# Newtonova Mechanika II

Antonín Hoskovec

19. prosince 2017

## Vrhy

Vrh je rovinný pohyb popsaný dvěma souřadnicemi $x(t)$ a $z(t)$, v jednom směru se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb a v druhém o rovnoměrný pohyb:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + v_{0,z}t - \frac{1}{2}gt^2, \\ x(t) &= x_0 + v_{0,x}t, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} v_z &= v_{0,z} - gt, \\ v_x &= v_{0,x}. \end{aligned} \tag{2}$$

### Zvláštní případy

#### Volný pád

Volný pád z výšky $h$ v homogenním gravitačním poli s tíhovým zrychlením $g$. Počáteční podmínky:

$$x_0 = 0, z_0 = h, v_{0,x} = v_{0,z} = 0. \tag{3}$$

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2, \tag{4}$$

$$v_z = -gt, \tag{5}$$

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{6}$$

#### Svislý vrh vzhůru

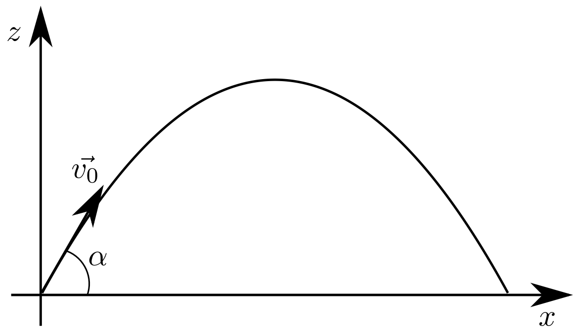
Počáteční podmínky:

$$x_0 = 0, z_0 = 0, v_{0,x} = 0, v_{0,z} > 0. \tag{7}$$

#### Šikmý vrh

Vrháme s počáteční rychlostí $\vec{v_0}$ pod elevačním úhlem $\alpha$, obr. 1.

$$\begin{aligned} v_{0,x} &= \cos\alpha\, v_0, \\ v_{0,y} &= \sin\alpha\, v_0. \end{aligned} \tag{8}$$




Obrázek 1: Šikmý vrh, pohyb po parabole

$$x_0 = z_0 = 0. \tag{9}$$

Můžeme řešit otázku tvaru trajektorie:

$$z = \tan\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2. \tag{10}$$

Vrchol trajektorie:

$$x_v = \frac{\sin 2\alpha\, v_0^2}{2g}, z_v = \frac{\sin^2\alpha\, v_0^2}{2g}. \tag{11}$$

Bod dopadu:

$$x_d = \frac{\sin 2\alpha\, v_0^2}{g}, z_d = 0, t_d = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}. \tag{12}$$

Z něj je vidět, že největší $x_d$ nastává pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

**Příklad**

Těleso je vrženo v okamžiku $t = 0$ svisle vzhůru. Určitým místem ve výšce $h$ prochází v okamžiku $t_1$ směrem vzhůru a v okamžiku $t_2$ směrem dolů. Určete výšku $h$ a počáteční rychlost $v_0$.

**Řešení**

Poloha tělesa ve svislém směru se bude vyvíjet jako $z(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. V našich dvou bodech tedy musí platit:

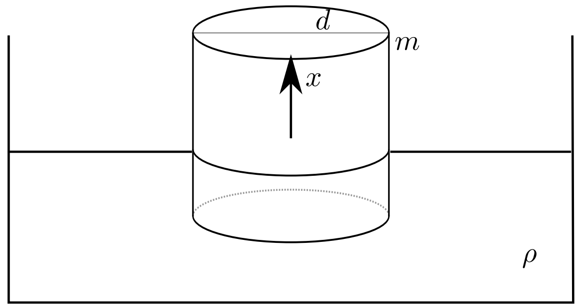
$$v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = h,$$
$$v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = h.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme $v_0(t_1 - t_2) = \frac{1}{2}g(t_1^2 - t_2^2)$, tedy $v_0 = \frac{g}{2}\frac{(t_1-t_2)(t_1+t_2)}{t_1-t_2} = \frac{g(t_1+t_2)}{2}$. Dosazením do první rovnice pak dostaneme $h = \frac{g(t_1+t_2)}{2}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{gt_1t_2}{2}$.

# Lineární harmonický oscilátor

Každý systém s charakteristickým tvarem pohybové rovnice:

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{13}$$




Obrázek 2: Hustoměr

$$ma = -kx. \tag{14}$$

Pro takovou rovnici známe řešení:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{15}$$

kde

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{16}$$

**Příklad**

Hustoměr v podobě válcové trubky průměru $d$ o hmotnosti $m$ plave v kapalině hustoty $\rho$. Dáme mu malý vertikální impuls a rozkmitáme ho tak. Určete periodu kmitů hustoměru (obr. 1).

**Řešení**

Při ustálení je v rovnováze tíhová síla působící na hustoměr a vztlaková síla daná jeho částečným ponořením. Pokud hustoměr vychýlíme dolů o $\Delta x$ z rovnovážné polohy, bude tím vytlačena voda o objemu $\frac{\pi d^2}{4}\Delta x$, a tedy na hustoměr bude působit podle Archimédova zákona vztlaková síla větší o $F = -V\rho g = -\frac{\pi d^2}{4}\rho g\Delta x$. (Síla působí vždy proti vychýlení, proto záporné znaménko.) Situace bude stejná při vychýlení nahoru - o stejnou hodnotu vztlaková síla klesne, a tedy tíhová síla převáží. Důležité je si uvědomit, že působící síla závisí na vychýlení jako $X = -k\Delta x$, a tedy že se jedná o harmonický oscilátor s "pružinovou konstantou" $k = \frac{\pi d^2}{4}\rho g$. Víme, že pro takový oscilátor je $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a tedy $T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{2\pi} = 4\sqrt{\frac{\pi m}{d^2\rho g}}$.

**Příklad**

Nalezněte periodu pohybu matematického kyvadla s délkou závěsu $l$ a hmotnosti $m$ (obr. 3).

**Řešení**

Sestavíme pohybovou rovnici v polárních souřadnicích:

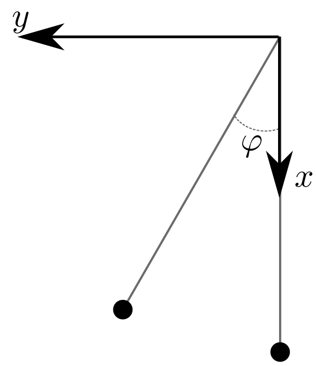
$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi,$$

tu pro malá $\varphi$ můžeme aproximovat jako

$$ml\ddot{\varphi} \approx -mg\varphi.$$

V ní vidíme pohybovou rovnici lineárního harmonického oscilátoru

$$m\ddot{\varphi} = -\frac{mg}{l}\varphi.$$




Obrázek 3: Matematické kyvadlo

Po dosazení do vzorce pro periodu (16) získáme výsledek

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

## Srážky

Budeme se zabývat srážkami dvou hmotných bodů, kolineárními, srážky nekolineární se popisují velmi podobně, ale ve dvou či třech směrech. Srážky rozdělíme na pružné a nepružné. Nepružné řešíme za pomoci zákona zachování hybnosti (viz. příklady), zatímco pro pružné srážky platí navíc zákon zachování energie a náš postup se bude opírat o následující odvození.

### Pružná srážka

Označíme-li hmotnosti částic $m_1$ a $m_2$, jejich rychlosti před srážkou $v_1$ a $v_2$ a jejich rychlosti po srážce jako $v_1'$ a $v_2'$, můžeme napsat zákon zachování hybnosti (ZZH)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{17}$$

A zákon zachování energie (ZZE) jako

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2. \tag{18}$$

Trik je upravit ZZE do tvaru

$$m_1(v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2(v_2 + v_2')(v_2' - v_2), \tag{19}$$

a tuhle rovnici vydělit ZZH (pokud dojde ke srážce, jedná se o ekvivalentní úpravu, nedělíme nulou). Z toho získáme

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'.$$

To po dosazení do (19) a zkrácení stejných členů na obou stranách dává

$$v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{20}$$

$$v_2' = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \tag{21}$$

**Příklad**

Tři loďky stejné hmotnosti $M$ jedou za sebou stejnou rychlostí $v$. Ze střední loďky byla rychlostí $u$ vzhledem k této loďce vyhozena ve stejnou dobu dvě závaží téže hmotnosti $m$ do přední a zadní loďky. Jaké jsou rychlosti loděk $v_1, v_2, v_3$ po přehození závaží?

**Řešení**

Rychlost prostřední loďky se zřejmě nezmění, tedy bude $v_2 = v$. U dalších loděk opět použijeme zákon zachování hybnosti. Rychlost závaží (vůči hladině) bude $v \pm u$, a tedy $Mv + m(v \pm u) = (M+m)v_{1,3}$, odkud $v_{1,3} = \frac{Mv+m(v\pm u)}{M+m}$.

**Příklad**

Dvě ocelové kuličky jsou zavěšeny na nitích tak, že když se dotýkají, jsou jejich středy ve vzdálenosti $l = 1\,\mathrm{m}$ od bodů závěsu a nitě jsou svislé. Hmotnosti kuliček jsou $m_1 = 800$ g a $m_2 = 200$ g.

1. Lehčí kuličku vychýlíme o úhel $90°$ a pustíme. Ráz kuliček je dokonale pružný. Určete výšky $h_1, h2$ , do kterých vystoupí kuličky.

2. Co se stane, vychýlíme-li těžší kuličku o $90°$ a pustíme?

3. Při jakém poměru hmotností kuliček budou výšky výstupu obou kuliček po rázu stejné?

**Řešení**

Nejprve určíme rychlost druhé (lehčí) koule po srážce $w$ ze vztahu $m_2gl = \frac{1}{2}m_2w$, tedy $w = \sqrt{2gl}$. Dále se jedná o dokonale pružnou srážku koulí s jediným rozdílem, že počáteční rychlost jedné z nich je nulová. V podstatě bychom mohli použít výsledek odvození pružné srážky, ale pro přehlednost provedeme výpočet v tomto zjednodušeném případě znovu. Zákon zachování je $m_1v_1 - m_2v_2 = m_2w$, tedy $m_1v_1 = m_2(v_2 + w)$. (Tuto úpravu opět provádíme proto, že nám následně umožní vyhnout se řešení kvadratické rovnice.) Zákon zachování energie bude:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_2w^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\\ m_2(w+v_2)(w-v_2) &= m_1v_1v_1\\ w - v_2 &= v_1,\end{aligned}$$

kde jsme opět využili výsledek ze zákona zachování hybnosti. Do tohoto také opět dosadíme za $v_1$ a dostaneme po úpravě $v_2 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gl}$. Výšku, do které koule vystoupá, opět stanovíme ze zákona zachování energie: $m_2gh_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$, odkud $h_2 = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) l = 36$ cm. Nyní již díky vztahu $v_1 = w - v_2$ snadno určíme druhou výšku $h_1 = \frac{4m_2^2}{(m_1+m_2)^2}l = 16$ cm.

Případ 2) vyřešíme jednoduše tak, že ve výsledcích prohodíme indexy 1 a 2. Tak dostaneme výšku $h_1 = \frac{(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}l = 36$ cm a $h_2 = \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}l = 256$ cm. Výsledek pro $h_2$ přichází však s otázkou toho jestli kulička oběhne celou kružnici, protože výška $h_2$ je větší než nejvyšší možná. Správně tedy je $h_2 = 200$ cm. Odpověď na ni je kladná, protože rychlost kuličky je dostačující pro překonání gravitační síly silou odstředivou (schválně zkuste ukázat navíc).

Pro řešení 3) standardně položíme $h_1 = h_2$ a můžeme při tom využít například vzorce pro případ, kdy na začátku vychylujeme kuličku hmotnosti $m_1$ (tedy vzorce z 2)). Po úpravách dostaneme rovnici $3m_1^2 + 2m_1m_2 - m_2^2 = 0$, kterou vydělíme výrazem $m_2^2$ a dostaneme $3\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2\frac{m_1}{m_2} - 1 = 0$. Fyzikálně smysluplné řešení této kvadratické rovnice pro proměnnou $x = \frac{m_1}{m_2}$ je $\frac{m_1}{m_2} = +\frac{1}{3}$. Vychýlená kulička tedy musí mít třetinu hmotnosti té stojící.