Jarní škola Kombinatorika na slovech

31. května–6. června 2015

Rejvíz, Zlaté Hory

Program konference

Pondělí 1.6.

09.00–09.15	*Zahájení konference*
09.15–10.15	Tomáš Hejda — *Tisíc tváří pozičních numeračních systémů*
10.20–10.55	
10.55–11.25	Zuzana Krčmáriková — *Pozičné číselné sústavy so záporným základom*
11.30–12.00	Michaela Kochmanová — *Zobecněná celá čísla a Rauzyho fraktály*
12.05–12.35	David Oppl — *Přepisování číselných řetězců a jeho aplikace v teorii čísel*
12.45–14.00	
14.00–18.00	*Práce na projektech*
18.30–19.30	

Úterý 2.6.

09.00–09.45	Zuzana Masáková — *Aritmetické diskrétní roviny*
09.50–10.20	Helena Svobodová — *Vzdálenosti mezi sousedy v cut-and-project množinách*
10.20–10.50	
10.50–11.20	Jan Mazáč, Daniel Štěrba — *Důkaz jednoho lemmatu Littlewooda a Offorda*
11.25–12.05	Tomáš Vávra — *Introduction to lattices*
12.10–12.40	Kateřina Pastirčáková — *Substitutivity and generation of words coding exchange of three intervals*
12.45–14.00	
14.00–18.00	*Práce na projektech*
18.30–19.30	

Středa 3.6.

09.00–09.40	Kateřina Medková — *Faktorová komplexita pevných bodů substitucí*
09.45–10.15	Vojtěch Veselý — *Binární projekce Arnouxových-Rauzyových slov*
10.20–10.55	☕
10.55–11.25	Tereza Velká — *Privilegovaná slova a uzávěry*
11.30–12.00	Petr Ambrož — *TBA*
12.05–12.35	Václav Jiříček — *Rauzyho grafy, faktorová a palindromická komplexita a faktorová frekvence*
12.45–14.00	🍽
14.00–18.00	*Práce na projektech*
18.30–19.30	🍽

Čtvrtek 4.6.

09.00–09.30	Marta Brzicová — *Kdy lze paralelně sčítat?*
09.35–10.10	Jakub Krásenský — *Kvaterniony a poziční číselné soustavy*
10.20–10.55	☕
10.55–11.30	Hana Dlouhá — *Rekurentní posloupnosti*
11.35–12.30	Edita Pelantová — *Charakteristiky Pisotových čísel*
12.45–14.00	🍽
14.00–18.00	*Práce na projektech*
18.30–19.30	🍽

Pátek 5.6.

09.00–09.45	Ľubomíra Dvořáková, Josef Florian — *Sčítání modulo dvěma na nekonečných slovech*
09.50–10.15	Jan Legerský — *Novinky z Liège*
10.20–10.50	☕
10.50–11.10	Jan Legerský — *Novinky z Liège*
11.15–11.55	Štěpán Starosta — *Kombinatorika palindromů a antipalindromů*
12.00–12.30	*Otevřené problémy*
12.30–12.40	*Zakončení konference*
12.45–14.00	🍽
18.30–19.30	🍽

Seznam příspěvků

Abstrakty příspěvků

TBA

Petr Ambrož (FJFI) Středa 11.30

TBA

Kdy lze paralelně sčítat?

Marta Brzicová (FJFI) Čtvrtek 09.00

Vyslovíme a dokážeme dvě nutné podmínky, které musí splňovat báze a množina cifer proto, aby numerační systém umožňoval paralelní sčítání.

Tyto výsledky pocházejí z článků: Ch. Frougny, E. Pelantová a M. Svobodová, Minimal Digit Sets for Parallel Addition in Non-Standard Numeration Systems, Journal of Integer Sequences 16 (2013), Article 13.2.17; Ch. Frougny, P. Heller, E. Pelantová a M. Svobodová, k-block parallel addition versus 1-block parallel addition in non-standard numeration systems, Theoretical Computer Science 543 (2014), 52–67.

Rekurentní posloupnosti

Hana Dlouhá (FJFI) Čtvrtek 10.55

V příspěvku budou definovány pojmy rekurentní posloupnost a charakteristický polynom. Bude uvedeno, kdy je posloupnost komplexních čísel rekurentní v závislosti na determinantu Hankelovy matice. Dále se budeme zabývat algebraickými, racionálními a celočíselnými rekurentními posloupnostmi a vztahy mezi členy rekurentní posloupnosti, jejími koeficienty a kořeny charakteristického polynomu.

Sčítání modulo dvěma na nekonečných slovech

Ľubomíra Dvořáková, Josef Florian (FJFI) Pátek 09.00

Označme jako $S(\boldsymbol{u})$ nekonečné slovo, které vznikne ze slova $\boldsymbol{u}$ nad abecedou $\{0,1\}$ sčítáním po sobě jdoucích písmen modulo 2. To jest

$$\big(S(\boldsymbol{u})\big)_n = u_n + u_{n+1} \bmod 2.$$

Je známo, že nekonečné slovo $\boldsymbol{u}$ je Roteovo (má komplexitu $2n$ a jazyk uzavřený na výměnu nul a jedniček), právě když slovo $S(\boldsymbol{u})$ je sturmovské. My se zaměříme na operaci S na zobecněných pseudostandardních slovech. Popíšeme kompletně třídu zobecněných pseudostandardních slov, která po aplikaci operace S budou opět zobecněná pseudostandardní. Zmíníme jejich souvislost právě s Roteovými slovy.

Tisíc tváří pozičních numeračních systémů

Tomáš Hejda (FJFI) Pondělí 09.15

Ve vší obecnosti, poziční numerační systém potřebuje pouze dvě věci. Jednak je to posloupnost hodnot jednotlivých pozic (b_n), která je buďto oboustranně nekonečná, doleva nekonečná nebo doprava nekonečná, tedy indexovaná buďto pomocí $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, nebo $-\mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$, a která by měla být v nějakém smyslu rostoucí. Za druhé je to pak abeceda $\mathcal{A}$, kterou je libovolná konečná množina čísel. Reprezentací x pak nazveme sumu $x = \sum_n x_n b_n$, kde x_n jsou z abecedy $\mathcal{A}$.

Například volba posloupnosti $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (10^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a abecedy $\mathcal{A} := \{0, 1, \dots, 9\}$ dává $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n 10^n$, v čemž rozpoznáváme běžnou desítkovou soustavu. Tento základní přístup je možné zobecňovat. V příspěvku představíme několik zobecnění: β-reprezentace a β-rozvoje; Erdősovské množiny; canonical number systems; shift radix systems. Také nahlédneme do souvisejících témat, jako jsou periodické a konečné rozvoje, dláždění, jazyky rozvojů. Spíše než na konkrétní výsledky se zaměříme na směry, kterými se výzkum těchto systémů ubíral, případně může ubírat.

Rauzyho grafy, faktorová a palindromická komplexita a faktorová frekvence

Václav Jiříček (FJFI) Středa 12.05

V příspěvku definuji Rauzyho graf nekonečného slova. Dále představím větu, která dává do vztahu faktorovou a palindromickou komplexitu, v jejíž důkaze se využívá Rauzyho grafů. Na závěr představím některé vztahy, které omezují počet frekvencí různých faktorů délky n v nekonečných aperiodických rekurentních slovech, opět s využitím Rauzyho grafů.

Zobecněná celá čísla a Rauzyho fraktály

Michaela Kochmanová (FJFI) Pondělí 11.30

Prezentace se věnuje vytvoření programů, algoritmů pro základní výpočty pozičních rozvojů čísel v bázi $\pm\beta$. Jedná se především o co nejpřesnější odhad rozvoje levého a pravého kraje, hledání lexikograficky největších a nejmenších řetězců, generování množiny beta celých čísel a vykreslení Rauzyho fraktálů. Bylo provedena rešerše na téma pozičních rozvojů čísel v reálné bázi $\pm\beta$ a množin $\pm\beta$ celých čísel. Vše ilustrujeme na příkladech.

Kvaterniony a poziční číselné soustavy

Jakub Krásenský (FJFI) Čtvrtek 09.35

V teorii pozičních číselných soustav je dobře známý pojem kanonického numeračního systému (CNS) a k působivým výsledkům patří fakt, že Penneyho základ $-1+i$ představuje spolu s dvouprvkovou reálnou abecedou $\{0,1\}$ CNS na okruhu Gaussových celých čísel. Celkově jsou kanonické numerační systémy v komplexních číslech dobře prozkoumaným oborem.

Tento příspěvek se bude zabývat CNS (a obecně pozičními číselnými soustavami) v tělese kvaternionů, které představuje určité zobecnění komplexních čísel. Nejprve prozkoumáme základní kvaternionové okruhy, tedy Hurwitzova a Lipschitzova celá čísla, na nichž budeme dále pracovat. Zjistíme, jakou nejmenší abecedu může CNS mít. Ukážeme si, které z těchto minimálních abeced skutečně tvoří CNS se základem $-1+i$, a posléze rozhodneme, která Hurwitzova celá čísla je možno použít jako základ nějakého CNS.

Pozičné číselné sústavy so záporným základom

Zuzana Krčmáriková (FJFI) Pondělí 10.55

Skúmame pozičné sústavy so záporným základom $-\beta$. Zvlášť sa zameriame na ich aritmetické vlastnosti. Ukážeme, že tzv. Simple Yrrap čísla nemajú vlastnosť $(-\mathrm{F})$. Ďalej sa zameriame na prípady, keď β je koreňom polynómov

$$(1)\quad x^3 - ax^2 - 1,\ a \geq 1, \qquad\qquad (2)\quad x^3 - ax - (a+1)x - 1,\ a \geq 0,$$

tzv. kubické Pisotove jednotky. Ukážeme, že v prípade (1) narozdiel od prípadu (2) má množina $\mathrm{Fin}(-\beta)$ čísel štruktúru okruhu. Pre ostatné kubické Pisotove jednotky vyslovíme hypotézy o množine $\mathrm{Fin}(-\beta)$.

Novinky z Liège

Jan Legerský (FJFI) Pátek 09.50, Pátek 10.50

V příspěvku shrneme několik nových výsledků z konference Workshop on Automatic Sequences v Liège.

Aritmetické diskrétní roviny

Zuzana Masáková (FJFI) Úterý 09.00

Pojem „arithmetic discrete plane“ se prvně objevil v souvislosti s digitalizací obrazu. Nás bude zajímat v kontextu aperiodických dláždění pomocí cut-and-project metody, kdy do vhodně orientované roviny projektujeme body třírozměrné mřížky v malé vzdálenosti od dané roviny. Podáme přehled známých výsledků o těchto objektech, zejména o lokálních konfiguracích a o substitučních pravidlech odvozených pomocí vícerozměrných řetězových zlomků.

Důkaz jednoho lemmatu Littlewooda a Offorda

Jan Mazáč, Daniel Štěrba (FJFI) Úterý 10.50

V roce 1943 Littlewood a Offord dokázali následující tvrzení: Jsou zadaná komplexní čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, všechny s absolutní hodnou větší než jedna. Uvažujeme jejich lineární kombinace, ale koeficienty bereme pouze z množiny $\{1, -1\}$. Ze všech 2^n možných takových kombinací padne do kruhu o poloměru 1 maximálně $c\frac{2^n}{\sqrt{n}} \log n$ kombinací, kde c je konstanta nezávislá na n.

V přednášce dokážeme Kleitmanův výsledek z roku 1970. Ten mez v jejich tvrzení vylepšuje a celé tvrzení zobecňuje pro n-tici vektorů z libovolně dimenzionálního prostoru $\mathbb{R}^d$.

Faktorová komplexita pevných bodů substitucí

Kateřina Medková (FJFI) Středa 09.00

Faktorová komplexita slova u je definována jako funkce $p_u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která každému přirozenému číslu n přiřazuje počet různých faktorů délky n vyskytujících se ve slově u. Je to hojně zkoumaná charakteristika nekonečných slov, která v jistém smyslu odráží jejich složitost. Zaměříme se pouze na nekonečná slova, která můžeme získat jako pevné body nějakých substitucí. Pro ty je znám překvapivý výsledek — v roce 1984 J.-J. Pansiot dokázal, že faktorová komplexita takových slov má pouze pět možných variant asymptotického chování. Přiblížíme si důkaz tohoto tvrzení. Zmíníme důležité poznatky, které důkaz využívá, a ukážeme si některé zajímavé kroky. Přitom nebudeme reprodukovat původní Pansiotův důkaz, ale ukážeme průhlednější postup, který navrhli J. Cassaige a F. Nicolas.

Přepisování číselných řetězců a jeho aplikace v teorii čísel

David Oppl (FIT) Pondělí 12.05

Tato práce se věnuje studiu tzv. přepisovacích pravidel, speciálních zobrazení na množině nekonečných slov. Pojednává o poziční reprezenzaci čísel a ukazuje, jak lze přepisovací pravidla použít při normalizaci, ověřování přípustnosti a sčítání reprezentací čísel. Dále se posluchač seznámí s tzv. DUG vlastností číselných těles a její souvislostí s přepisovacími pravidly.

Substitutivity and generation of words coding exchange of three intervals

Kateřina Pastirčáková (FJFI) Úterý 12.10

We focus on words coding exchange of 2 intervals with permutation (21) and words coding exchange of 3 intervals with permutations (321), (312) and (231). We study their substitutivity, focusing on the minimality of the alphabet needed for generating iet words. Our method is based on the connection of iet words with cut-and-project sets. We give a detailed characterization of number of letters needed for the substitution generating iet words. We describe at which choice of parameters we can generate 2iet words over 2 or 3 letter alphabet, and 3iet words over 3, 4 or 5 letter alphabet.

Charakteristiky Pisotových čísel

Edita Pelantová (FJFI) Čtvrtek 11.35

Pisotovo číslo je algebraické celé číslo větší než jedna, jehož ostatní sdružené kořeny mají absolutní hodnotu menší než jedna. Za předpokladu, že α je algebraické číslo, platí dobře známé tvrzení: α je Pisotovo číslo právě tehdy, když pro nějaké $\xi \neq 0$ konverguje posloupnost $\|\xi\alpha^n\|$ k nule. Zde $\|x\|$ značí vzálenost x od nejbližšího celého čísla. Téměř 80 let zůstává nevyřešená otázka, zda předchozí věta je platná bez předpokladu algebraičnosti čísla α. V našem příspěvku představíme důkaz jiné charakteristiky Pisotova čísla. Ta nepředpokládá algebraičnost α. Tvrzení bylo dokázáno samotným Pisotem v roce 1937. Zní: Reálné číslo $\alpha > 1$ ie Pisotovo právě tehdy, když pro nějaké $\xi \neq 0$ konverguje řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi\alpha^n\|^2$.

Kombinatorika palindromů a antipalindromů

Štěpán Starosta (FIT) Pátek 11.15

Příkladnou metodou uvedeme nedávné výsledky z článku Guo, Shallit, Shur: On the Combinatorics of Palindromes and Antipalindromes.

Vzdálenosti mezi sousedy v cut-and-project množinách

Helena Svobodová (FJFI) Úterý 09.50

V příspěvku seznámíme posluchače s naším výzkumem vzdáleností mezi sousedními body v cut-and-project množinách vzniklých projekcí z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}$. Konkrétně popíšeme, jak lze nalézt všechny tyto vzdálenosti v C&P množině se zadanou bází a okny, a ukážeme výsledky získané programem, který tímto způsobem vzdálenosti počítá.

Introduction to lattices

Tomáš Vávra (FJFI) Úterý 11.25

A lattice in $\mathbb{R}^n$ is formed by integer linear combinations of linearly independent vectors of $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\Lambda = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \ :\ a_i \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Lattices have several applications for example in number theory or cryptography and we will demonstrate their usefulness on solving various problems.

Privilegovaná slova a uzávěry

TEREZA VELKÁ (FJFI) Středa 10.55

Nejprve uvedeme některé vlastnosti bispeciálů, palindromů a návratových slov, které budeme využívat při vyšetřování privilegované komplexity (zavedena Peltomakim, 2013). Připomeneme konstrukci nekonečných slov pomocí takzvaných palindromických a E-palindromických uzávěrů. Nově popíšeme privilegovanou komplexitu periodických slov tvořených palindromickými uzávěry a algoritmus na hledání privilegované komplexity slova získaného pomocí E-palindromických uzávěrů s direktivní posloupností $\Delta = (01)^\omega$.

Binární projekce Arnouxových-Rauzyových slov

VOJTĚCH VESELÝ (FJFI) Středa 09.45

k-ární Arnouxova-Rauzyova slova jsou zobecněním Sturmovských slov na vícepísmenné abecedy. Nekonečné slovo $\boldsymbol{u}$ nad k-písmennou abecedou $\mathcal{A}$ je Arnouxovo-Rauzyovo právě tehdy, když jeho jazyk obsahuje právě jeden levý speciál každé délky s k levými rozšířeními a je uzavřené na reverzi. Zkoumáme vlastnosti obrazů těchto slov při binárních projekcích $\pi\colon \mathcal{A} \to \{a, b\}$ takových, že π je „písmeno na písmeno“, tedy obrazy písmen jsou délky 1.

Ukážeme, že od určitého n_0 je v obrazech při binární projekci π libovolného Arnouxova-Rauzyova slova $\boldsymbol{u}$ právě k levých speciálů a pro $n \geq n_0$ je faktorová komplexita tvaru $\mathcal{C}_{\pi(\boldsymbol{u})}(n) = (k-1)n + q$ pro nějaké číslo q. Protože pro $\boldsymbol{u}$ platí $\mathcal{C}_{\boldsymbol{u}}(n) = (k-1)n + 1$, je komplexita jeho binárních projekcí, co se rychlosti růstu týká, maximální možná. Dále popíšeme všechny bispeciální faktory délky větší než n_0, ukážeme, že jejich bilaterální řád je roven nule a najdeme spodní hranici pro počet návratových slov k faktorům slova $\pi(\boldsymbol{u})$ délky větší než n_0.