Klíčové pojmy a Kličkova cvičení z RMF

Václav Klika

22. prosince 2016

1 Klíčové pojmy

Pokud není uvedeno jinak, tak pro níže uvedené pojmy jsou vyžadovány definice, tvrzení vět (kde zmíněno) a jejich pochopení. Situace, kdy je vyžadována i znalost (jednodušších) důkazů, jsou zmíněny explicitně.

Testovací a zobecněné funkce

- Def $\mathscr{D}(G)$, příklad testovací funkce, nosič funkce
- L^p vs $\mathscr{L}^p$ (faktorizace)
- Vztah $\mathscr{D}$ a L^p
- L^1_{loc}
- $\varphi_n \overset{\mathscr{D}}{\to}$
- Def $\mathscr{D}'(G)$, konvergence v $\mathscr{D}'$
- konvergující posloupnost v normovaném prostoru, Cauchyovská posloupnost, Banachův a Hilbertův prostor
- $\mathscr{D}'_{reg}$, "$L^1_{loc} \subset \mathscr{D}'$ "
- δ a vztah k $\mathscr{D}'_{reg}$
- derivace v $\mathscr{D}'$
- regulární transformace v $\mathscr{D}'$
- násobení v $\mathscr{D}'$
- věta o spojitosti operací v $\mathscr{D}'$ i s důkazy (záměnnost součtu, násobení, derivace a regulární transformace s limitou)
- věta identit kalkulu (Leibnitzovo pravidlo, záměnnost smíšených derivací, derivace p.č. $C^1(\mathbb{R})$ funkce, aproximace δ funkce pomocí L^1 funkcí, vztah derivace a limity)
- $\operatorname{supp} f$, $f \in \mathscr{D}'$
- obě regularizace $\frac{1}{x}$ funkce a znalost Sochockého vzorců
- tenzorový součin a jeho vlastnosti
- konvoluce testovacích funkcí a její vlastnosti i s důkazy
- konvoluce testovací a zobecněné funkce, vlastnosti (tvrzení vět)
- hustota C^∞ v $\mathscr{D}$" (každou zobecněnou funkci lze aproximovat pomocí hladkých funkcí)
- konvoluce zobecněných funkcí s kompaktním nosičem, vlastnosti i s důkazy
- věta o fundamentálním řešení pro lineární ODR s konst koeficienty ($\varepsilon(t) = \theta(t)Z(t)...$) i s důkazem
- rychle klesající a pomalu rostoucí funkce
- $\mathscr{S}$ a vztah vůči L^1, $\mathscr{D}$ s důkazy
- $\varphi_n \overset{\mathscr{S}}{\to}$

- $\mathscr{S}'$ a vztah k $\mathscr{D}'$, konvergence v $\mathscr{S}'$
- $\mathscr{S}'_{reg}$
- operace derivace, regulární transformace, násobení, tenzorový součin a konvoluce v $\mathscr{S}'$
- $\mathscr{F}$ na L^1
- $\mathscr{F}$ na $\mathscr{S}$ a vlastnosti (1-11 z přednášky) s důkazy (kromě vlastnosti s Riemann-Lebesgueovým lemmatem)
- $\mathscr{F}$ na $\mathscr{S}'$ a vlastnosti (1-9 z přednášky) s důkazy
- klasická $\mathscr{L}$ a vlastnosti (1-12 z přednášky) s důkazy (kromě vlastnosti, že Laplaceova transformace není z $\mathscr{S} \mapsto \mathscr{S}$)
- zobecněná $\mathscr{L}$ a vlastnosti (1-6 z přednášky)
- klasifikace lineárních PDR 2. řádu
- Fredholmovy integrální operátory a rovnice
- omezené zobrazení, norma omezeného zobrazení a tvrzení vč důkazu, že složení omezených zobrazení je omezené zobrazení
- věta o spojitosti omezeného lineárního zobrazení vč důkazu
- metoda postupných aproximací
- metoda iterovaných jader, rezolventní jádro
- Volterrovy integrální operátory a rovnice + rekurentní vztah pro iterovaná jádra
- spektrum lineárního operátoru na Banachově prostoru a integrálního operátoru se spojitým jádrem
- ortogonální báze a ekvivalentní vyjádření
- Sturm-Liouvilleův (S-L) operátor a S-L úloha
- vlastnosti (8) S-L operátoru a důkaz alespoň tří vlastností; 8 vlastností je oněch 6 očíslovaných + 2, které připadají na důsledek po vyřešení S-L v 1D (o vlastních číslech a vlastních funkcích S-L operátoru)
- nalezení (odvození) Greenovy funkce pro 1D úlohy
- vlastnosti (5) Greenovy funkce

2 Kličkova cvičení

Předpokládá se schopnost spočítat či vyřešit následující úlohy

- $\delta \in \mathscr{D}'$
- $x^n \in \mathscr{D}'$
- $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$
- $\delta(2x) = \frac{1}{2}\delta(x)$
- $\left(e^{|x|}\cos|x|\right)'''$
- $f \in C^1(\mathbb{R}^{1+1})$, $f_{\theta_t}(t,x) = \theta(t)f(t,x)$. Spočtěte $\partial_t f_{\theta_t}$, a $\partial_x f_{\theta_t}$.
- spočítat limity v $\mathscr{D}'$: $\lim_{n\to\infty} n^2\sin(nx)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(nx-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- $\theta(a-|x|) \star \theta(a/2-|x|)$, kde $a > 0$.
- $\delta \star f$
- výpočet fundamentálního řešení lineární ODR s konstantními koeficienty
- $\delta \in \mathscr{S}'$
- $\mathscr{F}[e^{-x^2}]$
- $\mathscr{F}[\delta(x)]$
- $\mathscr{F}[1]$
- $\mathscr{L}[\delta]$
- vyřešit lineární ODR s konst koeficienty a počátečními podmínkami pomocí integrálních transformací
- vyřešit lineární ODR s konst koeficienty a počátečními podmínkami pomocí teorie zobecněných funkcí; umět ukázat pro konkrétní úlohu, že z řešení zobecněné úlohy lze nalézt řešení klasické úlohy
- vyřešit počáteční úlohu pro PDR $\partial_t u + c(t,x)\partial_x u = f(x,t,u)$ pomocí metody charakteristik
- převod na normální tvar pro PDR 2.řádu dvou proměnných a pro PDR s konstantními koeficienty
- vyřešit (sestavení vzorců) počáteční úlohy pro rovnici vedení tepla a vlnovou rovnici pomocí zobecněných funkcí vč nalezení fundamentálních řešení těchto operátorů v jedné a ve třech prostorových dimenzích
- nalezení fundamentálního řešení Laplaceova operátoru v jedné a třech prostorových dimenzích
- řešení Fredholmových integrálních rovnic s degenerovaným jádrem
- iterativní způsoby řešení jak pro Fredholmovy tak pro Volterrovy integální rovnice
- nalézt Greenovu funkci pro Sturm-Liouvilleův operátor a zformulovat řešení pomocí Greenovy funkce
- převést úlohu na vlastní čísla S-L operátoru na integrální rovnici