Sada příkladů z kvantové fyziky č.3

V prvním příkladu se zaměříme na kanonické kvantování a význam komutátoru v kvantové mechanice a v druhém příkladu si ukážeme jednoduchý kvantový systém - nekonečnou potenciálovou jámu

Na příští cvičení přineste příklady: bude specifikováno na cvičení
Příklad č.1
Kanonické kvantování
Předpokládejme, že klasickým dynamickým proměnným A_i, B_j přiřadíme hermitovské[1] operátory $\hat{A}_i$, $\hat{B}_j$. Diracova kvantovací podmínka požaduje, aby Poissonovým závorkám v klasické fyzice odpovídal komutátor operátorů, tedy

$$\{A_1, A_2\} = A_3 \to [\hat{A}_1, \hat{A}_2] = i\hbar \hat{A}_3.$$

Ukažte, že tato volba kvantování je jediná možná, tedy, že jako jediná odpovídá základním vlastnostem Poissonových závorek (antisymetrie, bilinearita, Poissonova závorka součinu, Jacobiho identita, časová derivace,...).

Pozn.: Při důkazu mužete postupovat například následujícím způsobem: Definujte si kvantově mechanický analog Poissonových závorek $\{\hat{A}, \hat{B}\}_{QM}$ a předpokládejte, že má stejné vlastnosti jako Poissonovy závorky. Spočtěte $\{\hat{A}_1\hat{A}_2, \hat{B}_1\hat{B}_2\}_{QM}$ (nezapomeňte na možnou nekomutativitu operátorů) a ukažte, že z toho lze usoudit, že

$$\{\hat{A}_1, \hat{B}_1\}_{QM} \left(\hat{A}_2\hat{B}_2 - \hat{B}_2\hat{A}_2\right) = \left(\hat{A}_1\hat{B}_1 - \hat{B}_1\hat{A}_1\right) \{\hat{A}_2, \hat{B}_2\}_{QM}$$

a z nezávislosti operátorů můžeme usoudit, že $c\{\hat{A}, \hat{B}\} = [\hat{A}, \hat{B}]$. Ukažte, že $\Re(c) = 0$. Nakonec ukažte, že pokud v klasické mechanice platí, že $\{A_1, A_2\} = A_3$, pak v QM musí platit

$$[\hat{A}_1, \hat{A}_2] = i|c|\hat{A}_3.$$

Příklad č.2
Částice v nekonečně hluboké potenciálové jámě
a) Nalezněte spektrum a vlastní vektory Hamiltoniánu částice v nekonečně hluboké potenciálové jámě, tedy $V(x) = 0$ pro $|x| \leq a$ a $V(x) = \infty$ jinak.
Pozn.: řešte rovnici $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$ a předpokládejte, že vlnové funkce jsou všude spojité a nulové pro $|x| \geq a$.
b) Uvažujte částici v nekonečné potenciálové jámě, která je popsána vlnovou funkcí

$$\psi_A(x) = \sqrt{\frac{1}{6}}\psi_0(x) + \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_1(x) + \sqrt{\frac{1}{2}}\psi_2(x)$$

[1] hermitovské operátory jsou takové, pro které $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$. Důvodem pro požadavek hermitovosti je fakt, že hermitovské operátory mají reálné spektrum a tudíž i množinu měřitelných hodnot.

Jak se bude vyvíjet vlnová funkce $\psi_A(x,t)$ v čase?
c) Vypočtěte střední hodnotu energie $\langle E \rangle$ jako funkci E_0. Jak se tato hodnota mění v čase?
d) V čase $t_0 = 0$ jsme naměřili hodnotu energie E_2. jak bude vypadat vlnová funkce $\psi_A(x,t)$ v čase $t > 0$?
e) Uvažujme částici v nekonečné jámě popsanou jako superpozici prvních dvou vlastních stavů $\psi_B(x,t) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\psi_0(x,t) + \psi_1(x,t)\right)$. Jak vypadá hustota pravděpodobnosti $p(x,t) = |\psi(x,t)|^2$
f) Pokuste se vyřešit Schrödingerovu rovnici pro nekonečnou potenciálovou bariéru ve dvou dimenzích. (Tedy budeme mít čtvercovou jámu s potenciálem $V(x,y) = 0$ pro $|x| < a$, $|y| < a$, jinak nekonečno.)
Pokuste se najít vlastní hodnoty energie a vlastní vektory. Může se stát, že jedné energetické hladině bude odpovídat více vlastních vektorů? (tzv. degenerovaný stav)