Sada příkladů z kvantové fyziky č.4

Tato sada je věnována kvantovému harmonickému oscilátoru.

Příklad č.1
Vlastní funkce harmonického oscilátoru
Ověřte, že vlnové funkce

$$\psi(\xi) = A_n e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \tag{1}$$

jsou vlastní funkce harmonického oscilátoru $H_{LHO} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$, $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ a H_n jsou tzv. Hermitovy polynomy. Hermitovy polynomy jsou definovány

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^n (2z)^{n-2k} \frac{n!}{k!(n-2k)!} \tag{2}$$

nebo alternativně

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} e^{-z^2}. \tag{3}$$

(Můžete si zkusit ukázat ekvivalenci obou definic.)
Pozn.: Řešte stacionární rovnici pro LHO $\hat{H}\psi = \lambda\psi$ se substitucí $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$. Předpokládejte řešení ve tvaru $e^{-\frac{\xi^2}{2}}u(\xi)$ a odvoďte rovnici pro $u(\xi)$. Ukažte, že Hermitovy polynomy splňují tuto rovnici a specifikujte λ pro daný Hermitův polynom. Využijte přitom jednu z alternativních definic Hermitových polynomů.

Příklad č.2
Kreační a anihilační operátory LHO
a) Posunovací operátory Hamiltoniánu jsou takové operátory, které splňují následující komutační relace:

$$[\hat{H}, \hat{a}] = \Delta \cdot \hat{a} \tag{4}$$

kde Δ je reálné číslo.
Ukažte, že pak pokud je ψ vlastní funkce Hamiltoniánu s vlastním číslem λ, pak je $\hat{a}\psi$ vlastní funkce Hamiltoniánu s vlastním číslem
$\lambda + \Delta$ nebo nulová funkce. Dále ukažte, že sdružený operátor $\hat{a}^\dagger$ je také posunovací operátor s posunutím $-\Delta$.
b) Ukažte, že operátory

$$\hat{a}_\pm = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{X} \mp \frac{i}{m\omega}\hat{P}) \tag{5}$$

jsou posunovací operátory pro Hamiltonián harmonického osciátoru H_{LHO}. Určete konstantu Δ.
Ukažte, že $\hat{a}_+^\dagger = \hat{a}_-$.
c) Operátor $\hat{a}_+$ se nazývá kreační operátor LHO, operátor $\hat{a}_-$ anihilační, protože jejich aplikací na vlastní funkci dostaneme následující/předchozí vlastní funkci.

Najděte pomocí kreačních a anihilačních operátorů spektrum LHO a popište, jak by se konstruovaly vlastní funkce. *Pozn.: Základní stav dostaneme pomocí anihilačního operátoru z rovnice*

$$\hat{a}_{-}\psi_0 = 0.$$

Ze Schrödingerovy rovnice určíme vlastní energii. Ostatní vlastní funkce dostaneme opakovanou aplikací kreačního operátoru, přičemž příslušné vlastní číslo bude $\lambda_0 + n \cdot \Delta$.