Variační metody
- povinný předmět SZZ NMS Matematické inženýrství

Seznam otázek

1. Odvození Eulerovy rovnice
2. Nutné podmínky existence extrému funkcionálu
3. Postačující podmínky existence extrému funkcionálu
4. Vztah konvexnosti a monotonie k extrému funkcionálu
5. Minimum kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem
6. Metoda zúplnění definičního oboru kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem
7. Existence minima kvadratického funkcionálu a zobecněného řešení operátorové rovnice
8. Slabé řešení okrajové úlohy pro eliptickou parciální diferenciální rovnici
9. Sobolevovy prostory
10. Laxova-Milgramova věta
11. Existence slabého řešení okrajové úlohy pro eliptické parciální diferenciální rovnice

Otázka č. 1:
Odvození Eulerovy rovnice

Odvoďte Eulerovu rovnici pro funkcionál tvaru

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b f(x, y, y')\mathrm{d}x$$

s definičním oborem $D_{\mathcal{F}} = \{y \in C^{(2)}(\langle a, b\rangle) \mid y(a) = \gamma_1,\ y(b) = \gamma_2\}$

Otázka č. 2:
Nutné podmínky existence extrému funkcionálu

a) Definujte lokální extrém

b) Uveďte nutné podmínky existence extrému funkcionálu

Otázka č. 3
Postačující podmínky existence extrému funkcionálu

a) Definujte lokální extrém

b) Uveďte postačující podmínky existence extrému funkcionálu

Otázka č. 4:
Vztah konvexnosti a monotonie k extrému funkcionálu

a) Popište vztah konvexnosti k extrému funkcionálu

b) Popište vztah monotonie k extrému funkcionálu

c) Uveďte podstatné kroky vedoucí k důkazu těchto vztahů

Otázka č. 5:
Minimum kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem

a) Vymezte podobu kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem

b) Popište vztak tohoto minima k řešení operátorové rovnice $\mathbf{A}u = f$

Otázka č. 6:
Metoda zúplnění definičního oboru kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem

a) Vymezte podobu kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem

b) Popište stručně kroky zúplnění definičního oboru

Otázka č. 7:
Existence minima kvadratického funkcionálu a zobecněného řešení operátorové rovnice

a) Vymezte podobu kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem

b) Vyslovte tvrzení o existenci minima kvadratického funkcionálu

c) Definujte zobecněné řešení operátorové rovnice

Otázka č. 8:
Slabé řešení okrajové úlohy pro eliptickou parciální diferenciální rovnici
Pro úlohu

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(\lambda(x)\nabla u) + q(x)u &= f(x) \text{ v } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

kde $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí

a) odvoďte slabou rovnost

b) definujte slabé řešení

Otázka č. 9:
Sobolevovy prostory

a) Konstrukce prostorů $W_2^{(k)}(\Omega)$

b) Základní vlastnosti těchto prostorů

Otázka č. 10:
Laxova-Milgramova věta

a) Znění věty

b) Základní kroky důkazu

Otázka č. 11:
Existence slabého řešení okrajové úlohy pro eliptické parciální diferenciální rovnice
Pro úlohu

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(\lambda(x)\nabla u) + q(x)u &= f(x) \text{ v } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

kde $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí

a) shrňte její slabou formulaci

b) zajistěte splnění předpokladů pro použití Laxovy - Milgramovy věty

Funkcionální analýza

Předmět SZZ NMS Matematické inženýrství

Seznam otázek
zkoušející Prof. Ing. Pavel Šťovíček, DrSc.

Otázka č. 1:
Tenzorový součin - konstrukce tenzorového součinu vektorových prostorů, věta o univerzalitě tenzorového součinu a důsledky, tenzorový součin Hilbertových prostorů.

Otázka č. 2:
Kompaktní operátory na Banachových - kompaktní a úplně spojité operátory, vztah mezi nimi, prostor kompaktních operátorů a jeho vlastnosti.

Otázka č. 3:
Fredholmovy věty, spektrálních vlastnosti kompaktních operátorů.

Otázka č. 4:
Kompaktní operátory v Hilbertových prostorech, samosdružené kompaktní operátory, Hilbertova- Schmidtova věta.

Otázka č. 5:
Ideály kompaktních operátorů - polární rozklad omezeného operátoru na Hilbertově prostoru, singulární hodnoty kompaktního operátoru na H, prostory I_p pro $p >= 1$, speciální případy $p = 2, p = 1$.

Otázka č. 6:
Sdružené operátory k neomezeným operátorům v Hilbertových prostorech, symetrické operátory, samosdružená rozšíření symetrických operátorů.

Numerická matematika - volitelný předmět SZZ NMS Matematické inženýrství

Přehled otázek

1. Použití metody konečných prvků pro danou eliptickou úlohu
2. Galerkinova metoda pro přibližné řešení variační úlohy
3. Definice a nejběžnější druhy konečných prvků
4. Lokální a globální interpolant
5. Vztahy ekvivalence mezi konečnými prvky
6. Vystředované Taylorovy polynomy
7. Tvar zbytku ve vystředovaném Taylorově rozvoji
8. Bramble-Hilbertova věta
9. Lokální odhad interpolační chyby
10. Globální odhad interpolační chyby
11. Věty o citlivosti spekter matic
12. Zpětná analýza problému vlastních čísel
13. Citlivost a zpětná stabilita řešení soustav lineárních algebraických rovnic
14. Konstrukce QR rozkladů
15. Krylovovské metody
16. Lanczosův algoritmus
17. Metoda sdružených gradientů
18. Metody pro nesymetrické matice

Otázka č. 1:
Použití metody konečných prvků pro eliptickou úlohu
Pro úlohu

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda(x)\nabla u) + q(x)u &= f(x) \text{ v } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

kde $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$

a) popište princip metody konečných prvků

b) použijte lineární Lagrangeův prvek

c) komentujte odhad chyby metody

Otázka č. 2:
Galerkinova metoda pro přibližné řešení variační úlohy

a) Princip metody

b) Vztah přibližného a přesného řešení variační úlohy

Otázka č. 3:
Definice a nejběžnější druhy konečných prvků

a) Definujte pojem konečného prvku

b) Popište nejběžnější druhy konečných prvků

Otázka č. 4:
Lokální a globální interpolant

a) Definujte lokální interpolant

b) Definujte globální interpolant

c) Uveďte souhrnně jejich základní vlastnosti

Otázka č. 5:
Vztahy ekvivalence mezi konečnými prvky

a) Definujte tyto vztahy

b) Uveďte jejich základní vlastnosti

Otázka č. 6:
Vystředované Taylorovy polynomy

a) Definujte vystředovaný Taylorův polynom

b) Uveďte jeho základní vlastnosti

Otázka č. 7:
Tvar zbytku ve vystředovaném Taylorově rozvoji

a) Uveďte tvar tohoto zbytku

b) Uveďte jeho základní vlastnosti

Otázka č. 8:
Bramble-Hilbertova věta

a) Znění věty

b) Základní kroky důkazu

Otázka č. 9:
Lokální odhad interpolační chyby

a) Uveďte tvar odhadu

b) Komentujte základní kroky jeho důkazu

Otázka č. 10:
Globální odhad interpolační chyby

a) Uveďte tvar odhadu

b) Komentujte základní kroky jeho důkazu

Otázka č. 11:
Věty o citlivosti spekter matic

a) Měření vzdálenosti spekter

b) Věty o citlivosti spekter obecných matic

c) Věty o citlivosti spekter speciálních tříd matic

Otázka č. 12
Zpětná analýza problému vlastních čísel

a) Co to je zpětná analýza a k čemu slouží?

b) Zpětná analýza jednoduchého vlastního čísla

c) Použití zpětné analýzy k odhadu chyby aproximace jednoduchého vlastního čísla

Otázka č. 13:
Citlivost a zpětná stabilita řešení soustav lineárních algebraických rovnic

a) Věty o citlivosti řešení soustav lineárních algebraických rovnic

b) Zpětná analýza řešení soustav lineárních algebraických rovnic (Rigalova - Gachesova věta)

c) Využití teorie citlivosti a zpětné analýzy k odhadu chyby aproximace

Otázka č. 14:
Konstrukce QR rozkladů

a) Formulace věty o QR rozkladu

b) Givensova metoda konstrukce QR rozkladu

c) Householderova metoda konstrukce QR rozkladu

d) Porovnání obou metod, aplikace v problému nejmenších čtverců

Otázka č. 15:
Krylovovské metody

a) Definice $K_n(A, r_0)$, Arnoldiho algoritmus a jeho kompaktní schéma

b) Metoda GMRES - definice metody, základní vlastnosti a problémy při výpočtu

Otázka č. 16:
Lanczosův algoritmus

a) Odvození z Arnoldiho algoritmu

b) Základní vlastnosti Lanczosova algoritmu, porovnání s Arnoldiho algoritmem

c) Aplikace pro aproximaci spektra symetrické matice

Otázka č. 17:
Metoda sdružených gradientů

a) Definice metody a předpoklady potřebné k jejímu odvození

b) Základní vlastnosti metody sdružených gradientů

Otázka č. 18:
Metody pro nesymetrické matice

a) Dvoustranný Lanczosův algoritmus - kompaktní schéma

b) Aplikace v metodách bi-konjugovaných gradientů a QMR

c) Vlastnosti metod bi-konjugovaných gradientů a QMR

Otázky SZZ Matematická optimalizace

1. Lagrangeova dualita: primární a duální optimalizační úloha, slabá a silná dualita.
2. Nutné a postačující podmínky optimality a postačující podmínky existence globálního minima pro úlohy bez vazeb.
3. Podmínky optimality pro úlohy s vazbami: sedlový bod Lagrangeova funkce a jeho vztah k silné dualitě.
4. Podmínky optimality pro úlohy s vazbami: lemma o přípustných směrech, nutné podmínky Fritze Johna.
5. Podmínky optimality pro úlohy s vazbami: podmínky Karushe, Kuhna a Tuckera (nutné a postačující), Slaterova podmínka.
6. Postačující podmínky existence globálního minima pro úlohy s vazbami.
7. Gradientní metody pro úlohy bez vazeb.
8. Kvazinewtonovské metody pro úlohy bez vazeb.
9. Penalizační metoda pro úlohy s vazbami.
10. Bariérová metoda pro úlohy s vazbami.
11. Metoda sečných nadrovin pro úlohy s vazbami.
12. Polynomiální a lineární regrese: metoda nejmenších čtverců, polynomiální interpolace a regrese, význam minimalizace L_1 a L_2 normy, Tichonova regularizace, metoda největšího spádu.
13. Klasifikace: binární klasifikace, metoda nejmenších čtverců, SVM, perceptron, logistická regrese.
14. Neuronové sítě a zpětná propagace: plně propojené neuronové sítě, nelinearity v neuronových sítích, učení sítí pomocí zpětné propagace, konvoluční neuronové sítě.
15. Adjungované obyčejné diferenciální rovnice: odvození adjungované obyčejné diferenciální rovnice, fitování parametrů modelu.
16. Adjungované paricální diferenciální rovnice: odvození adjungované parciální diferenciální rovnice, fitování parametrů modelu, řešení inverzní úlohy a řízení pomocí okrajových podmínek.

Teorie grafů

zkoušející Ing. Petr Ambrož, Ph.D.

1. Stromy a kostry

a) Definice lesa a stromu, základní vlastnosti stromů
b) Úloha minimální kostry, Kruskalův algoritmus
c) Počet koster grafu (Matrix-Tree Theorem)

2. Vrcholová a hranová souvislost

a) Definice vrcholové a hranové souvislosti grafu
b) Mengerova věta a její verze
c) Vztah *k*-souvislosti a hledání cyklu obsahující danou množinu *k* vrcholů

3. Maximální párování

a) Definice maximálního párování v grafu
b) Rozhodování maximality párování
c) Maximální párování a minimální vrcholové pokrytí

4. Perfektní párování

a) Definice perfektního párování v grafu
b) Existence perfektního párování v bipartitním grafu
c) Existence perfektního párování v obecných grafech

5. Eulerovské a hamiltonovské grafy

a) Definice eulerovského a hamiltonovského grafu
b) Eulerovy věty (pro cykly a sledy)
c) Postačující podmínky pro existenci hamiltonovské kružnice

6. Hranová barevnost

a) Definice hranové barevnosti
b) Hranová barevnost a párování v grafu, Kőnigova věta
c) Optimální obarvení, Vizingova věta

7. Vrcholová barevnost grafu

a) Definice vrcholové barevnosti

b) Odhady vrcholové barevnosti grafu
c) Kritické grafy, Brooksova věta

8. Planární grafy

a) Definice planárního grafu, planarita na různých površích
b) Kuratowského věta
c) Vrcholová barevnost planárního grafu

9. Spektrum adjacenční matice grafu

a) Definice adjacenční matice, základní vlastnosti jejího spektra
b) Odhady maximálního vlastního čísla
c) Spektrum regulárního a bipartitního grafu

10. Toky v sítích

a) Definice sítě, maximálního toku a řezu v síti
b) Rozhodování maximality toku (Fordova–Fulkersonova věta)
c) Aplikace booleovských toků v teorii grafů