První zápočtová písemka z mechaniky

5.11., kruh JCH3

Za každý příklad lze získat 1b. Na písemku je 90 min.

Příklad č.1
a) spočtěte vektor, který je dán jako $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, kde $\vec{a} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \times (\vec{j} - \vec{k})$
a $\vec{b} = \left[(\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (\vec{j} - \vec{k})\right] (\vec{i} - \vec{j})$
b) k vektoru $\vec{c}$ najděte takový vektor $\vec{e}_c$, který je s vektorem $\vec{c}$ rovnoběžný a $\|\vec{e}_c\| = 1$

Řešení:
a)

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{k} + \vec{j} \quad (0,3\ b)$$

$$\vec{b} = [(1,2,0) \cdot (0,1,-1)]\,(\vec{i} - \vec{j}) = (0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1))(\vec{i} - \vec{j}) = 2(\vec{i} - \vec{j}) \quad (0,3\ b)$$

$$\vec{c} = (-2,1,1) - (2,-2,0) = (-4,3,1) \quad (0,1\ b)$$

b)

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26} \quad (0,2\ b)$$

$$\vec{e}_c = \pm\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \pm\frac{1}{\sqrt{26}}(-4,3,1) \quad (0,1\ b)$$

Pozn.: je třeba si uvědomit, že skalární součin dvou vektorů je číslo.

Příklad č.2

Dvě částice letí z bodů $A = (2,0)$, $B = (-1,1)$ rovnoměrným pohybem s rychlostí $\vec{v}_A = (0,3)$, $\vec{v}_B = (2,1)$. Spočtěte
a) průsečík jejich drah,
b) vzdálenost jejich největšího přiblížení.

Řešení:

$$x_1(t_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t_1 \end{pmatrix} \qquad x_2(t_2) = \begin{pmatrix} -1+2t_2 \\ 1+t_2 \end{pmatrix} \quad (0,2\ b)$$

a) $x_1(t_1) = x_2(t_2)$

$$\begin{aligned} 2 &= -1+2t_2 \\ 3t_1 &= 1+t_2 \end{aligned}$$

$t_2 = \frac{3}{2}$, $t_1 = \frac{1}{3}(1+\frac{3}{2}) = \frac{5}{6}$. $x_p = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad (0,4b)$.

b)

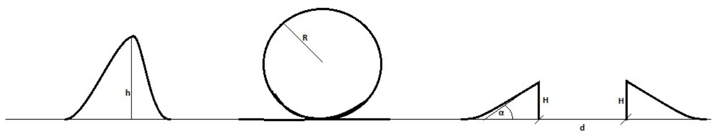
$$r_{21}(t) = x_2(t) - x_1(t) = \begin{pmatrix} 3-2t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

Podmínka na minimum: $\frac{\mathrm{d}r_{21}^2(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.

$$r_{21}^2(t) = (3-2t)^2 + (2t-1)^2 = 9 - 12t + 4t^2 + 4t^2 - 4t + 1 = 8t^2 - 16t + 10$$

$$\frac{\mathrm{d}r_{21}^2(t)}{\mathrm{d}t} = 16t - 16 \Rightarrow t = 1, r_m = \sqrt{2} \quad (0,4\ b)$$

Příklad č.3



Mějme autíčko o hmotnosti m, kterému udělíme na začátku dráhy rychlost v_0. Spočtěte, jakou minimální rychlost v_0 musí autíčko na začátku mít, aby překonalo
a) kopec výšky h
b) kruhový loop o poloměru R
c) skokánek o výšce H, odrazovém úhlu α a vzdálenosti mezi můstky d

Řešení:
a) ze zákona zachování energie v počátečním bodě a v nejvyšším bodě kopce plyne, že $E_k = E_p$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \quad (0,3\ b)$$

b) Platí, že pokud má autíčko projet smyčkou, pak musí $F_o \geq F_g$. Vezměme v úvahu minimální případ (tedy rovnost sil v horním bodě smyčky) a dostáváme, že

$$m\frac{v_N^2}{R} = mg \rightarrow v_N^2 = gR \quad (0,2\ b)$$

ze zákona zachování energie v počátečním bodě a v horním bodě smyčky pak dostáváme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_N^2 + mg2R = \frac{1}{2}mgR + 2mgR \Rightarrow v_0 = \sqrt{5gR} \quad (0,1\ b)$$

c) nejdříve si ze zákona zachování energie mezi počátečním bodem a vrcholem skokánku nalezneme vztah mezi rychlostí v_0 a rychlostí na počátku skoku v_H

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_H^2 + mgH \quad (0,1\ b)$$

vektor rychlosti $\vec{v}_H$ se dá zapsat pomocí jeho velikosti v_H a úhlu α jako $\vec{v}_H = \begin{pmatrix} v_H \cos\alpha \\ v_H \sin\alpha \end{pmatrix}$. Víme, že na auto působí ještě gravitační zrychlení, dráha skoku se dá tedy popsat jako

$$x(t) = \begin{pmatrix} (v_H \cos\alpha)t \\ H + (v_H \sin\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix} \quad (0,1\ b)$$

V čase, kdy $x_1(t_d) = (v_H \sin\alpha)t_d = d$ musí platit, že $x_2(t_d) \geq H$ (podmínka přeskočení skokánku). tedy v krajním případě

$$H + (v_H \sin\alpha)t_d - \frac{g}{2}t_d^2 = H \quad (0,1\ b)$$

tedy $t_d(v_H \sin\alpha - \frac{g}{2}t_d) = 0$, čehož pro ($t_d > 0$) dostáváme $t_d = v_H \frac{2}{g} \sin\alpha$. Po dosazení do $x_1(t_d)$ máme, že

$$v_H^2 \frac{2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = d \Rightarrow v_H^2 = \frac{gd}{\sin 2\alpha} \quad (0,1\ b)$$

Po dosazení do ZZE dostáváme, že $v_0 = \sqrt{g(2H + \frac{d}{\sin 2\alpha})}$.

Příklad č.4

Částice koná harmonický pohyb $x(t) = A\sin(\omega t)$. Určete
a) rychlost a zrychlení částice v čase t
b) amplitudu A a úhlovou rychlost ω, pokud $x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 2cm$ a $v\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -4\ cms^{-1}$.

Řešení:
a)

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) \quad (0,25\ b)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) \quad (0,25\ b)$$

b)

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = A\cos\left(\omega\frac{\pi}{2\omega}\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \overset{!}{=} 2 \Rightarrow A = 2cm \quad (0,25\ b)$$

$$v\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 2\omega\sin\left(\omega\frac{\pi}{\omega}\right) = 2\omega\sin(\pi) = -2\omega \overset{!}{=} -4 \Rightarrow \omega = 2\ rad\cdot s^{-1} \quad (0,25\ b)$$