Sada příkladů z kvantové fyziky č.1

Důležitým pojmem ve fyzice je tzv. dualita částic a vlnění, kdy částice vykazují v některých případech vlnové vlastnosti a jindy se chovají jako tělesa. My si v následujících příkladech ukážeme některé jevy, které byly motivací ke zrodu kvantové mechaniky.

Na příští cvičení přineste vypočítané příklady 5b), 7b)-d) a 8.

Příklad 1: *Fotoelektrický jev*
Vzorek draslíku je ozařován monochromatickým světlem o vlnové délce $300nm$. Z obalu atomu jsou emitovány elektrony s kinetickou energií $2,1\ eV$. Pokud ozáříme stejný vzorek světlem o vlnové délce $500nm$, vzorek emituje elektrony s energií $0,5eV$. Spočtěte minimální napětí E_0, které je potřebné k tomu, aby byl ve vzorku pozorován elektrický proud. Spočtěte na základě měření velikost Planckovy konstanty $\hbar = h/2\pi$.
$1eV = 1,6 \cdot 10^{-19}\ J$.

Příklad 2: *Světlo ze vzdálené hvězdy*
Světlo ze slabé hvězdy má energetický tok $10^{-10}\ Jm^{-2}s^{-1}$. Předpokládejte, že světlo je monochromatické s vlnovou délkou $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}\ m$. Určete počet fotonů z této hvězdy, které dopadnou do lidského oka za 1 vteřinu. Předpokládejte, že oční pupila má průměr 5 mm.

Příklad 3: *Comptonův rozptyl*
Foton s energií E_γ dopadá na elektron, který je v klidu a rozptýlí se na něm pod úhlem θ. Odvoďte tzv. Comptonův posun $\delta\lambda$, tedy změnu vlnové délky v závislosti na úhlu rozptylu θ. Spočítejte, jak se změní vlnová délka fotonu s energií $1,77\ eV$ při rozptylovém úhlu $30°$. Jakému typu záření odpovídají tyto fotony? Ukažte, že maximální rozdíl vlnových délek je roven $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ - Comptonova vlnová délka.

Příklad 4: *Dvojštěrbinová interference elektronů*
Elektrony s hybností p dopadají na pár štěrbin oddělených vzdáleností d. Jaká je vzdálenost w mezi sousedními maximy interferenčního obrazce tvořeného na stínítku ve vzdálenosti D od štěrbin? Spočtěte de Broglieho vlnovou délku $\lambda = \frac{h}{p}$ a vzdálenost w, pokud jsou elektrony akcelerovány pomocí potenciálu $U = 50\ kV$, stěrbiny jsou od sebe vzdáleny $d = 2 \cdot 10^{-4}\ cm$ a vzdálenost ke stínítku je $D = 35\ cm$.
Pozn.: můžeme předpokládat, že šířka stěrbin je mnohem menší, než de Broglieho vlnová délka.

Příklad 5: *Rozměrová analýza charakteristických veličin kvantové gravitace*
a) Uvažujme částici sedící na desce stolu, které v úniku brání jen gravitační síla. Tento systém je charakterizován pouze třemi parametry: hmotností částice m, gravitačnímu zrychlení g a Planckovou konstantou $\hbar$. Použitím rozměrové

analýzy určete, jak závisí charakteristická energie částice na Planckově škále (tj. můžeme napsat $E \sim m^\alpha g^\beta \hbar^\gamma$).
b) Na škále, na které nabývá důležitosti kvantová gravitace se pojí obecná relativita (charakterizovaná Newtonovou konstantou $G_N = 6,67 \cdot 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$), kvantová mechanika ($\hbar$) a speciální relativita (c). Použitím dimenzionální analázy najděte kombinaci mocnin G_N, $\hbar$ a c, která má za jednotku délku - tato délka je nazývána Planckova délka L_P. Spočtěte její hodnotu. Podobnou analýzu zopakujte i pro Planckovu hmotnost M_P.

Příklad 6: *Radiační kolaps klasického atomu*
Uvažujme, že atom vodíku je tvořen elektronem, který obíhá jako klasická částice po kruhové dráze kolem protonového jádra. Pro nerelativistický, zrychlený elektrický náboj platí Larmorova vyzařovací formule

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{q^2 a^2}{c^3}.$$

Ukažte, že energie ztracená za jeden oběh je malá v porovnání s kinetickou energií elektronu, proto tedy můžeme považovat orbity za kruhové. S použitím typické velikosti atomu (1Å$= 10^{-10} m$) a jádra ($1fm = 10^{-15} m$) spočtěte dobu, za kterou spadne elektron do jádra.

Příklad 7: *Planckův vyzařovací zákon*
Planckův zákon udává vztah mezi spektrální hustotou energie absolutně černého tělesa a frekvencí ν:

$$\mathfrak{u}(\nu, T)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}\mathrm{d}\nu.$$

a) odvoďte tento vztah
b) odvoďte závislost $\mathfrak{u}(\nu, T)$ pro nízké frekvence (Rayleigh-Jeansův zákon)
aproximujte exponencielu polynomem prvního řádu a dosaďte
c) odvoďte závislost maxima funkce $\mathfrak{u}(\lambda, T)$ na teplotě (Wienův posunovací zákon)
vyjádřete $\mathfrak{u}$ *jako funkci* λ *a* T*, zderivujte podle* λ *a nalezněte závislost* λ *na* T
d) odvoďte celkovou hustotu energie $\epsilon(T) = \int_0^\infty \mathfrak{u}(\nu, T)\mathrm{d}\nu$ (Stefan-Boltzmanův zákon)
Pozn.: $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$.

Příklad 8: *Bohrův model atomu*
Bohrův model atomu (1913) je semiklasický model, který předpokládá, že atom je složen z nehybného jádra (protonů) a z elektronů, které: 1) se pohybují po kruhových drahách 2) velikost jejich momentu hybnosti je dána celočíselným násobkem redukované Planckovy konstanty $\hbar$. Porovnáním přitažlivé elektrické síly ($\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$) s odstředivou silou ($\frac{mv^2}{r}$) spočítejte energetické hladiny eletronu v atomovém obalu. Spočítejte vzdálenost elektronu od jádra v základním stavu. Tato vzdálenost se nazývá Bohrův poloměr a značí se a_0. Ukažte, že $a_0 = \frac{\lambda_C}{\alpha}$, kde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \doteq \frac{1}{137}$ je konstanta jemné struktury.