

## Aplikovaná algebra a analýza - navazující magisterský studijní program - součásti SZZ a jejich obsah

Státní závěrečné zkoušky zahrnují:

- obhajobu diplomové práce
- prezentaci písemných posudků vedoucího práce a alespoň jednoho oponenta s návrhy klasifikace práce
- ústní část zkoušky ze dvou předmětů obecného základu a z jednoho předmětu odborného zaměření (s případnou možností výběru).

Pro studijní program Aplikovaná algebra a analýza jsou předměty obecného základu:

### **Funkcionální analýza**

#### **Algebra**

a předměty odborného zaměření studijního programu s možností výběru:

#### **Parciální diferenciální rovnice**

#### **Pokročilé pravděpodobnostní metody**

**Předmět Funkcionální analýza státních závěrečných zkoušek má tyto okruhy otázek:**

1. Tenzorový součin vektorových prostorů a speciálně Hilbertových prostorů, tenzorový součin lineárních zobrazení.
2. Kompaktní a úplně spojitě operátory na Banachových a Hilbertových prostorech, prostor kompaktních operátorů.
3. Spektrální vlastnosti kompaktních operátorů, Fredholmovy věty.
4. Ideály kompaktních operátorů na Hilbertových prostorech.
5. Operátory se stopou v Hilbertových prostorech, vztah k Hilbertovým-Schmidtovým operátorům.
6. Sdružené operátory k neomezeným operátorům v Hilbertových prostorech, samosdružená rozšíření symetrických operátorů.
7. Spektrální věta pro omezené samosdružené operátory, funkcionální počet.
8. Spektrální věta pro neomezené samosdružené operátory.
9. Kvadratické formy a věta o reprezentaci, Friedrichsovo rozšíření.
10. Jednoparametrické grupy unitárních operátorů, Stoneova věta.

Obsah tohoto předmětu státních závěrečných zkoušek je dán povinnými předměty studijního programu:

01FA3                      Funkcionální analýza 3

**Předmět Algebra státních závěrečných zkoušek má tyto okruhy otázek:**

1. Binární relace, ekvivalence, uspořádání, zavedení přirozených čísel pomocí Peanových axiomů, princip definice rekurzí.
2. Ekvivalence a subvalence množin, Cantorova-Bernsteinova věta, axiom výběru a ekvivalentní výroky, kardinální a ordinální čísla.
3. Pologrupa, monoid, grupa, Lagrangeova věta, normální podgrupy, věty o izomorfismu, cyklické grupy, konečně generované abelovské grupy. Reprezentace konečných a kompaktních grup, Schurovo lemma, charaktery.
4. Okruh, obor integrity, těleso, podílové těleso, věty o izomorfismu, zobecněná čínská věta o zbytcích, maximální ideál.
5. Dělitelnost v oborech integrity, obor hlavních ideálů, ireducibilní prvek, prvočinitel, Bézoutova identita, věta o jednoznačném rozkladu.
6. Kořeny polynomů, ireducibilní polynom, prvotěleso, rozšíření tělesa, algebraický prvek, minimální polynom prvku, rozkladové nadtěleso polynomu, klasifikace konečných těles. Metody pro faktorizaci polynomů.
7. Okruhy polynomů několika proměnných, symetrické polynomy, Gröbnerovy báze, Buchbergerův algoritmus, radikály.
8. Hilbertova věta o nulách, vztahy okruhů a variet, Krullova dimenze.
9. Galoisova teorie, Galoisovo rozšíření, Galoisova grupa a korespondence.
10. Klasifikace ireducibilních reprezentací jednoduchých Lieových algeber.

Obsah tohoto předmětu státních závěrečných zkoušek je dán povinnými předměty studijního programu:

01KOMA                      Komutativní algebra  
01TR1-2                      Teorie reprezentací 1, 2

**Předmět Parciální diferenciální rovnice státních závěrečných zkoušek má tyto okruhy otázek:**

1. Okrajové úlohy pro diferenciální rovnice a extrém funkcionálu, Eulerovy rovnice.
2. Podmínky pro extrém funkcionálu, konvexnost funkcionálu, monotónní zobrazení.
3. Minimalizace kvadratického funkcionálu, metoda zúplnění, existence minima kvadratického funkcionálu a zobecněného řešení diferenciální rovnice.

4. Harmonické funkce – věta o střední hodnotě, princip maxima, Liouvilleův teorém, řešení Poissonovy rovnice (jednoznačnost, Greenova funkce).
5. Silný a slabý princip maxima pro eliptické operátory, Hopfovo lemma, jednoznačnost klasického řešení eliptické rovnice.
6. Sobolevovy prostory – slabá derivace, aproximace hladkými funkcemi, věta o stopě a prodloužení, duální prostory, Sobolevovy nerovnosti.
7. Slabá formulace eliptického problému – existence a jednoznačnost slabého řešení (Lax-Milgram), regularita slabého řešení.
8. Kompaktní vnoření Sobolevových prostorů, Fredholmova alternativa pro slabou formulaci eliptického problému, spektrum samosdruženého eliptického operátoru na omezené oblasti, princip minimaxu.
9. Exponenciála matice a operátoru – pro omezené operátory a možná rozšíření na neomezené operátory.
10. Spektrum a stabilita v parciálních diferenciálních rovnicích – souvislost spektra a stability pro semigrupy.

Obsah tohoto předmětu státních závěrečných zkoušek je dán povinnými předměty studijního programu:

01VAM	Variační metody
01PDR	Moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic

**Předmět Pokročilé pravděpodobnostní metody státních závěrečných zkoušek má tyto okruhy otázek:**

1. Náhodná veličina. Distribuční funkce, charakteristická funkce, základní vlastnosti a vztahy s distribučními funkcemi.
2. Bayesův vzorec a jeho využití. Slabý zákon velkých čísel, konvergence dle pravděpodobnosti. Čebyševova nerovnost. Bernoulliova a Čebyševova limitní věta. Silný zákon velkých čísel a konvergence ve smyslu skoro jistě.
3. Centrální limitní teorém. Moivre-Laplaceova, Feller-Lindebergova podmínka. Ljapunovova věta.
4. Pojem statistického odhadu, bodové a intervalové odhady. Rao-Cramérova nerovnost, konzistence, maximálně věrohodné funkce.
5. Pojem statistické hypotézy, Neyman-Pearsonovo lemma, chyby 1. a 2. druhu, test poměrem věrohodnosti.
6. Definice náhodného procesu, Kolmogorovova věta, konzistentní systém konečně-rozměrných rozdělení.
7. Vlastnosti trajektorií, pojem derivace a integrálů od náhodného procesu, stochastická míra a náhodný integrál, Wienerův proces.
8. Kovarianční funkce procesu a Karhunenova věta, slabě stacionární procesy a jejich spektrální rozklad. Bochnerova věta, Herglotzovo lemma.
9. Predikce procesů a posloupností, lineární singularita a regularita. Woldův rozklad. Ergodické věty a zákon velkých čísel.
10. Náhodné matice, jejich třídy. Laymanova klasifikace. Bernsteinova nerovnost, Golden-Thompsonova nerovnost, Liebova věta.

Obsah tohoto předmětu státních závěrečných zkoušek je dán povinnými předměty studijního programu:

01NAH	Teorie náhodných procesů
01TNM	Teorie náhodných matic