

Sada příkladů z kvantové fyziky č.6

Příklad č.1

Vodíkový atom

Vlastní funkce vodíkového atomu závisí na třech parametrech a dají se psát následujícím způsobem: $\psi_{Nlm} \equiv |Nlm\rangle$ (tzv. braketová notace).

Pomocí následující konvence zavedeme značení pro skalární součin

$$\langle Nlm|N'l'm'\rangle = \int dx \overline{\psi_{Nlm}(x)} \psi_{N'l'm'}(x)$$

Víme, že funkce jsou navzájem ortonormální, tedy $\langle Nlm|N'l'm'\rangle = \delta_{NN'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$. Tyto vektory jsou vlastní vektory operátorů \hat{H}_{hyd} , \hat{L}^2 , \hat{L}_3 s vlastními čísly

$$\begin{aligned}\hat{H}_{hyd}|Nlm\rangle &= -\frac{mq^2}{2\hbar^2 N^2}|Nlm\rangle \\ \hat{L}^2|Nlm\rangle &= l(l+1)\hbar^2|Nlm\rangle \\ \hat{L}_3|Nlm\rangle &= m\hbar|Nlm\rangle\end{aligned}$$

Uvažujme vlnovou funkci, která je následující superpozicí vlastních funkcí:

$$|\psi\rangle = C(4|100\rangle + 3|211\rangle - 4|210\rangle + \sqrt{10}|21-1\rangle)$$

- Vypočítejte normalizační konstantu.
- Spočítejte střední hodnotu energie $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$.
- Spočítejte střední hodnotu \hat{L}^2 .
- Spočítejte střední hodnotu \hat{L}_3 .
- Uvažujte analogickou situaci v případě 3D harmonického oscilátoru. Jak vypadají vlastní čísla daných operátorů? Zkuste spočítat normalizaci a střední hodnoty daných veličin pro $|\psi\rangle_{LHO}$.

Příklad č.2

Kvantové počítání

Na systémech se dvěma stavy se dá definovat kvantová verze informace, kde si označíme stavy $|0\rangle$, $|1\rangle$. Analogií klasického bitu je pak stav zvaný qubit, což stav, který je tvořen dvěma stavy $|0\rangle$, $|1\rangle$, ale vzhledem k principu superpozice i jejich libovolnou superpozicí, tedy

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

kde předpokládáme, že stavy $|0\rangle$, $|1\rangle$ jsou na sebe kolmé.

- Co plyne pro konstanty α , β z normovací podmínky pro $|\psi\rangle$?
- Pokud si použijeme geometrickou reprezentaci komplexního čísla ($z = re^{i\phi}$) pro konstanty α a β , jak bude vypadat reprezentace libovolného stavu v těchto proměnných? (pozn: takové reprezentaci se říká blochova sféra)
- jak bude vypadat kvantový stav odpovídající klasickým dvěma bitům (=

{00, 01, 10, 11})?

d) Z důvodu zachování pravděpodobnosti musí být každá operace na stavech systému unitární, neboli $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbf{1}$. Jak vypadá obecná unitární matice 2x2? Splňuje tyto požadavky operace prohození stavů ($\hat{U}|0\rangle = |1\rangle$, $\hat{U}|1\rangle = |0\rangle$) - logický operátor *NOT*)?

e) Jak vypadá operace známá jako Hadamardova brána, která nechá stav $|0\rangle$ nezměněn a ze stavu $|1\rangle$ udělá stav $-|1\rangle$?

f) kvantové kopírování: lze kvantový stav psí zkopírovat, tj. existuje taková unitární transformace \hat{U} , pro kterou platí, že $\hat{U}|\psi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle$?

g) kvantové kryptografie: jak se dá využít kvantová logika při šifrování zpráv? (protokol BB84)