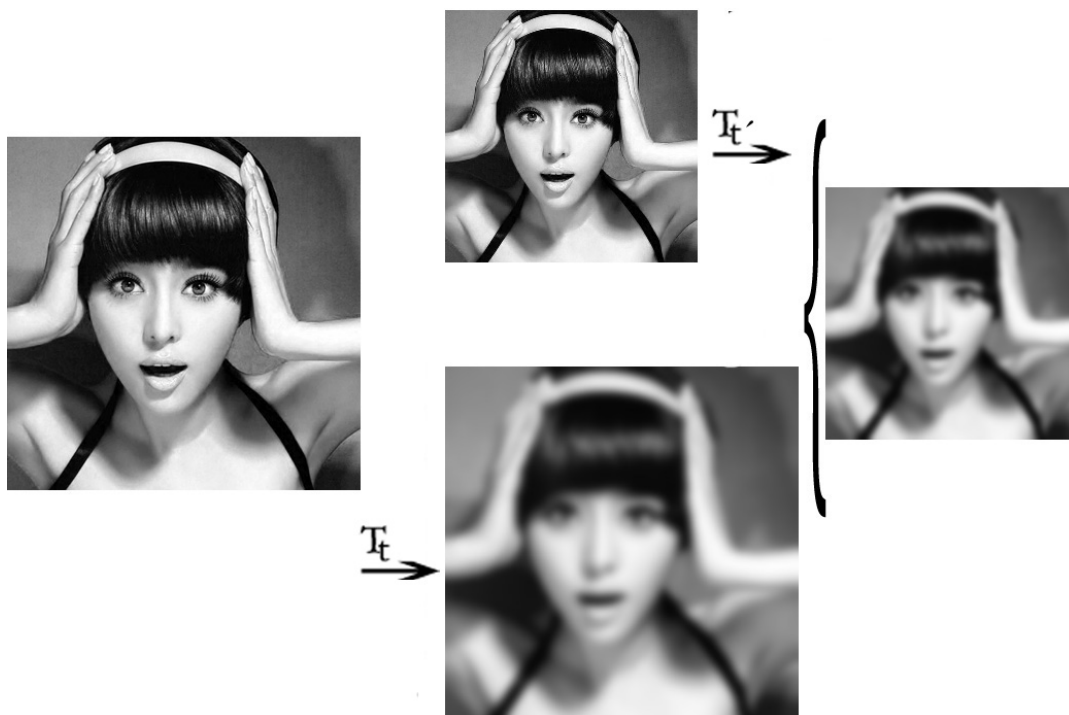


Obrázek 9: Translační invariant.

3. Měřítkový invariant

$$T_t(H_\lambda u_0) = H_\lambda(T_t u_0) \text{ s } t' = t\lambda^2, \text{ kde } (H_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$$

Interpretace: Pokud chceme vyhlazený obrázek přeškálovat, získáme stejný výsledný obrázek i pokud pořadí operací zaměníme. Když provedeme přeškálování a pak vyhladíme obrázek s časem t' .

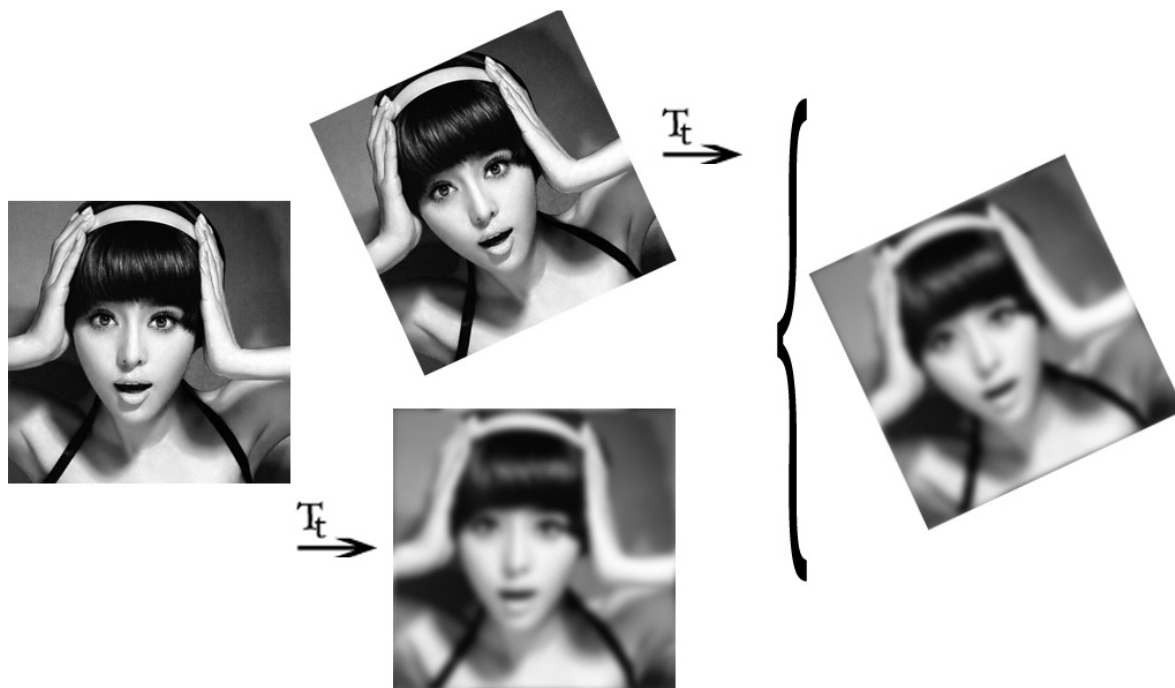


Obrázek 10: Měřtkový invariant.

4. Izometrie

$T_t(Ru_0) = R(T_tu_0)$ pro libovolnou ortogonální transformaci R , kde $(Rf)(x, y) = f(R(x, y))$

Interpretace: Stejně jako u měřtkového invariantu nemá pořadí operací, vyhlazení (tj. aplikace operátoru T_t) a libovolná ortogonální transformace obrázku, vliv na výsledný obrázek.



Obrázek 11: Izometrie.

5. Zachování průměrné hodnoty jasu

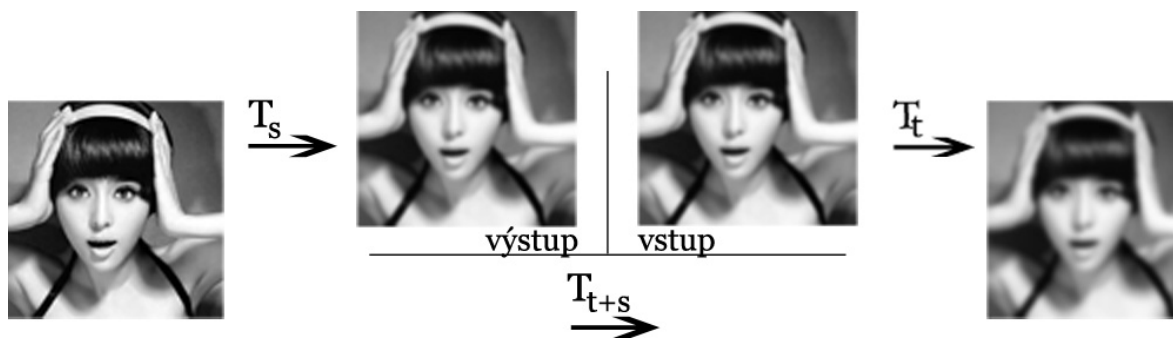
$$Mu_0(x, y) = M(Tu_0(x, y)), \text{ kde } Mf = \frac{\int_{\Omega} f(x, y) dx dy}{\mu\Omega}, \mu\Omega = \int_{\Omega} 1 dx dy$$

Interpretace: Lineární operátor zachovává průměrnou hodnotu jasu jaká byla u počátečního obrázku. Průměrná hodnota jasu je v každém kroku vyhlazování stejná

6. Vlastnost pologrupy

$$T_{t+s}u_0 = T_t(T_s u_0)$$

Interpretace: Vyhlazování s parametrem $t + s$ nebo prvně s parametrem s a pak s parametrem t dává stejný výsledný obrázek.

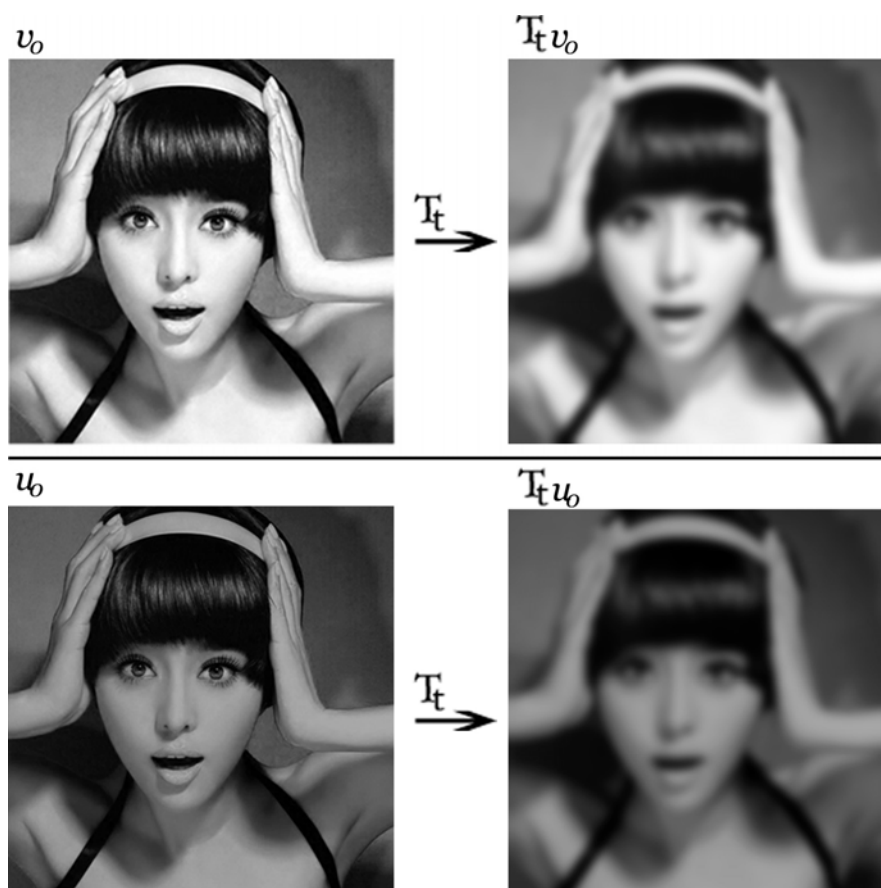


Obrázek 12: Vlastnost pologrupy.

7. Srovnávací pravidlo

Pokud $u_0 \leq v_0$, pak $(T_t u_0) \leq (T_t v_0)$

Interpretace: Máme-li dva obrázky s rozdílnou úrovní jasu, pak i po aplikaci operátoru T_t budou mít obrázky rozdílnou úroveň jasu. Jednodušeji řečeno, tmavší obrázek zůstane i po vyhlazení tmavší.



Obrázek 13: Srovnávací pravidlo.

Tyto invariantní vlastnosti jsou vlastně přirozené vlastnosti, které intuitivně předpokládáme u každé metody ve zpracování obrazu. A tak, jestliže je rovnice vedení tepla splňuje, může být úspěšně používána ve zpracování obrazu. Přesto má jeden zásadní nedostatek: příliš rychle vyhlazuje. (plyne z bodu (iii) Věta 1:) Tato vlastnost je nežádoucí, protože se ztrácí podstatné informace o obrazu. Hrany se rozmazou, či úplně vyhladí. Detaily se ztrácí. Odtud plyne nutnost nelineární filtrace.

3.2. Nelineární modely

Důvodem, proč se bude zabývat nelineárními modely jsou výše uvedené nedostatky lineárního modelu. Popíšeme si modely, které budou zobecněním rovnice vedení tepla. A které zároveň při odstraňování šumu zachovají hrany.

Pro $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ budeme používat následující značení. Pro derivace:

$$u : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}(X), \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}(X), \quad u_{xx} = \dots$$

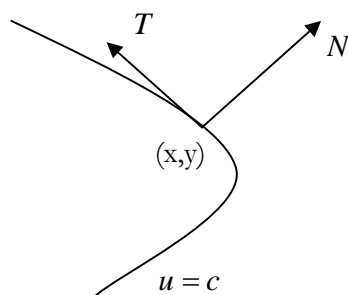
Gradientem budeme rozumět:

$$\nabla u(X) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

A Hessián bude označovat:

$$\Delta u(X) = \nabla^2 u(X) = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}$$

Nechť je dána dostatečně hladká křivka $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) = c, c \text{ je konstanta}\}$, tak aby existovala alespoň 1.derivace. Definujme si směry N a T spojené s obrázkem (viz Obrázek 14).



$$T = \frac{1}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} -u_x & u_y \end{pmatrix} \text{ - jednotkový tangenciální vektor}$$

$$N = \frac{1}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} u_x & u_y \end{pmatrix} \text{ - jednotkový normálový vektor}$$

Obrázek 14: Tangenciální a normálový vektor.

Druhé derivace ve směru N a T budeme označovat u_{NN} a u_{TT} . A jsou dány následovně:

$$u_{NN} = N' \nabla^2 u N = \frac{1}{|\nabla u|^2} (u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy})$$

$$u_{TT} = T' \nabla^2 u T = \frac{1}{|\nabla u|^2} (u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx})$$

Sečtením těchto dvou druhých derivací ve směru dostáváme: $u_{TT} + u_{NN} = \Delta u$.

Poznámka: Ve skutečnosti $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Delta u$ pro všechny směry $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ takové, že $\vec{\xi} \perp \vec{\eta}$ a $|\vec{\xi}| = |\vec{\eta}| = 1$.

Jak si můžeme všimnout na Obrázek 10, rovnice vedení tepla (0.12) je izotropní; tj. žádný směr šíření (difúze) není zvýhodněn. Vyhlazování je stejné ve všech směrech. Odtud vyplývá, že potřebujeme anizotropní model, abychom potlačili vyhlazování hran.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \nabla \cdot (\nabla u)$$

Jako první nelineární model si vezmeme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (c(|\nabla u|^2) \nabla u) \\ u(x, y, t = 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (0.13)$$

Od této rovnice očekáváme, že se vyhladí, co má být vyhlazeno, jako jsou nepodstatné, homogenní oblasti a naproti tomu se zvýrazní hrany. Tedy pravá strana rovnice (0.13) by měla pro malé hodnoty $|\nabla u|$ vypadat jako rovnice vedení tepla a pro velké hodnoty $|\nabla u|$ by měla být téměř nulová.

Difúzní člen $c(s)$ je funkce taková, že $c(s) : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$. Pokud $c \equiv 1$, pak z (0.13) dostaneme rovnici vedení tepla. Difúzní člen chceme zpomalit na hranách, a tam kde nejsou hrany, chceme aby byla difúze větší. Pro $|\nabla u| = 0$ předpokládáme, že $c(0) = 1$. Aby pro velké hodnoty $|\nabla u|$ byl difúzní člen $c(s)$, $s = |\nabla u|^2$, téměř nulový, necht' platí $\lim_{s \rightarrow +\infty} c(s) = 0$. Navíc, aby hodnota funkce $c(s)$ klesala monotónně s rostoucí hodnotou $|\nabla u|$, budeme předpokládat, že $c(s)$ je nerostoucí funkce.

Shrňme si požadavky na $c(s)$. Funkce $c(s)$ má následující vlastnosti:

- Pokud velikost gradientu u je redukována, $|\nabla u(x, y)| \simeq 0$, pak $c(|\nabla u(x, y)|) \simeq 1$ a $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, tedy se rovnice (0.13) chová jako rovnice vedení tepla, se stejnými vyhlazovacími vlastnostmi.
- Pokud velikost gradientu u je velká, $|\nabla u(x, y)| \simeq \infty$, $c(|\nabla u(x, y)|) \simeq 0$ a $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, tedy se neděje nic a hrany jsou zachovány.

Jaká je nejlepší volba $c(s)$?

- **Z obrazového hlediska.**

Formální úpravou pravé strany nelineárního modelu (0.13) dostáváme:

$$\nabla \cdot (c(|\nabla u|^2) \nabla u) = c(|\nabla u|^2) u_{TT} + (c(|\nabla u|^2) + 2|\nabla u|^2 c'(|\nabla u|^2)) u_{NN}$$

Tj. model související s vyhlazováním ve směru N a T .

Pokud jde o homogenní oblast bude gradient u malý, $|\nabla u(x, y)| \simeq 0$. Z požadavků na funkci $c(s)$, pro $|\nabla u| \rightarrow 0$ je $c(0) \simeq 1$, dostáváme z (0.13) rovnici vedení tepla. Když „narazíme“ na hranu, představíme si ji jako vrstevnici. Ve směru N budeme chtít, aby se nic nedělo. Tj., aby nedocházelo k žádné difúzi ve směru N . Aby tedy koeficient $c(s) + 2sc'(s)$ u členu u_{NN} byl $c(s) + 2sc'(s) \simeq 0$ pro $s \rightarrow +\infty$, což splňuje např. $c(s)$ tvaru $c(s) \simeq \frac{a}{\sqrt{s}}$. Pak

$$\nabla \cdot (c(|\nabla u|^2) \nabla u) \simeq \nabla \cdot \left(a \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = a \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = a \kappa(x, y)$$

kde $\kappa(x, y) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ je křivost vrstevnice v bodě (x, y) .

Požadavky na funkci $c(s)$ z obrazového hlediska se dají zformulovat takto:

$$\begin{cases} c : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty) \text{ nerostoucí} \\ c(0) = 1 \text{ a } c(s) \simeq \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ pro } s \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (0.14)$$

- **Z matematického pohledu**

Rovnice (0.13) může být přepsána následovně:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_{11} (|\nabla u|^2) u_{xx} + 2a_{12} (|\nabla u|^2) u_{xy} + a_{22} (|\nabla u|^2) u_{yy} \quad (0.15)$$

Kde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2u_x^2 c'(|\nabla u|^2) + c(|\nabla u|^2) \\ a_{12} &= 2u_x u_y c'(|\nabla u|^2) \\ a_{22} &= 2u_y^2 c'(|\nabla u|^2) + c(|\nabla u|^2) \end{aligned}$$

Rovnice (0.15) je kvazi-lineární PDE, což znamená, že je lineární vzhledem k nejvyšší derivaci u . Abychom mohli použít teorie parabolických rovnic k důkazu existence řešení (viz. [5]). Musí být pro koeficienty a_{ij} splněna klasická podmínka:

$$\sum_{i,j=1,2} a_{ij} (|\nabla u|^2) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall (\xi_i, \xi_j) \in \mathbb{R}^2 \quad (0.16)$$

Pro naše účely použijeme slabší podmínku.

$$\sum_{i,j=1,2} a_{ij} (|\nabla u|^2) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall (\xi_i, \xi_j) \in \mathbb{R}^2 \quad (0.17)$$

Pak ale už nemůžeme pro důkaz existence řešení použít teorii parabolických rovnic, proto použijeme důkazu uvedený viz [37], ve kterém je aplikována teorie plogrup a maximálních operátorů.

Algebraickou úpravou podmínky (0.17) dostaneme nerovnost

$$b(s) = c(s) + 2sc'(s) > 0$$

Shrneme-li požadavky na $c(s)$.

$$\begin{cases} c : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), \text{ nerostoucí} \\ c(0) = 1, \quad c(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}, \text{ kdy } s \rightarrow +\infty \\ b(s) = c(s) + 2sc'(s) > 0 \end{cases} \quad (0.18)$$

Příkladem takové funkce je $c(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}}$.

Model Perona-Malik

Za funkci $c(s)$ splňující podmínky (0.18) a rovnici (0.13), můžeme například vzít $c(s) = \frac{1}{1+Ks}$, která klesá pro s rostoucí. Pokud je $|\nabla u| \leq K$, pak dostáváme rovnici vedení tepla.

Pro $K = 1$ má rovnice modelu Perona-Malik tvar:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u(x, y, t)}{1 + |\nabla u(x, y, t)|^2} \right) \\ u(x, y, t = 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (0.19)$$

Regularizace Perona-Malik modelu

Nyní si představíme regularizaci modelu Perona-Malik, kterou navrhli Catte a kol. V difúzním koeficientu $c(|\nabla u|^2)$ rovnice (0.13) substituujeme gradient u , ∇u , gradientem částečně vyhlazeným, $G_\sigma * \nabla u$, kde G_σ je vyhlazovací jádro, např. Gaussián (0.7).

Platí $G_\sigma * \nabla u = \nabla(G_\sigma * u) = \nabla G_\sigma * u$, odtud budeme předpokládat model:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u(x, y, t)}{1 + |(\nabla G_\sigma * u)(x, y, t)|^2} \right) \\ u(x, y, t = 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (0.20)$$

Kde u je rozšířeno v \mathbb{R}^2 pomocí symetrie a periodicity. (viz Obrázek 7). Tento model má nejméně 2 přednosti jiné oproti modelu Perona-Malik.

- Regularizace převede špatně podmíněnou úlohu (0.19) na dobře podmíněnou.
- Pokud jsou počáteční data velmi zašuměná (velké oscilace v gradientu u), pak model Perona-Malik nemůže rozhodnout mezi „pravými“ a „falešnými“ hranami. Regularizovaný model (0.20) zabraňuje tomuto nedostatku. Model Perona-Malik se „zpomaluje“ na šumu. Vyhlazováním dojde k odstranění šumu, ale hrany zůstanou zachované, i když také trochu vyhlazené. Což nám ale nevadí, jde o to, aby docházelo ke „zpomalení“ vyhlazování pouze o hranu, nikoli o šum. Rovnice (0.20) difunduje pouze pokud je gradient odhadován jako malý.

Tato dvě tvrzení si uvedeme bez důkazu. Jsou dokázána viz [1]. Další modely si uvedeme jen pro úplnost výčtu. Podrobněji se jimi zabývat nebudeme.

Rudin-Osher-Fatemi model

Začneme s Rudin-Osher-Fatemi modelem pro vyhlazování, který má tvar: $\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$

Model Alvareze

Alvarez a kol. nezávisle na předchozím modelu navrhli obměnu, kde úprava gradientu není lokální. Rovnice pak má tvar: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{|\nabla u|}{|k * \nabla u|} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$

Kimia, Tannenbaum a Zucker model

Tuto rovnici také použili Sethian a Osher jako nástroj pro algoritmus vývoje rozhraní ve vrstevnicové metodě. $\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$

Sochen, Kimmel a Malladiho model

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$$

Nyní se seznámíme s level set metodou.

Kapitola 4.

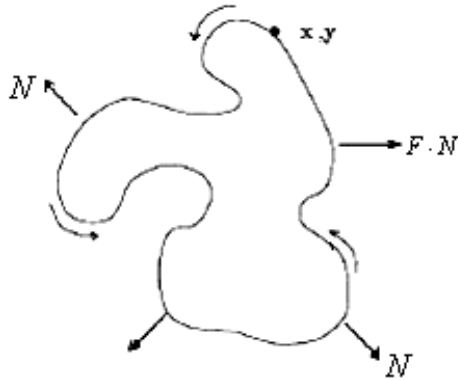
Level set metoda

Level set metoda byla vyvinuta v 80. letech americkými matematiky S. Osherem a J. A. Sethianem [19]. Stala se populární v mnoha disciplínách, např. ve zpracování obrazu, v počítačové grafice, optimalizaci nebo v dynamice tekutin.

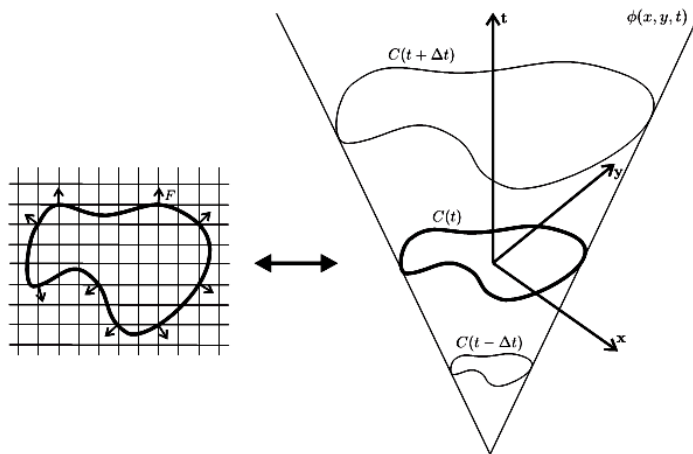
My se budeme level set metodou zabývat v souvislosti s detekcí hran pomocí vývoje křivek. Zvolíme počáteční křivku (dostatečně velkou resp. dostatečně malou) a necháme ji stahovat resp. rozpínat tak, aby ze zachytávala o hrany. Tato evoluce se popisuje pomocí parciálních diferenciálních rovnic udáním rychlosti pohybu křivku v každém jejím bodě ve směru normály.

Pro popis křivky lze volit parametrický popis nebo implicitně - vrstevnicové (Level set) metody, metody fázového pole. Implicitní přístup nazýváme Eulerovým přístupem. S metodami fázového pole je spojen pojem rozhraní, pomocí těchto metod se modelují fázové přechody. Parametrický popis, který nazýváme Lagrangeovým přístupem, je velmi efektivní, ale neporadí si se změnou topologie křivky tzn. když se třeba křivka rozdělí na více částí. To je při detekci hran velmi běžný případ, proto volíme raději level set metody z důvodů, které jsme uvedli výše.

Level set metoda je numerická metoda pro segmentaci objektů v obraze na základě detekce hran. Předností vrstevnicové metody je, že při počítání vývoje křivek a rozhraní na pevně dané mřížce se nemusí tyto objekty parametrizovat. Na rozdíl od parametrického přístupu, level set modely reprezentují křivku $C(t)$ jako nulovou vrstevnici implicitně zadané funkce ϕ (viz Obrázek 16). Dimenze funkce ϕ je vždy o jedničku vyšší než dimenze pohybujícího se rozhraní. V našem případě je $\phi(x, y, t)$ funkce dvou prostorových proměnných x , y a jedné časové proměnné t . Pohyb nulové vrstevnice ve směru normálového vektoru N rychlostí F je zde realizován v rámci vývoje celé funkce ϕ a následného nalezení nové nulové vrstevnice. Dodejme, že vývoj funkce ϕ je založen na řešení parciální diferenciální rovnice, kterou si odvodíme v této kapitole.



Obrázek 15: Vývoj křivky pohybující se rychlostí F v normálovém směru.



Obrázek 16: Implicitní reprezentace hranice ve 2D.

Implicitní přístup reprezentace pohybující se křivky eliminuje nedostatky parametrických modelů a poskytuje další výhody.

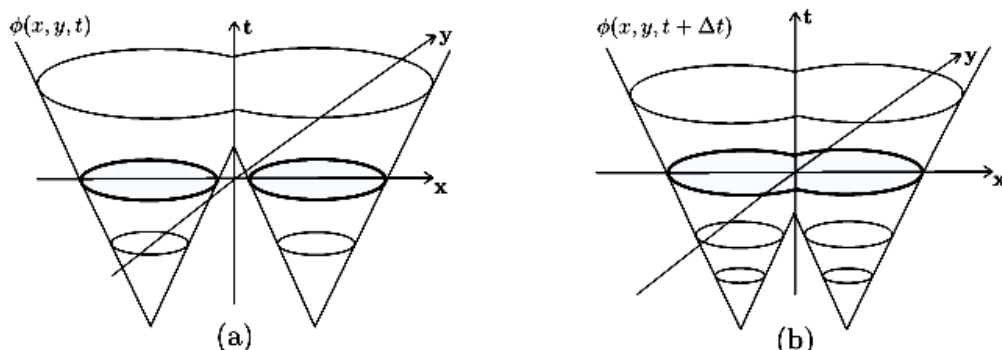
Rozšiřitelnost do více dimenzí

Parciální diferenciální rovnice stojící v pozadí pohybu implicitně zadané funkce zůstává beze změny ve třech i více dimenzích. To znamená, že pohyb povrchu ve trojrozměrném prostoru je reprezentován pohybem hyperplochy pomocí stejné rovnice jako pohyb křivky v rovině.

Změna topologie

Není třeba žádná režie pro změnu topologie hranice. Pohybující se křivka $C(t)$ se slučuje, dělí a zaniká naprosto přirozeně. Společně se změnou implicitní funkce $\phi(p, t)$ se mění i její nulová vrstevnice $C(t) = \{p \mid \phi(p, t) = 0\}$ (viz Obrázek 17). Toto všechno dělá level set metodu

výhodným nástrojem pro modelování časově proměnných objektů, jako je tání velkého kusu ledu, nebo měnící se tvar olejové skvrny na vodě.



Obrázek 17: (a) Hyperplocha ϕ s počátečními hranicemi, (b) Po několika iteracích se hranice spojily.

Test příslušnosti

Otázka, zda se daný bod p nachází uvnitř nebo vně pohybující se křivky $C(t)$, je u implicitního přístupu snadno řešitelná. Příslušnost nám udává znaménko funkční hodnoty $\phi(p, t)$.

$$\begin{cases} \phi(p, t) < 0 \text{ v } \Omega(t) \\ \phi(p, t) = 0 \text{ na } C(t) \\ \phi(p, t) > 0 \text{ v } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}(t). \end{cases}$$

Geometrické vlastnosti hranice

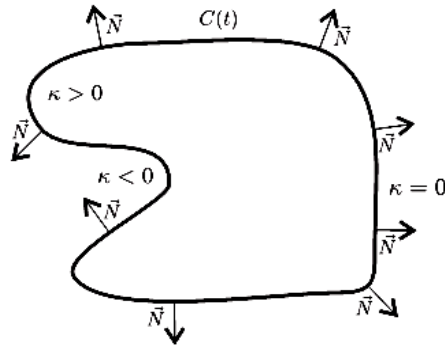
Základní geometrické vlastnosti (normálový vektor, křivost) pohybující se křivky se dají snadno vyjádřit. Normálový vektor v daném bodě křivky (viz Obrázek 15 a Obrázek 18) je definován vztahem

$$N = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (0.21)$$

Střední křivost nulové vrstevnice je definována jako divergence normálového vektoru $N = (n_1, n_2)$, tj.

$$\kappa = \nabla \cdot N = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} \quad (0.22)$$

Proto v konvexních oblastech je $\kappa > 0$, v konkávních oblastech je $\kappa < 0$ a v rovných oblastech je $\kappa = 0$ (viz Obrázek 18).



Obrázek 18: Křivost a normálový vektor v některých bodech nulové vrstevnice implicitně zadané funkce ϕ .

Level set metoda jako počáteční úloha

V této části si představíme základní myšlenku vrstevnicové metody a odvodíme si parciální diferenciální rovnici pro vývoj pohybující se křivky.

Nechť $C(0)$ je počáteční stav hranice, která je zároveň nulovou vrstevnicí nějaké implicitně zadané funkce ϕ . Takových funkcí ϕ je obecně nekonečně mnoho. Necht' funkce $\phi(p, t = 0)$, $p \in \mathbb{R}^n$, $n = 2$ nebo 3 , je definována vztahem

$$\phi(p, 0) = \pm d \quad (0.23)$$

kde d je euklidovská vzdálenost bodu p od $C(0)$. Záporné znaménko je použito pro body uvnitř, zatímco kladné znaménko pro body vně iniciální křivky. Zdůrazněme, že na začátku máme funkci $\phi(p, 0)$, pro kterou platí

$$C(0) = \{p | \phi(p, 0) = 0\} \quad (0.24)$$

Vývoj křivky můžeme nepřímo sledovat během numerického řešení vhodně definované parciální diferenciální rovnice s počáteční podmínkou (3). Řešením úlohy v čase t bude funkce $\phi(p, t)$ s vlastností

$$C(t) = \{p | \phi(p, t) = 0\} \quad (0.25)$$

tj. hranice je dána jako nulová vrstevnice implicitní funkce $\phi(p, t)$ (viz obr. 10).

Zbývá nám odvodit vhodný tvar diferenciální rovnice. Ukážeme si způsob použitý v [26]. Necht' $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ udává dráhu jednoho bodu na pohybující se křivce v čase, tj. $(x(0), y(0))$ je bod na $C(0)$. Potom z rovnice (0.25) plyne

$$\phi(x(t), y(t), t) = 0 \quad (0.26)$$

Aplikací pravidla pro derivaci složené funkce na funkci $\phi(x(t), y(t), t)$ dostáváme:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \dot{\vec{x}} \quad (0.27)$$

Protože $\vec{x}(t) \in C(t) \Rightarrow \phi(\vec{x}(t), t) = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = 0$ dostáváme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{x}(t), t) + \nabla \phi(\vec{x}(t), t) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = 0 \quad (0.28)$$

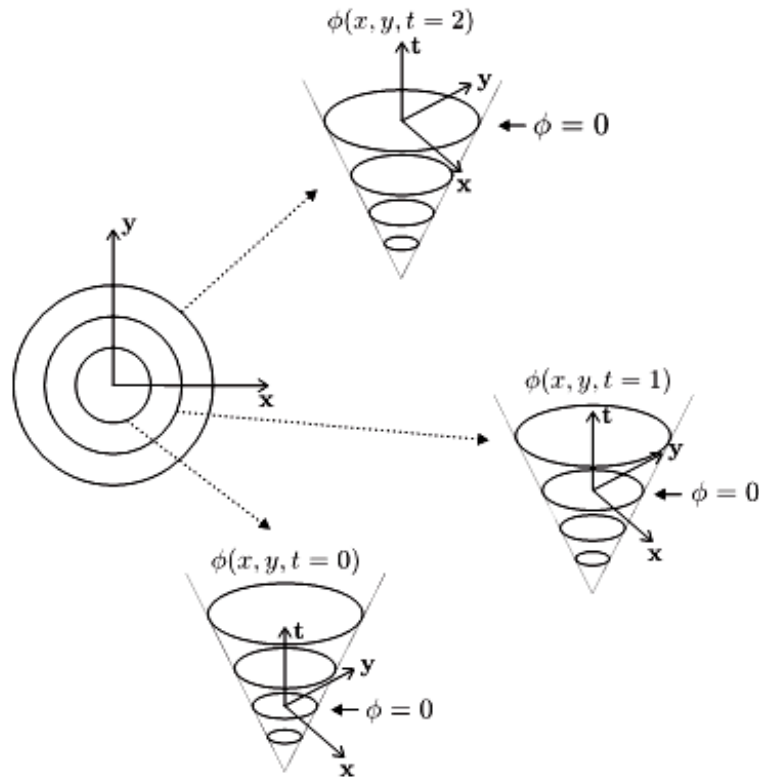
Rovnici (0.28) vynásobíme $\frac{1}{|\nabla \phi|}$ a z (0.21) má rovnice (0.28) tvar

$$\frac{\phi_t}{|\nabla \phi|} + N \cdot \dot{\vec{x}}(t) = 0 \quad (0.29)$$

. Označíme $F = N \cdot \dot{\vec{x}}(t)$ rychlost působící ve směru normálového vektoru $N = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$. S využitím tohoto poznatku lze rovnici (0.27) přepsat do tvaru

$$\phi_t + F|\nabla \phi| = 0 \quad (0.30)$$

Úlohu zadanou rovnicí (0.30) s počáteční podmínkou (0.23) pojmenovali S. Osher a J. A. Sethian v práci [19] Level Set metodou.



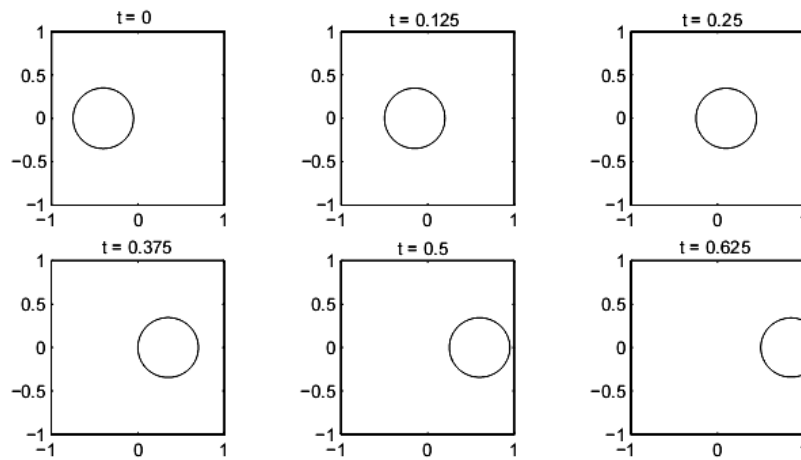
Obrázek 19: Pohyb nulové vrstevnice pomocí počáteční úlohy.

Pohyb ve vnějším vektorovém poli

Předpokládejme, že vektorové pole $\vec{V} = (u, v)$ je dáno pro každý bod nulové vrstevnice implicitně zadané funkce $\phi(x, y, t)$. Složky vektoru (u, v) pro daný bod určují rychlost ve směru jednotlivých os (viz Obrázek 20). Protože ale o rychlostní funkci F v rovnici (0.30) předpokládáme, že působí ve směru normálového vektoru N , musíme provést projekci vektoru (u, v) do normály N . Proto $F = \vec{V} \cdot N$. Dosazením zmíněného tvaru rychlostní funkce F do rovnice (0.30) a s využitím vztahu (0.21) získáme pro vývoj rozhraní tzv. rovnici proudění danou vztahem

$$\phi_t + \vec{V} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (0.31)$$

kteřá patří mezi tzv. hyperbolické rovnice.



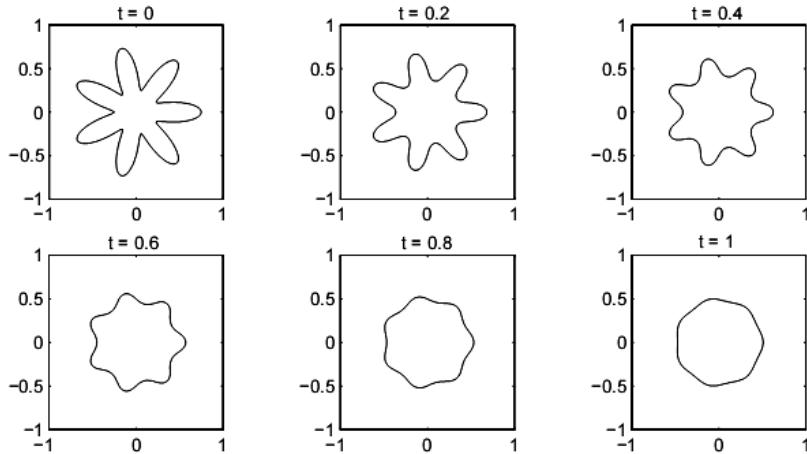
Obrázek 20: Pohyb kruhové křivky ve vnějším vektorovém poli, které je pro každý uzel sítě určeno vektorem $(u, v) = (1, 0)$ (převzato [11]).

Pohyb určený lokální křivostí

V předchozí části jsme si ukázali pohyb křivky ve vnějším vektorovém poli \vec{V} . Nyní se podíváme na pohyb hranice, který je přímo závislý na tvaru implicitně zadané funkce ϕ . Předpokládejme, že body nulové vrstevnice se pohybují ve směru normálového vektoru rychlostí úměrnou velikosti křivosti funkce ϕ v daném bodě (viz Obrázek 21), tj. $F = -\varepsilon\kappa$, kde $\varepsilon > 0$ je konstanta. Dosazením takto definované rychlostní funkce do rovnice (0.30) dostaneme pro pohyb nulové vrstevnice určený lokální křivostí rovnici

$$\phi_t = \varepsilon\kappa|\nabla\phi| \quad (0.32)$$

kteřá patří mezi tzv. parabolické rovnice.



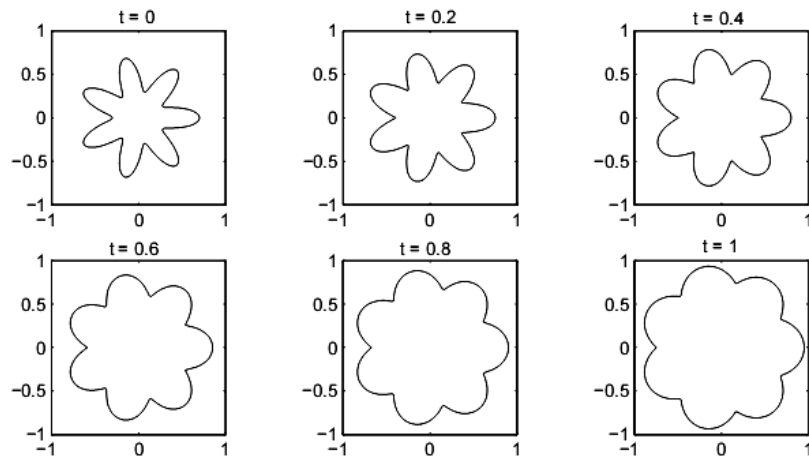
Obrázek 21: Pohyb určený lokální křivostí má vyhlazující vliv na rozhraní s četnými výběžky, ve kterých je hodnota křivosti vysoká (převzato [11]).

Pohyb ve směru normály

Jako poslední druh pohybu křivky si ukážeme pohyb ve směru normály. Předpokládejme, že body nulové vrstevnice implicitně zadané funkce ϕ se pohybují konstantní rychlostí ve směru normálového vektoru (viz Obrázek 22), tj. $F = a$, kde a je konstanta. Dosazením do rovnice (0.30) získáme pro vývoj hranice rovnici

$$\phi_t + a|\nabla\phi| = 0 \tag{0.33}$$

která patří do třídy tzv. Hamilton-Jacobiho rovnic (blíže viz [6]).



Obrázek 22: Pohyb ve směru normály ($a = 0, 25$) způsobuje nafukovací efekt nulové vrstevnice (převzato [11]).

Vhodná volba F_0

Po seznámení se třemi druhy pohybu rozhraní se podíváme na konkrétní tvar funkce F_0 , tak abychom mohli Level Set metodu použít pro účely segmentace obrazu. Připomeňme, že cílem segmentace obrazu je nalezení hranice oddělující zkoumané objekty od pozadí. Na hranicích objektů dochází k vysokému rozdílu mezi intenzitami sousedních bodů obrazu, tj. v těchto místech nabývá hodnota gradientu vysokých hodnot. Jelikož požadujeme, aby se pohybující se křivka zastavila u hledaných objektů, nadefinujeme funkci F_0 tak, že v místech hran bude nabývat nulové nebo téměř nulové hodnoty. Naopak v místech, kde se hrana nenachází (hodnota gradientu je nulová nebo téměř nulová), bude funkce F_0 nabývat vysoké hodnoty. Jako vhodná volba se tedy jeví nějaká prostá rychle klesající funkce závislá na hodnotách gradientu vstupního obrazu.

Detekce hran pomocí evoluce křivek

První segmentační model, který použijeme, bude mít rychlost F modelovanou vztahem:

$$F = c^0 = \frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma * I^0|^p} \quad (0.34)$$

kde $p = 1$ nebo 2 a výraz $G_\sigma * I^0$ představuje konvoluci vstupního obrazu I^0 s Gaussovským vyhlazovacím jádrem G_σ se standardní odchylkou σ . Jak již bylo vysvětleno v předchozí kapitole „PDE modely“, uvědomme si chování funkce c^0 . Podle regularizovaného Perona-Malik modelu tvaru funkce c^0 v místech s téměř stejnou intenzitou se hodnota gradientu $|\nabla G_\sigma * I^0|$ blíží nule, a tedy hodnota funkce c^0 se bude v těchto místech blížit hodnotě 1 . Naopak v blízkosti hranic objektů bude hodnota zmíněného gradientu vysoká, a proto funkce c^0 zde bude nabývat téměř nulové hodnoty. Což znamená pohyb křivky je silně zpomalen v okolí hrany a tato „stagnace“ rozhraní je brána jako hranice segmentací hledaného objektu. Problém nastává, když jsou v obrázku překřížené hrany, či pokud chybí části hranice objektu. Modely k segmentaci proto předpokládají použití modelu Perona-Malik nelineární difúze.

Situace je komplikovanější v případě obrázku se šumem. Advekce není dostatečná a křivka se může vyvíjet k „falešné“ hraně. Přidáním regulačního členu, který je závislý na křivosti normálové rychlosti F , docílíme vyhlazení irregularit na nulové vrstevnici (křivce rozhraní). Vhodný regulační člen je dán ve tvaru $c^0 \kappa$, kde hodnota difúze křivky je malá v okolí „pravých“ hran. Můžeme napsat geometrickou rovnici pro normálovou rychlost segmentační křivky

$$F = c^0 \kappa + \nabla c^0 \cdot N$$

Kde κ je její křivost a N je normálový vektor. Level set formulace křivky je dána rovnicí:

$$u_t = \underbrace{c^0 |\nabla u| \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)}_{\text{difuzní}} + \underbrace{\nabla c^0 \cdot \nabla u}_{\text{advekční}} \quad (0.35)$$

Kde pohybující se křivka je dána stejně jako level set funkce u . Jaký je vliv advekčního a difúzního členu v level set rovnici (0.35)? Difúzní člen stahuje křivku, což plyne z vlastností střední křivosti κ , a

také se zastavuje na hranách, což je důsledek přítomnosti funkce c^0 . Advekční člen přitahuje křivku rozhraní k hranám, toto tvrzení je důsledkem chování hyperbolických rovnic (viz Obrázek 20). Rovnici (0.35) můžeme přepsat jako:

$$u_t = c^0 |\nabla u| \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nabla c^0 \cdot \nabla u = |\nabla u| \nabla \cdot \left(c^0 \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (0.36)$$

Ve skutečnosti následující rovnice s Evans-Spruck regularizací $|\nabla u| \approx |\nabla u|_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla u|^2}$ dává stejný advekční člen $-\nabla c^0 \cdot \nabla u$ jako (0.35):

$$u_t = \sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla u|^2} \nabla \cdot \left(c(|\nabla G_\sigma * I^0|) \frac{\nabla u}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla u|^2}} \right) \quad (0.37)$$

Parametr ε se volí v intervalu mezi 0 a 1, $\varepsilon \in (0, 1]$. Volba $\varepsilon = 1$ není vhodná pro segmentaci objektů v obrázku s dírami. Pro klesající ε , tj. pokud se blížíme rovnici (0.35), dostáváme velmi dobré výsledky pro objekty s dírami. Pokud je obrázek zašuměný pohyb level set křivky je víc nepravidelný. Pro bližší vysvětlení všech koeficientů odkazujeme na [15].

Nevýhody level set metody

Hlavní nevýhoda level set metody spočívá v její vysoké výpočetní náročnosti. Podle numerického schématu (viz Kapitola 5) musíme v jedné iteraci pro všechny body obrazu spočítat nové hodnoty funkce ϕ , přičemž samotné řešení této rovnice také trvá nezanedbatelnou dobu. Uvědomme si, že s rostoucí velikostí vstupních dat je potřeba provádět stále více iterací, abychom dospěli k řešení.

Kapitola 5.

Numerické schéma

Tato nám představí výpočetní schémata pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic. Samotné numerické řešení rovnice (0.10), (0.19), (0.20) a (0.37) je realizováno pomocí metody sítí (viz [3]), což je univerzální a často používaný přístup pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Základní myšlenka této metody spočívá v tom, že spojitou oblast, v níž hledáme řešení, diskretizujeme pomocí konečné množiny bodů zvané síť. V jednotlivých bodech sítě vyřešíme danou diferenciální rovnici pouze přibližně a to tak, že spojité derivace aproximujeme diferenčními operátory. Nejprve si zavedeme některé pojmy.

Definice : Buď Ω oblast, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Potom číslo

$$h := \frac{1}{N}$$

nazýváme krok sítě. Dvourozměrnou síť na oblasti Ω definujeme jako množinu

$$\bar{\omega}_h = \{(ih, jh) \mid i, j = 0, \dots, N\}.$$

Dále definujeme

$$\omega_h = \{(ih, jh) \mid i, j = 1, \dots, N-1\},$$

$$\gamma_h = \bar{\omega}_h - \omega_h.$$

Prvky množiny ω_h , resp. γ_h nazýváme vnitřní, resp. Hraniční body(uzly) sítě.

Definice : Sít'ovou funkcí nazveme libovolné zobrazení $u : \bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$.

Poznámka: Označme $\mathcal{H}_h = \{u : \bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R}\}$ množinu všech sít'ových funkcí na dané síti. Jestliže na \square zavedeme obvyklým způsobem operace sčítání sít'ových funkcí a násobení sít'ové funkce reálným číslem, dostaneme reálný vektorový prostor dimenze $N + 1$. Můžeme tedy prostor \square ztotožnit s \mathbb{R}^{N+1} .

Poznámka: Je-li $u \in \mathcal{H}_h$ sít'ová funkce, pak pro $i, j \in \hat{N}_0$ označujeme $u_{ij} := u(ih, jh)$

Definice : Libovolné funkci $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lze přiřadit síťovou funkci $u \in \mathcal{H}_h$, která je restrikcí funkce y na síť $\bar{\omega}_h$. Tuto síťovou funkci budeme označovat $u \in \mathcal{P}_h y$.

Základní diferenční operátory

Pro aproximaci parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ v uzlu x_{ij} lze použít několik možností:

$$\text{Zpětná diference: } D^{-x}u_{ij} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$$

$$\text{Dopředná diference: } D^{+x}u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

$$\text{Centrální diference: } D^{0x}u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

Analogicky lze tyto operátory použít pro aproximace parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial y}$ na dvourozměrné síti. Jednotlivé diferenční operátory jsou odvozeny pomocí Taylorova rozvoje funkce u a mají vždy jistou chybu způsobenou zanedbáním derivací vyšších řádů. V případě levých a pravých diferencí se jedná o metodu prvního řádu, tj. chyba je řádu $O(h)$. Centrální diferenční operátor má chybu řádu $O(h^2)$, jedná se tedy o operátor druhého řádu. Vidíme, že chyba každého operátoru je pevně dána a lze ji ovlivnit vzdáleností h mezi body sítě.

Zavedeme si pro gradient a divergenci označení takové, aby bylo zřejmé, že jde o síťovou funkci a také jaké diference byly použity. Značení gradientu:

$$\nabla_h^- u_{ij} = (D^{-x}u_{ij}, D^{-y}u_{ij})$$

$$\nabla_h^+ u_{ij} = (D^{+x}u_{ij}, D^{+y}u_{ij})$$

$$\nabla_h^0 u_{ij} = (D^{0x}u_{ij}, D^{0y}u_{ij})$$

Značení divergence pro $g = (g_{1ij}, g_{2ij})$:

$$\nabla_h^- \cdot g = D^{-x}g_{1ij} + D^{-y}g_{2ij}$$

$$\nabla_h^+ \cdot g = D^{+x}g_{1ij} + D^{+y}g_{2ij}$$

$$\nabla_h^0 \cdot g = D^{0x}g_{1ij} + D^{0y}g_{2ij}$$

Aproximace druhé derivace je dána jako:

$$D^{xx}u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Uvedeme si nejprve numerickou aproximaci pro rovnici vedení tepla. A pak i pro model Perona-Malik, model regularizovaný a také aproximaci rovnice, na které si budeme demonstrovat level set metodu.

Rovnici vedení tepla pak můžeme aproximovat takto:

$$\begin{cases} \frac{du_{i,j}}{dt} = \Delta_h u_{ij} \text{ kde } i, j = 0, \dots, N \\ u_{0i,j} = \mathcal{P}_h u_0 \text{ počáteční podmínka} \end{cases} \quad (0.38)$$

Okrajové podmínky máme dány symetrií a periodickým prodloužením, které jsme si zavedli v Kapitola 3.

Model Perona-Malik aproximujeme následovně:

$$\begin{cases} \frac{du_{i,j}}{dt} = \nabla_h^+ \cdot \left(\frac{\nabla_h^- u_{ij}}{1 + |\nabla_h^- u_{ij}|^2} \right) \text{ kde } i, j = 0, \dots, N \\ u_{0i,j} = \mathcal{P}_h u_0 \end{cases} \quad (0.39)$$

Regularizovaný model Perona-Malik má tvar:

$$\begin{cases} \frac{du_{i,j}}{dt} = \nabla_h^+ \cdot \left(\frac{\nabla_h^- u_{ij}}{1 + |G_\sigma * \nabla_h^- u_{ij}|^2} \right) \text{ kde } i, j = 0, \dots, N \\ u_{0i,j} = \mathcal{P}_h u_0 \end{cases} \quad (0.40)$$

kde místo konvoluce s Gaussovým jádrem použijeme vyhlazování Laplace operátorem.

Level set rovnice bude mít tvar:

$$\begin{cases} \frac{du_{i,j}}{dt} = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{2}(|\nabla_h^+ u_{ij}|^2 + |\nabla_h^- u_{ij}|^2)} \nabla_h^+ \cdot \left(\frac{1}{1 + |\Delta_h(\nabla_h^- I_{ij}^0)|^2} \frac{\nabla_h^- u_{ij}}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla_h^- u_{ij}|^2}} \right) \\ u_{0i,j} = \mathcal{P}_h u_0 \end{cases} \quad (0.41)$$

Kde $i, j = 0, \dots, N$.

Poznámka: Záměnou dopředných a zpětných diferencí můžeme dospět k rozdílnému chování metod.

Metoda přímek dělá prostorovou diskretizaci parciálních diferenciálních rovnic, čímž vznikne systém obyčejných diferenciálních rovnic. Ty pak lze řešit pomocí Rungových-Kuttových vztahů.

Mějme funkci $u_{ij} = u_{ij}(t)$

Danou předpisem

$$\frac{du_{ij}}{dt} = f(t, u_{ij}) \quad (0.42)$$

Metoda přímek diskretizuje rovnici (0.42) s časovým krokem $\tau > 0$

$$u_{ij}(t + \tau) = u_{ij}(t) + \tau \cdot f(t, u_{ij}(t)).$$

My ale místo Rungových-Kuttových vztahů použijeme pro implementaci Mersonovu metodu.

Mersonova metoda

Použijeme Mersonovu metodu, která je metodou 4.řádu, pro rovnici tvaru (0.42):

$$\frac{du_{ij}}{dt} = f(t, u_{ij})$$

Nejprve si napočítáme síť s koeficienty $k_{ij}^1, k_{ij}^2, k_{ij}^3, k_{ij}^4$ a k_{ij}^5 .

$$k_{ij}^1 = \tau \cdot f(t, u_{ij})$$

$$k_{ij}^2 = \tau \cdot f\left(t + \frac{1}{3}\tau, u_{ij} + \frac{1}{3}k_{ij}^1\right)$$

$$k_{ij}^3 = \tau \cdot f\left(t + \frac{2}{3}\tau, u_{ij} + \frac{2}{3}k_{ij}^1 + \frac{1}{3}k_{ij}^2\right)$$

$$k_{ij}^4 = \tau \cdot f\left(t + \tau, u_{ij} + k_{ij}^1 + k_{ij}^2 + k_{ij}^3\right)$$

$$k_{ij}^5 = \tau \cdot f\left(t + \frac{5}{6}\tau, u_{ij} + \frac{5}{6}k_{ij}^1 + \frac{5}{12}k_{ij}^2 + \frac{5}{24}k_{ij}^3 + \frac{1}{4}k_{ij}^4\right)$$

Pak si z těchto sítí koeficientů napočítáme novou síť

$$E_{ij} = \frac{1}{30}(|2k_{ij}^1 - 9k_{ij}^3 + 8k_{ij}^4 - k_{ij}^5|)$$

A najdeme maximální hodnotu na této síti,

$$E = \max_{i,j} E_{ij}$$

Je-li $E < \varepsilon psi$, kde εpsi je nějaká konstanta, pak vypočítáme nový tvar síťové funkce u_{ij} :

$$u_{ij}(t + \tau) = u_{ij}(t) + \frac{1}{6}k_{ij}^1 + \frac{2}{3}k_{ij}^3 + \frac{1}{6}k_{ij}^5; \quad i, j = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (0.43)$$

Pokud neplatí $E < \varepsilon psi$, přepočítáme τ a znovu přepočítáme síť $k_{ij}^1, k_{ij}^2, k_{ij}^3, k_{ij}^4$ a k_{ij}^5 .

At' se nám podaří změnit funkci u_{ij} nebo ne, tak po každém kroku přepočítáme τ vztahem:

$$\tau_{nové} := \omega \cdot \tau \cdot \left(\frac{\varepsilon psi}{E}\right)^{0.2}$$

Konstanty ω a εpsi volíme následujícím způsobem:

$$\omega \in [0.8; 0.9]; \quad \varepsilon psi = 10^{-2}, 10^{-3} - 10^{-5}.$$

Kapitola 6.

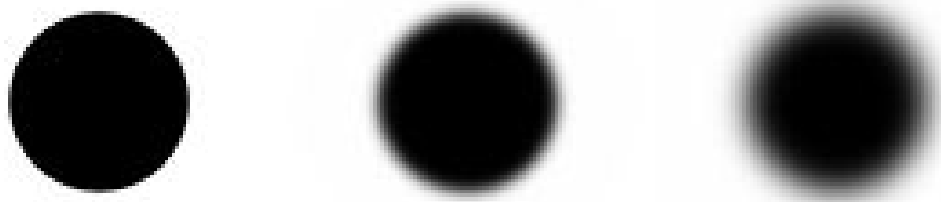
Výsledky

6.1. Rovnice vedení tepla

V této kapitole si ukážeme výsledky použití zkoumaných metod na testovací snímky. Pro všechny ukazované obrázky je společná volba ϵpsi v Mersonově implementaci a to volba $\epsilon psi = 0.001$. Rozměr oblasti, na které obrázky počítané, je všude $[0, 1] \times [0, 1]$. Všechny obrázky jsou čtvercové.

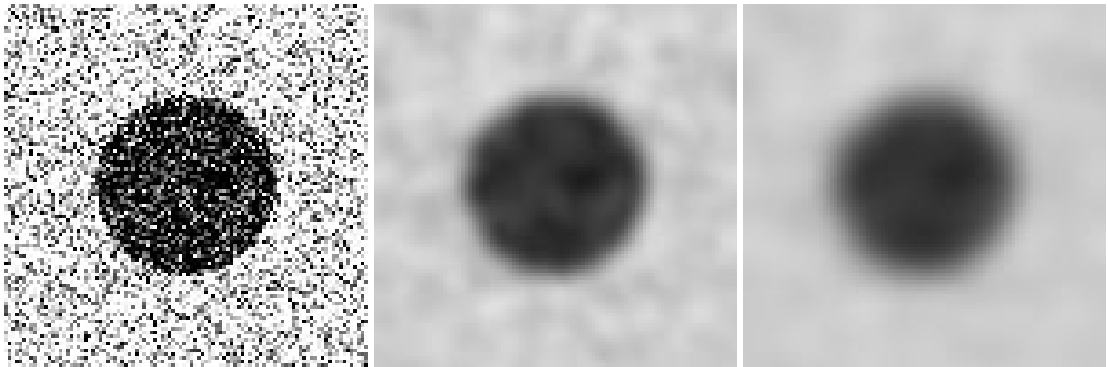
Značení obrázku bude zleva doprava písmeny ze začátku abecedy- (a), (b), (c), ...

Začneme rovnicí vedení tepla. Časový krok této metody pro všechny obrázky bude $t = 0.00001$. Rovnice vedení tepla se ukazuje nevhodná pro konečnou úpravu obrázku. Vyhlazování je ve všech směrech stejné a tak dochází i k vyhlazování hran (viz Obrázek 23).



Obrázek 23: Kruh[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.00019$, (c) $t = 0.00042$.

Na dalším obrázku(Obrázek 24) vidíme, že tato metoda odstraňuje šum. Obrázek 31 a Obrázek 37 srovnajte s tímto obrázkem.



Obrázek 24: Kruh s 75% šumem[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.0004$, (c) $t = 0.00105$.

I když se nám v následujícím obrázku (Obrázek 25) podařilo odstranit šum, výsledný obrázek i po tak malém čase je příliš vyhlazený.



Obrázek 25: Audrey[300x300].(a)vstup, (b) $t = 0.00001$.

Člověk hodnotí jako horší obrázek, ten který je rozmazaný, i když obsahuje méně šumu. Oproti tomu obrázek se šumem, který je ostrý, bude hodnotit jako lepší (viz Obrázek 26).



Obrázek 26: Audrey s 25% šumem[300x300].(a)vstup, (b) $t = 0.00001$, (c) $t = 0.00002$.

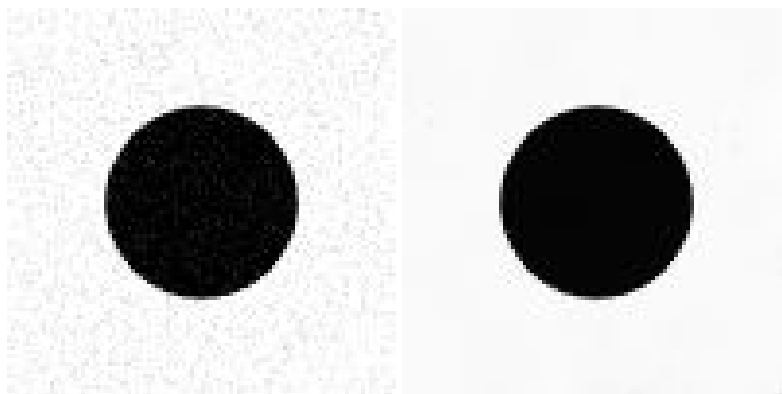


Obrázek 27: Krávy[500x500].(a)vstup, (b) $t = 0.00005$.

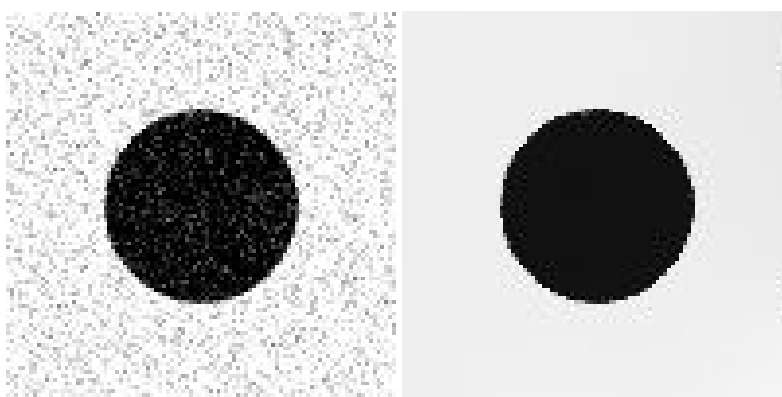
6.2. Model Perona-Malik

Aplikací algoritmu modelu Perona-Malik se budeme snažit odstranit šum z obrázku. Pro výpočet byla nutná pouze volba časového kroku.

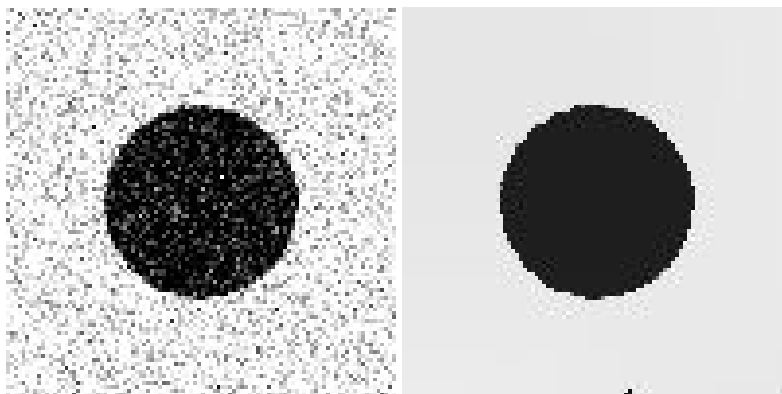
Obrázek 28, Obrázek 29, Obrázek 30 a Obrázek 31 s různým obsahem šumu ukazují vliv množství obsaženého šumu v obrázku na dobu trvání výpočtu a kvalitu výstupu.



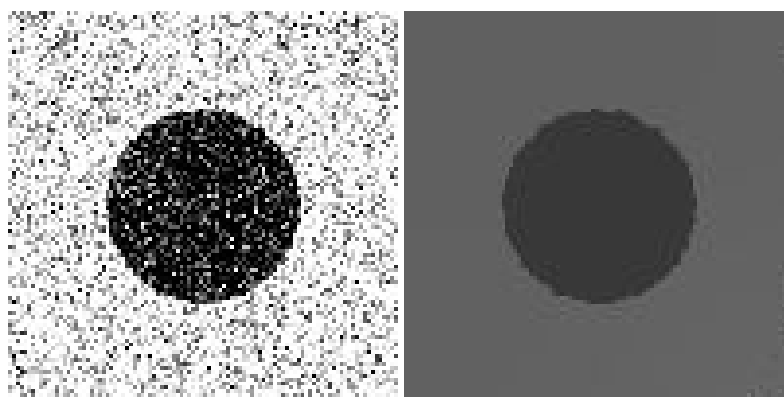
Obrázek 28: Kruh s 5% šumem[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.030$.



Obrázek 29: Kruh s 15% šumem[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.042$.



Obrázek 30: Kruh s 50% šumem[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.119$.



Obrázek 31: Kruh s 75% šumem[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.136$.

Pro malé zašumění metoda Perona-Malik funguje dobře, viz Obrázek 32. Naproti tomu pro obrázky více zašuměné, už tato metoda není dostatečná, viz Obrázek 33. Všimněme si, že u této metody již pro malé hodnoty šumu dochází k rozmazání hran. Na obrázku (c) chci ukázat, že delší aplikací metody Perona-Malik se vytváří plochy s konstantním jasem. Obrázek 34 (c) tuto vlastnost demonstruje ještě názorněji.



Obrázek 32: Audrey s 2% šumem[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.0002$, (c) $t = 0.0044$.



Obrázek 33: Audrey s 15% šumem[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.0076$.

V případě obrázku hlavy krávy si můžeme povšimnout, že již po velmi krátkém čase dochází ke ztrátě detailů (chlupy, tráva), což je nežádoucí. Jak Obrázek 34 (c) ukazuje, metoda Perona-Malik vytváří plochy s konstantním jasnem. Obrázek 34 (c) použijeme jako vstupní obrázek pro level set metodu. (viz Obrázek 52)

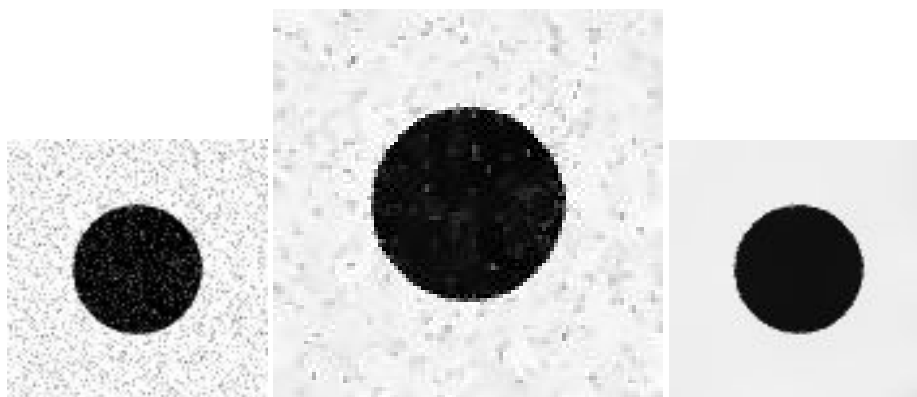


Obrázek 34: Hlava krávy [136x136]. (a) vstup, (b) $t = 0.00004$, (c) $t = 0.00217$.

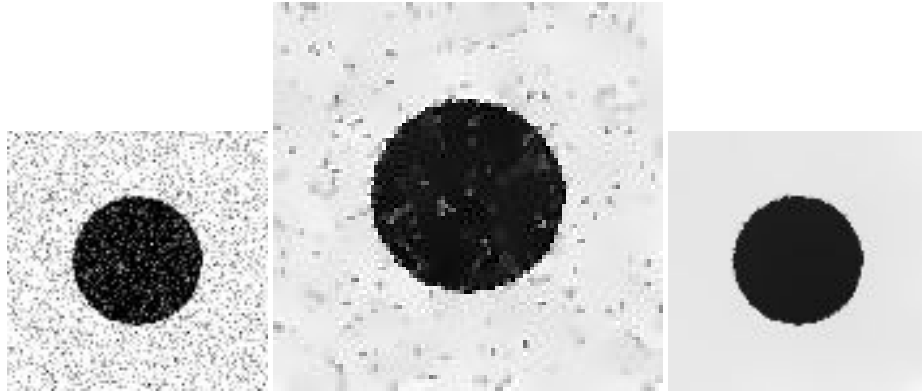
6.3. Regularizovaný Perona-Malik

Pokud jsou počáteční data více zašuměná, pak model Perona-Malik nemůže rozhodnout mezi „pravými“ a „falešnými“ hranami. Regularizovaný model zabraňuje tomuto nedostatku. Model Perona-Malik se „zpomaluje“ na šumu. Vyhlašováním dochází k odstranění šumu, ale hrany zůstanou zachované, i když také trochu vyhlazené. Což nám ale nevádí, jde o to, aby docházelo ke „zpomalení“ vyhlazování pouze o hranu, nikoli o šum.

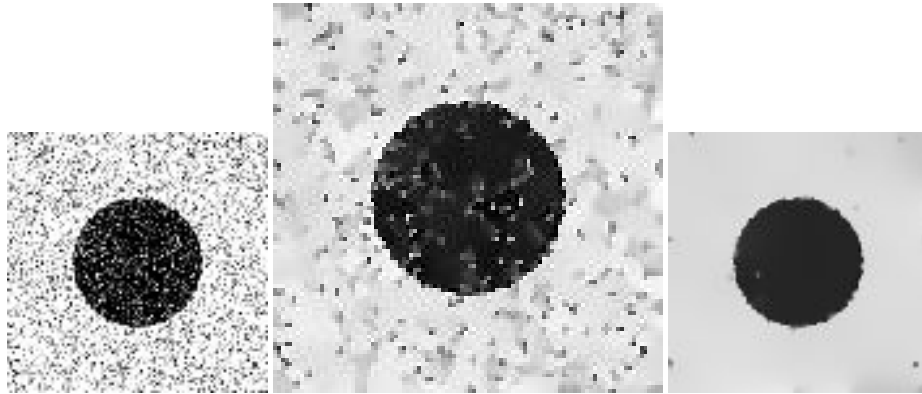
Obrázek 35, Obrázek 36 a Obrázek 37 stejně jako u Perona-Malik ukazuje vliv šumu na rychlost a kvalitu výstupu. Navíc si na obrázcích (b) (větší) povšimněte si plošek, které se vytvářejí. Tyto obrázky vyhlazují s koeficientem $t_{\Delta} = 0.00001$



Obrázek 35: Kruh s 25% šumem [100x100]. (a) vstup, (b) $t = 0.001$, (c) $t = 0.003$.



Obrázek 36: Kruh s 50% šumem[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.0034$, (c) $t = 0.0135$.



Obrázek 37: Kruh s 75% šumem[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.003$, (c) $t = 0.018$.

Na obrázku Audrey (viz Obrázek 38) chci ukázat aplikaci regularizovaného modelu na data s reálným šumem. Za povšimnutí stojí, jak se podařilo odstranit šum na pozadí. Koeficient vyhlazování je $t_{\Delta} = 0.000001$, časový krok $t = 0.0001$ je také velmi malý.



Obrázek 38: Audrey[300x300].(a)vstup, (b)t=0.0001

Ukazuje se, že regularizovaný model funguje úspěšně na obrázky s malým množstvím šumu (viz Obrázek 38 a Obrázek 39). Na (c) vidíme, co se stane po delší aplikaci tohoto modelu, (c) vypadá spíše jako uměle vytvořený, než jako obrázek, který vznikl z (a) odstraněním šumu.



Obrázek 39: Audrey s 2% šumem [100x100], $t_{\Delta} = 0.00001$. (a) vstup, (b) $t = 0.0001$, (c) $t = 0.0002$.

Obrázek 40 bude demonstrovat rozdíl v chování metody pro různě velké koeficienty vyhlazování t_{Δ} . Na těchto obrázcích je vidět, že pro větší zašumění regularizovaný model nemá takové výsledky.



Obrázek 40: Audrey s 8% šumem [100x100]. (a) vstup, (b) $t = 0.0008$, $t_{\Delta} = 0.00001$, (c) $t = 0.0008$, $t_{\Delta} = 0.00005$.

6.4. Level set metoda

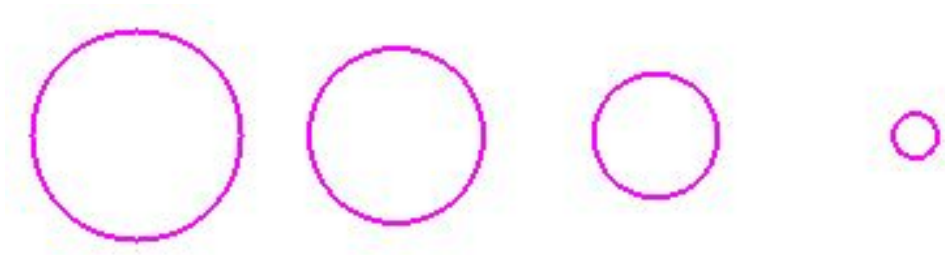
Nyní si ukážeme výsledky aplikace algoritmu implementované level set rovnice na testovací snímky.

Pokud nebude uvedeno jinak, pak pro výpočet byly použity následující koeficienty:

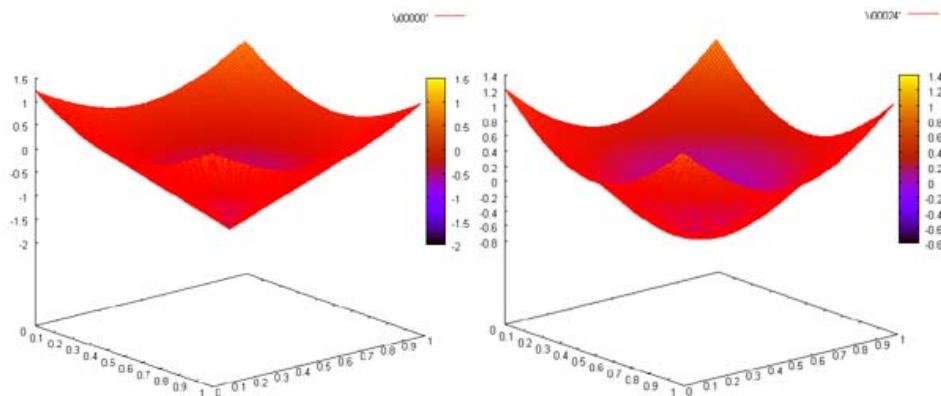
$$\varepsilon = 1., t = 0.001, t_{\Delta} = 0.00001 \text{ a } r = 0.4,$$

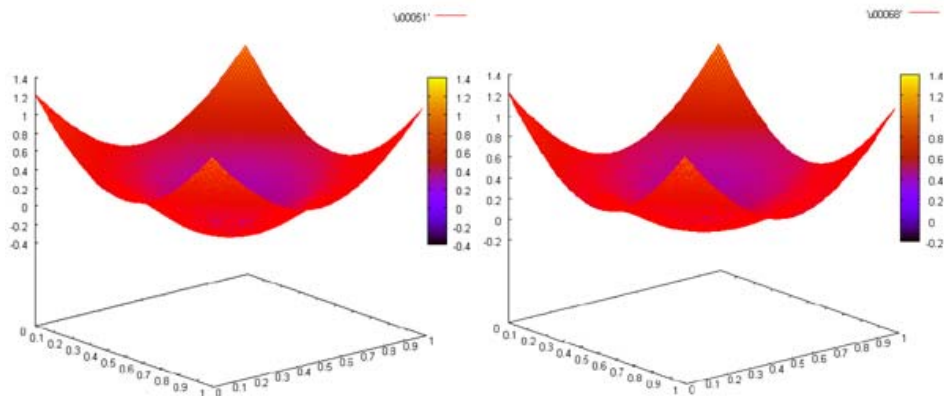
Kde ε je koeficient v level set rovnici, t je časový krok pro jednotlivé výstupy, t_{Δ} označuje velikost času pro vyhlazení složek gradientu rovnicí vedení tepla a r poloměr kružnice brané za počáteční podmínku(relativně).

Na následujícím obrázku je znázorněna level set křivka a její vývoj v čase, když se v obrázku nenacházejí žádné objekty, ke kterým by se mohla level set křivka „přichytit“ (Obrázek 41). Obrázek 42 ukazuje tvar jednotlivých level set funkcí příslušných k nulovým vrstevnicím, které ilustruje Obrázek 41.



Obrázek 41: Nulová vrstevnice[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.024$, (c) $t = 0.051$, (d) $t = 0.068$.



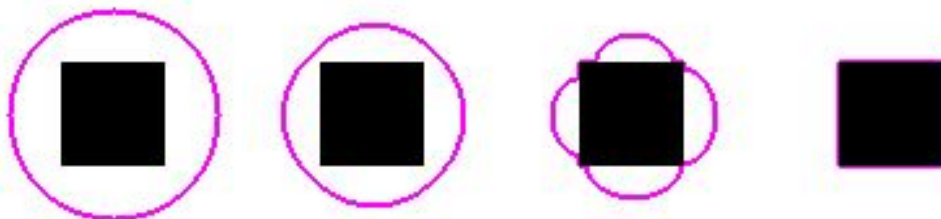


Obrázek 42: Tvar level set funkce pro hodnoty jako jsou u předchozího obrázku (Obrázek 41).

U následujících třech obrázků si povšimněme rychlosti, s jakou level set křivka dosáhne hran jednotlivých objektů. Nesymetrie není chybou metody (viz Obrázek 44), ale je daná numerickým schématem, které jsme použili pro implementaci. U obrázku „Strašidlo“ došlo ke zdržení především kvůli velké křivosti hrany mezi „rukou“ a „hlavou“ vpravo nahoře.



Obrázek 43: Kruh[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.018$, (c) $t = 0.028$.

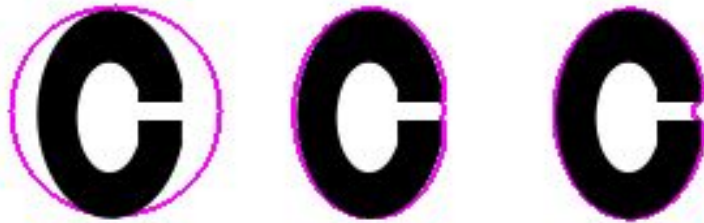


Obrázek 44: Čtverec[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.018$, (c) $t = 0.023$, (d) $t = 0.033$.



Obrázek 45: Strašidlo[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.006$, (c) $t = 0.073$.

V souvislosti s volbou koeficientu ε jsme se zabývali objekty s dírami. Obrázek 46 a Obrázek 47 ukazují, že velikost díry má vliv na vývoj nulové vrstevnice. Koeficient ε se v těchto obrázcích neliší.

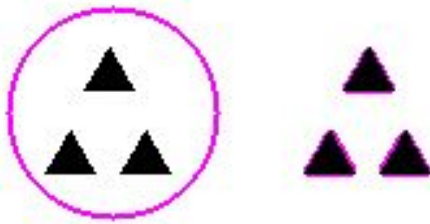


Obrázek 46: Céčko s malou dírou[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.016$, (c) $t = 0.041$.



Obrázek 47: Céčko s větší dírou[100x100].(a)vstup, (b) $t = 0.063$, (c) $t = 0.288$, (d) $t = 0.381$.

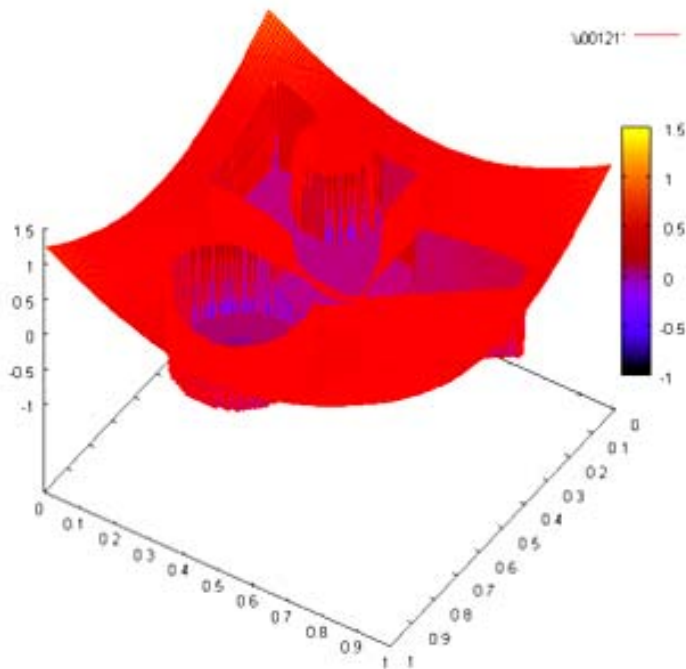
Obrázek 48 a Obrázek 49 mají ilustrovat, že level set křivka je schopna postihnout všechny možné tvary, jako jsou rovné hrany, oblouky, rohy. Abychom dosáhli i vnitřního kolečka v Obrázek 49, museli bychom použít jinou level set funkci. Pro Obrázek 49 se třemi objekty je na Obrázek 50 ukázána level set funkce. Jak si můžeme povšimnout, tvary předmětů na obrázku se „vtiskují“ do level set funkce. Při vývoji se nemění pouze tvar nulové vrstevnice, ale mění se celá level set funkce.



Obrázek 48: 3 trojúhelníky[100x100]. (a)vstup, (b) $t = 0.269$.



Obrázek 49: 3 objekty[100x100]. (a)vstup, (b) $t = 0.104$, (c) $t = 0.157$, (d) $t = 0.171$.



Obrázek 50: Tvar level set funkce pro 3 objekty (viz Obrázek 49) pro $t = 0.121$.

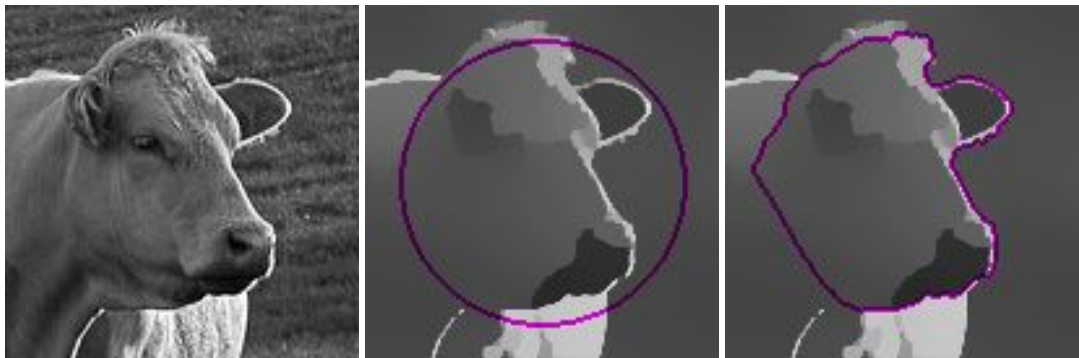
Na tvaru stop chci ukázat, že změna topologie pro level set křivku není problém. Jak si ale můžeme povšimnout času jednotlivých výstupů, je to poměrně časově náročné. Ačkoli level set křivka zasahovala i do „prstu tlapičky“ vpravo dole, advekce křivky byla silnější než difúze, a proto se

křivka stáhla. Rozdělení nulové vrstevnice v horní „tlapičce“ se nepodařilo zřejmě kvůli malé vzdálenosti.



Obrázek 51: Stopy [100x100]. Poloměr level set křivky při inicializaci $r = 0.48$, (a) vstup, (b) $t = 0.139$, (c) $t = 0.324$, (d) $t = 1.001$.

Posledním obrázkem chceme ukázat, že level set metodu lze použít i na reálná data, která ovšem musí být nejprve zpracována jinou metodou pro odstranění šumu. V tomto případě šlo o vyhlazení metodou Perona-Malik, viz Obrázek 34.



Obrázek 52: Hlava krávy [136x136]. (a) původní obrázek, (b) vstup pro level set metodu, (c) $t = 0.047$.

Kapitola 7.

Závěr

Ve výzkumném úkolu jsem se zabývala parciálními diferenciálními rovnicemi ve zpracování obrazu. Úkolem této práce bylo najít vhodný matematický model pro segmentaci obrazových dat, navrhnout vhodnou diskretizaci a numerické schéma. Vytvořit implementaci na počítači, a pak aplikovat výsledný algoritmus na testovací snímky. Všechny tyto úkoly se podařilo splnit.

Nejprve jsem se seznámila se základními pojmy z teorie zpracování obrazu. V Kapitola 3 PDE modely jsou uvedeny parciální diferenciální rovnice, které byly navrženy pro předzpracování obrazu. Výčet invariantů pro rovnici vedení tepla dokazuje, že použití této rovnice je ve zpracování obrazu možné. Tyto invariantní vlastnosti jsem pro větší názornost doplnila obrázky. Kvůli přílišnému vyhlazování, které způsobuje aplikace rovnice vedení tepla na daný obrázek, jsem se následně zabývala nelineárními modely, především modelem Perona-Malik a regularizací tohoto modelu. V Kapitola 4 Level set metoda jsem se zabývala level set metodou v souvislosti s detekcí hran. Algoritmus pro level set rovnici jsem aplikovala na data, která jsem předem upravila metodami pro odstraňování šumu. Vysvětlení vlivu jednotlivých členů level set rovnice na pohyb level set funkce jsem také doplnila obrázky. Ke Kapitola 5 přikládám na CD zdrojový kód, který jsem vytvořila pro implementaci zkoumaných metod na počítači. Testovací snímky, které jsem použila pro výsledný algoritmus, jsem si buď vytvořila nebo jsem je převzala. Zašumění těchto snímků je převážně vytvořeno uměle, ačkoli obrázky „Audrey“ a „Bing“ obsahují přirozený šum. Na snímcích uvedených v kapitole s výsledky ilustruji vlastnosti, které jsem uvedla v souvislosti s jednotlivými metodami; s rovnicí vedení tepla, s modelem Perona-Malik, s regularizovaným modelem Perona-Malik a v souvislosti s level set metodou.

Tato práce podstatně splnila požadavky zadání, ale na druhou stranu je možné ji dále rozvíjet. Například implementováním jiné level set rovnice, než jakou jsem použila. Hledat u ní vhodnou volbu koeficientů pro advekční a difúzní členy. Nebo se zabývat jinými možnostmi pro vytvoření numerického schématu.

Na závěr bych ráda poděkovala panu inženýru Oberhuberovi, mému školiteli, za odborné vedení a za všechny čas, který mi věnoval.

Použitá literatura

- [1] Aubert G.: Partial Differential Equations and Image Processing; citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://kepler.ia.ac.cn/seminar/multim/multim2006frame0.files/SummerSchool/Aubert.pdf>.
- [2] Aubert G., Kornprobst P.: Mathematical Problems in Image Processing, Springer Verlag, 2002. Second Edition 2006.
- [3] [Beneš M.: Numerická matematika, Katedra matematiky, FJFI ČVUT, Praha, citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://linux.fjfi.cvut.cz/~sunie/studium/prednasky/mican/>.
- [4] Encyklopedie Wikipedia; citováno 9.9.2007, dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/>.
- [5] Evans L. C.: Partial Differential Equations, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics. Proceedings of the American Mathematical Society, 1998.
- [6] Fedkiw R.P., Osher S.J.: Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. USA, Springer, ISBN 0-387-95482-1, 2003.
- [7] Guichard F., Morel J. M.: Image Analysis and P.D.E.'s; citováno 9.9.2007. dostupné z: http://www.siam.org/meetings/an00/talks_online/MorelGuichard.pdf.
- [8] Haškovec V., Mudrová M.: Detekce Hran v Biomedicínských Obrazech; citováno 9.9.2007. dostupné z: http://dsp.vscht.cz/konference_matlab/matlab03/haskovec.pdf.
- [9] Hlaváč V., Sedláček M.: Zpracování signálu a obrazu, Skriptum FEL ČVUT, Ediční středisko ČVUT, 1991.
- [10] Hlaváč V., Šonka M.: Základy Počítačové Vidění, Grada, Praha, 1992.
- [11] Maška M.: Segmentace obrazu pomocí rychlých aproximací implicitních aktivních povrchů, Masarykova univerzita, 2006.
- [12] Mikula K.: Image Processing with partial differential equations, citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://citeseer.ist.psu.edu/image-processing-with-partial.pdf>.
- [13] Karol Mikula, Numerical solution, analysis and application of geometrical nonlinear diffusion equations, Edition of Scientific Publications, No. 34, Publishing House of the Slovak University of Technology, Bratislava, 2006
- [14] Mikula K., Sarti A., Parallel co-volume subjective surface method for 3D medical image segmentation, in: Parametric and Geometric Deformable Models: An application in Biomaterials and Medical Imagery, Volume-II, Springer Publishers, (Eds. Jasjit S. Suri and Aly Farag), 2006.
- [15] [Mikula K., Sarti A., Sgallari F., Semi-implicit co-volume level set Metod in medical image segmentation, in Handbook of Biomedical Image Analysis: Segmentation and Registration Models (J.Suri a kol.), Springer, New York, ISB 0-387-23126-9, pp. 583-626, 2005.
- [16] Mulder W., Osher S., Sethian J. A.: Computing Interface Motion in Compressible Gas Dynamics. Journal of Computational Physics, 100, 1992, s. 209 – 228.

- [17] Osher S., Fedkiw R. P.: Level Set Methods; citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://citeseer.ist.psu.edu/osher00level.html>.
- [18] Osher S.J., Paragios N., Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics, Springer, 2003
- [19] Osher S., Sethian J. A.: Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations, Journal of Computational Physics, 79, pp.12-49, (1988); citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://citeseer.ist.psu.edu/osher88fronts.html>
- [20] Payne B. R.: Digital Accelerated 2-D and 3-D Digital Image Processing on a GPU; citováno 9.9.2007. dostupné z: http://hvl.cs.gsu.edu/pubs/GP2_poster_payne.pdf.
- [21] Pelikán J.: Algoritmy počítačové grafiky; citováno 9.9.2007. dostupné z: http://notorola.sh.cvut.cz/~bruxy/Algoritmy_pocitacove_grafiky.doc.
- [22] Peng D., Merriman B., Osher S., Zhao H., Kang M.: A PDE-Based Fast Local Level Set Method, Journal of Computational Physics 155, 410–438 (1999).
- [23] Pratt W. K.: Digital Image Processing. John Wiley&Sons, 2001.
- [24] Sapiro G.: Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis. Cambridge University Press, 2001.
- [25] Serra J.: Image Analysis and mathematical morphology. Academic Press, 1988.
- [26] Sethian J. A.: Level Set and Fast Marching Methods. Cambridge University Press, 1999.
- [27] Sethian J. A.: Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences, Cambridge University Press, 1996.
- [28] Sethian J. A.: Theory, Algorithms, and Applications of Level Set Methods for Propagating Interfaces; citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://math.berkeley.edu/~sethian/2006/Papers/sethian.actanumerica.1995.pdf>.
- [29] Shu C., Fedkiw R. P., Sapiro G.: Shock Capturing, Level Sets and PDE Based Methods in Computer Vision and Image Processing: A Review of Osher's Contributions; citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://graphics.stanford.edu/~fedkiw/papers/stanford2001-05.pdf>
- [30] Španěl M., Beran V.: Obrazové segmentační techniky; citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://www.fit.vutbr.cz/%7Espanel/segmentace/.cs>.
- [31] Štrboja M.: Image restoration by partial differential equations; citováno 9.9.2007. dostupné z: http://www.bmf.hu/conferences/sisy2006/25_Mirjana.pdf.
- [32] Tišnovský P.: Grafický formát TGA; citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://www.root.cz/clanky/graficky-format-tga-jednoduchy-oblibeny-pouzivany/>.
- [33] Vicher M.: Numerická matematika, Skriptum PF UJEP, Ústí nad Labem 2003.
- [34] Vlček V. V.: Využití Level Set Metod v Počítačové tomografii; citováno 9.9.2007. dostupné z: <http://home.zcu.cz/~vsoft/iradon/panmvlcekp.pdf>.
- [35] Yoo T. S.: Insight into Images. A K Peters Ltd., 2001.

- [36] Žára J., Beneš B., Felkel P.: Moderní Počítačová Grafika, Computer Press, Praha, 2005.
- [37] Brezis H.: Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contraction dans les espaces de Hilbert, North-Holland Publishing Company, 1973.