Průběžně odkývaný seznam Klíčových pojmů a cvičení z RMF

Václav Klika

29. prosince 2018

Jedná se o seznam pojmů, pozorování, tvrzení a příkladů, jejichž znalost bude vyžadována u zkoušky. Zároveň tento seznam slouží pro opakování pomocí testů na začátku cvičení – postupně odkýváno.

1 Klíčové pojmy

U zkoušky jsou pro níže uvedené pojmy vyžadováno znění (tedy definování daných pojmů a tvrzení vět, pokud jsou zmíněny) a jejich pochopení. Vyžadování důkazu je explicitně napsané. V testu je vyžadována pouze definice pojmu.

1.1 Testovací a zobecněné funkce

- definice $\mathscr{D}(G)$, příklad testovací funkce, nosič funkce
- L^p vs $\mathscr{L}^p$ (faktorizace)
- Vztah $\mathscr{D}$ a L^p (s důkazem)
- L^1_{loc}
- konvergující posloupnost v normovaném prostoru, Cauchyovská posloupnost,
- Banachův a Hilbertův prostor
- $\varphi_n \overset{\mathscr{D}}{\to} \varphi$
- $\mathscr{D}'(G)$, konvergence v $\mathscr{D}'$
- $\mathscr{D}'_{reg}(G)$, „$\mathrm{L}^1_{loc} \subset \mathscr{D}'$“
- δ a vztah k $\mathscr{D}'_{reg}$
- derivace v $\mathscr{D}'$ (+ motivace)
- regulární transformace v $\mathscr{D}'$ (+ motivace)
- násobení v $\mathscr{D}'$ (+ motivace)
- věty o spojitost operací v $\mathscr{D}'$ i s důkazy (záměnnost součtu, násobení, derivace a regulární transformace s limitou)
- identity kalkulu (Leibnitzovo pravidlo, záměnnost smíšených derivací, derivace p.č. $\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ funkce, aproximace δ funkce pomocí L^1 funkcí, vztah derivace a limity)
- $\operatorname{supp} f$ pro $f \in \mathscr{D}'$
- obě regularizace funkce $\frac{1}{x}$ a znalost Sochockého vzorců
- tenzorový součin (+ motivace) a jeho vlastnosti
- konvoluce testovacích funkcí a její vlastnosti i s důkazy
- konvoluce testovací a zobecněné funkce, vlastnosti (tvrzení vět)
- hustota $\mathbb{C}^\infty$ v $\mathscr{D}'$ (každou zobecněnou funkci lze aproximovat pomocí hladkých funkcí)

- konvoluce zobecněných funkcí s kompaktním nosičem, vlastnosti i s důkazy
- věta o fundamentálním řešení pro lineární ODR s konst koeficienty ($\varepsilon(t) = \Theta(t)z(t)\dots$) i s důkazem (proběhlo na cvičení)

1.2 Integrální transformace

- rychle klesající a pomalu rostoucí funkce
- $\mathscr{S}$ a vztah vůči L^1, $\mathscr{D}$ s důkazy
- $\varphi_n \stackrel{\mathscr{S}}{\to} \varphi$
- $\mathscr{S}'$ a vztah k $\mathscr{D}'$, konvergence v $\mathscr{S}'$
- $\mathscr{S}'_{reg}$
- operace derivace, regulární transformace, násobení, tenzorový součin a konvoluce v $\mathscr{S}'$
- $\mathscr{F}$ na L^1
- $\mathscr{F}$ na $\mathscr{S}$ a vlastnosti (všechny) s důkazy (kromě vlastnosti s Riemann-Lebesgueovým lemmatem)
- $\mathscr{F}$ na $\mathscr{S}'$ a vlastnosti ((1) – (9) z přednášky, o inverzi a o konvoluci) s důkazy
- klasická $\mathscr{L}$ a vlastnosti ((1) – (12) z přednášky) s důkazy (kromě vlastnosti, že Laplaceova transformace není z $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$)
- zobecněná $\mathscr{L}$ a vlastnosti ((1) – (6) z přednášky)

1.3 Řešení integrálních a diferenciálních rovnic

- klasifikace lineárních PDR 2. řádu a jejich představitelé
- Fredholmovy integrální operátory a rovnice
- omezené zobrazení, norma omezeného zobrazení a tvrzení vč důkazu, že složení omezených zobrazení je omezené zobrazení
- věta o spojitosti omezeného lineárního zobrazení vč důkazu
- metoda postupných aproximací
- metoda iterovaných jader, rezolventní jádro
- Volterrovy integrální operátory a rovnice + rekurentní vztah pro iterovaná jádra
- spektrum lineárního operátoru na Banachově prostoru
- spektrum integrálního operátoru se spojitým jádrem
- ortogonální báze a ekvivalentní vyjádření
- Sturm-Liouvilleův (S-L) operátor a S-L úloha
- vlastnosti (8) S-L operátoru a důkaz alespoň tří vlastností (8 vlastností je oněch 6 na začátku kapitoly + 2 na konci kapitoly po vyřešení S-L v 1D)
- nalezení (odvození) Greenovy funkce pro 1D úlohy
- vlastnosti (5) Greenovy funkce

2 Klíčová cvičení

Předpokládá se schopnost spočítat či vyřešit následující úlohy

- $\delta \in \mathscr{D}'$
- $x^n \in \mathscr{D}'$
- $\delta(2x) = \frac{1}{2}(x)$
- $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$
- $x^2\delta'(x)$
- $\left(e^{|x|}\cos|x|\right)'''$
- spočtěte limitu v $\mathscr{D}'$: $\lim_{n\to\infty} n^2 \sin nx$.
- spočtěte limitu v $\mathscr{D}'$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(nx-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- $\operatorname{supp}\delta$
- $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^{1+1})$, $f_{\Theta_t}(t,x) = \Theta(t)f(t,x)$. Spočtěte $\partial_t f_{\Theta_t}$ a $\partial_x f_{\Theta_t}$.
- $\Theta(a-|x|) \star \Theta(a/2-|x|)$, kde $a > 0$.
- $\delta \star f$
- výpočet fundamentálního řešení lineární ODR s konstantními koeficienty
- $\delta \in \mathscr{S}'$
- $\mathscr{F}[e^{-x^2}]$
- $\mathscr{F}[\delta(x)]$
- $\mathscr{F}[1]$
- $\mathscr{L}[\delta(x)]$
- vyřešit lineární ODR s konst koeficienty a počátečními podmínkami pomocí integrálních transformací
- vyřešit lineární ODR s konst koeficienty a počátečními podmínkami pomocí teorie zobecněných funkcí; umět ukázat pro konkrétní úlohu, že z řešení zobecněné úlohy lze nalézt řešení klasické úlohy
- vyřešit počáteční úlohu pro PDR $\partial_t u + c(t,x)\partial_x u = f(x,t,u)$ pomocí metody charakteristik
- převod na normální tvar pro PDR 2.řádu dvou proměnných a pro PDR s konstantními koeficienty
- vyřešit (sestavení vzorců) počáteční úlohy pro rovnici vedení tepla a vlnovou rovnici pomocí zobecněných funkcí vč nalezení fundamentálních řešení těchto operátorů v jedné a ve třech prostorových dimenzích
- nalezení fundamentálního řešení Laplaceova operátoru v jedné a třech prostorových dimenzích
- řešení Fredholmových integrálních rovnic s degenerovaným jádrem
- iterativní způsoby řešení jak pro Fredholmovy, tak pro Volterrovy integrální rovnice
- nalézt Greenovu funkci pro Sturm-Liouvilleův operátor a zformulovat řešení pomocí Greenovy funkce
- převést úlohu na vlastní čísla S-L operátoru na integrální rovnici