Hledání vázaných extrémů

Kuchařa pro naše počítání je založena hlavně na následující větě, upozorňuji ale, že zde neuvádím definice otevřené množiny, gradientu, lineární nezávislosti, lokálního extrému funkce více proměnných vzhledem k množině, parciální derivace ani stacionárního bodu...

Věta. *Nechť $f, g_1, \ldots, g_m$ jsou funkce třídy C^1 (čti: "je spojitá a má spojité první derivace") na otevřené množině G v prostoru $\mathbb{R}^n$, $n > m$. m funkcí nám zadává "vazbové podmínky":*

$$M = \bigcap_{i=1}^{m} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\vec{x}) = 0\} \subset G.$$

Nechť $\operatorname{grad} g_1(\vec{x}), \operatorname{grad} g_2(\vec{x}), \ldots, \operatorname{grad} g_m(\vec{x})$ *jsou lineárně nezávislé $\forall \vec{x} \in M$. Je-li bod $\vec{x}_0 \in M$ (čili bod ležící na průniku vazeb) bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M, pak existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že bod $\vec{x}_0$ je stacionární bod tzv. Lagrangeovy funkce*

$$\Lambda(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\vec{x}).$$

Poznámka. Čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory.

Díky předchozí větě můžeme sestavit následující kuchařku pro nalezení vázaného extrému:

1. Vem funkce $f, g_1, \ldots, g_m$ a sestav z nich Lagrangeovu funkci:

$$\Lambda(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\vec{x}),$$

2. Sestav n rovnic pro nalezení jejího stacionárního bodu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} &= \tfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \tfrac{\partial g_1}{\partial x_1} - \ldots - \lambda_m \tfrac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial x_n} &= \tfrac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \tfrac{\partial g_1}{\partial x_n} - \ldots - \lambda_m \tfrac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0. \end{aligned}$$

3. K n rovnicím přidej m vazebních podmínek

$$g_i(\vec{x}) = 0, i = 1, \ldots, m$$

4. Vyřeš soustavu $n + m$ rovnic pro $n + m$ neznámých $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

5. Vyzkoumej jestli body, které jsi našel/našla, jsou lokální/globální maxima/minima...

Příklad: Kostka ze cvičení se dá vyřešit přímo pomocí této kuchařky, nejen postupem ze cvičení (do písemky si vyberte co se Vám líbí víc):

Určete $p_1, \ldots, p_6$ pro šestistěnnou kostku, na které padá jednička dvakrát častěji než šestka. To nám dává dvě vazby:

$$p_1 = 2p_6,$$
$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1.$$

A z principu maximalizace entropie chceme za těchto podmínek najít extrém funkce

$$S = -k \sum_{i=1}^{6} p_i \ln p_i.$$

Dle kuchařky:

$$\Lambda = -k\sum_{i=1}^{6} p_i \ln p_i - k\lambda_1(\sum_{i=1}^{6} p_i - 1) - k\lambda_2(2p_6 - p_1),$$

kde jsem místo multiplikátorů λ_i zvolil $k\lambda_i$, což ušetří inkoust dále, ale jelikož multiplikátory jsou nějaká reálná čísla a nás zajímají hlavně p_i, nijak to nevlivní výsledek.

Hledání stacionárního bodu Lagr. fce:

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial p_1} = -k \ln p_1 - k - k\lambda_1 + k\lambda_2,$$

$$\ln p_1 = \lambda_2 - \lambda_1 - 1.$$

pro $i = 2, \ldots, 5:$

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} = -k \ln p_i - k - k\lambda_i,$$

$$\ln p_i = -\lambda_1 - 1.$$

a konečně

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial p_6} = -k \ln p_6 - k - k\lambda_1 - 2k\lambda_2,$$

$$\ln p_6 = -\lambda_1 - 1 - 2\lambda_2.$$

Tohle dosadíme zpět do vazebních podmínek a výjádříme $\lambda_{1,2}$:

$$p_1 = 2p_6 \to e^{\lambda_2 - \lambda_1 - 1} = 2e^{-\lambda_1 - 1 - 2\lambda_2},$$

$$\begin{aligned} 1 &= 2e^{-3\lambda_2}, \\ \lambda_2 &= \ln 2^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

a

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1 \to e^{\lambda_2 - \lambda_1 - 1} + e^{-2\lambda_2 - \lambda_1 - 1} + 4e^{-\lambda_1 - 1} = 1,$$

z toho protože $-2\ln 2^{\frac{1}{3}} = \ln 2^{-\frac{2}{3}}$ a λ_2 už známe:

$$\begin{aligned} 4 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}} &= e^{\lambda_1 + 1}, \\ \ln\left(4 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right) &= \lambda_1 + 1, \end{aligned}$$

označme si

$$A := 4 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}},$$

potom

$$\lambda_1 = \ln A - 1,$$

no a teď stačí multiplikátory dosadit do vyjádření pravděpodobností z dříve a máme výsledek

$$p_{2,\ldots,5} = e^{-\lambda_1 - 1} = e^{-\ln A} = \frac{1}{A} \doteq 0,17,$$

$$p_1 = e^{\lambda_2 - \lambda_1 - 1} = e^{\ln 2^{\frac{1}{3}}} e^{-\ln A} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{A} \doteq 0,21,$$

$$p_6 = e^{-2\lambda_2 - \lambda_1 - 1} = e^{\ln 2^{-\frac{2}{3}}} e^{-\ln A} = \frac{2^{-\frac{2}{3}}}{A} \doteq 0,11.$$

Kontrola: z výsledku před zaokrouhlením je vidět, že $p_6 = 2^{-1}p_1$, což je správně a díky tvaru A je splněna i normalizační podmínka.