Předmět Algebra státních závěrečných zkoušek má tyto okruhy otázek:

1. Symetrická grupa, Cayleyova věta. Reprezentace konečné grupy, definice, ireducibilita, ekvivalence. Maschkeho věta.
2. Schurovo lemma pro reprezentace konečných grup, charaktery reprezentací konečných grup, třídy sdružených prvků, Schurova relace ortogonality, první relace ortogonality, kritérium ireducibility. Regulární reprezentace, druhá relace ortogonality, tabulky charakterů.
3. Reprezentace přímého součinu konečných grup a jeho ireducibilita. Tenzorový součin reprezentací konečné grupy a jeho ireducibilita, Clebsch-Jordanův rozklad.
4. Indukovaná reprezentace konečných grup, její charakter. Frobeniova reciprocita. Ireducibilita indukované reprezentace – Mackeyho kritérium.
5. Charakteristika okruhu, prvotěleso, rozšíření těles. Algebraický prvek, minimální polynom prvku, kořenové a rozkladové nadtěleso polynomu, algebraický uzávěr. Klasifikace konečných těles.
6. Metody pro faktorizaci polynomů: bezčtvercová faktorizace, Berlekampův algoritmus, Henselovo zdvihání, Zassenhausův algoritmus. Faktorizace polynomů několika proměnných.
7. Okruhy polynomů několika proměnných, noetherovské okruhy. Symetrické polynomy. Problém náležení do ideálu. Uspořádání, přepisování, Gröbnerova báze, Buchbergerův algoritmus.
8. Radikál, vztahy okruhů a variet. Hilbertova věta o nulách. Řešení soustav algebraických rovnic. Krullova dimenze.
9. Galoisova teorie, Galoisovo rozšíření, Galoisova grupa a korespondence.
10. Lieova algebra. Prostá, poloprostá, nilpotentní, řešitelná Lieova algebra. Cartanova podalgebra. Kořenový systém. Dynkinovy diagramy. Klasifikace prostých komplexních Lieových algeber. Klasifikace jejich ireducibilních reprezentací.

Obsah tohoto předmětu státních závěrečných zkoušek je dán povinnými předměty studijního programu:

01KOMA	Komutativní algebra
01TR1-2	Teorie reprezentací 1, 2

Funkcionální analýza

Předmět SZZ NMS Matematické inženýrství

Seznam otázek
zkoušející Prof. Ing. Pavel Šťovíček, DrSc.

Otázka č. 1:
Tenzorový součin - konstrukce tenzorového součinu vektorových prostorů, věta o univerzalitě tenzorového součinu a důsledky, tenzorový součin Hilbertových prostorů.

Otázka č. 2:
Kompaktní operátory na Banachových - kompaktní a úplně spojité operátory, vztah mezi nimi, prostor kompaktních operátorů a jeho vlastnosti.

Otázka č. 3:
Fredholmovy věty, spektrálních vlastnosti kompaktních operátorů.

Otázka č. 4:
Kompaktní operátory v Hilbertových prostorech, samosdružené kompaktní operátory, Hilbertova- Schmidtova věta.

Otázka č. 5:
Ideály kompaktních operátorů - polární rozklad omezeného operátoru na Hilbertově prostoru, singulární hodnoty kompaktního operátoru na H, prostory I_p pro $p >= 1$, speciální případy $p = 2, p = 1$.

Otázka č. 6:
Sdružené operátory k neomezeným operátorům v Hilbertových prostorech, symetrické operátory, samosdružená rozšíření symetrických operátorů.

Pokročilé pravděpodobnostní metody

volitelný předmět SZZ NMS Aplikace algebry a analýzy

Seznam otázek
zkoušející Ing. Václav Kůs, Ph.D.

Otázka č. 1:
Náhodná veličina. Distribuční funkce, charakteristická funkce, základní vlastnosti a vztahy s distribučními funkcemi.

a) Diskrétní a spojitá náhodná veličina, frekvenční funkce a hustota pravděpodobnosti, Radon-Nykodimova věta

b) Distribuční funkce, definice, vlastnosti, marginální distribuční funkce, nezávislost náhodných veličin, příklady diskrétních a spojitých rozdělení

c) Charakteristická funkce, její vlastnosti, momenty náhodných veličin, Lévyho věta

Otázka č. 2:
Bayesův vzorec a jeho využití. Slabý zákon velkých čísel, konvergence dle pravděpodobnosti. Čebyševova nerovnost. Bernoulliova a Čebyševova limitní věta. Silný zákon velkých čísel a konvergence ve smyslu skoro jistě.

a) Definice podmíněné pravděpodobnosti, věta o úplném rozkladu, Bayesova věta, použití

b) Konvergence podle pravděpodobnosti a skoro jistě, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy

c) Čebyševova nerovnost, Bernoulliova a Čebyševova limitní věta. Slabý a silný zákon velkých čísel

Otázka č. 3:
Centrální limitní teorém. Moivre-Laplaceova, Feller-Lindebergova podmínka. Ljapunovova věta.

a) Definice slabé konvergence (v distribuci), její vlastnosti a vztahy s ostatními konvergencemi, Slutského perturbační teorém a lemma

b) Asymptotická normalita, definice, využití

c) Centrální limitní teorémy: Moivre-Laplace, Lindeberg-Lévy, Lindeberg-Feller, Ljapunov.

Otázka č. 4:
Pojem statistického odhadu, bodové a intervalové odhady. Rao-Cramérova nerovnost, konzistence, maximálně věrohodné funkce.

a) Statistické bodové odhady, jejich vlastnosti a kritéria optimality (nestrannost, eficience, asymptotická normalita)

b) Definice nejlepšího nestranného odhadu, Rao-Cramérova nerovnost, regulární systém hustot, maximálně věrohodné odhady a jejich ssymptotické vlastnosti

c) Definice intervalů spolehlivosti, způsoby jejich konstrukce a ukázka použití pro normální rozdělení

Otázka č. 5:
Pojem statistické hypotézy, Neyman-Pearsonovo lemma, chyby 1. a 2. druhu, test poměrem věrohodnosti.

a) Základní pojmy testování hypotéz: nulová a alternativní hypotéza, chyba 1. a 2. druhu, kritická oblast/funkce testu, hladina významnosti, p-hodnota, síla testu

b) Neyman-Pearsonovo lemma, systémy s monotonním poměrem věrohodnosti

c) Test poměrem věrohodnosti, jeho asymptotika, použití, ukázka pro normální rozdělení

Pokročilé pravděpodobnostní metody

volitelný předmět SZZ NMS Aplikovaná algebra a analýza

Seznam otázek
zkoušející Doc. RNDr. Jan Vybíral, Ph.D.

Otázka č. 6:
Definice náhodného procesu, Kolmogorovova věta, konzistentní systém konečněrozměrných rozdělení.

a) Uveďte definici náhodného procesu a několik důležitých příkladů

b) Definujte konzistentní systém konečněrozměrných rozdělení, Kolmogorovova existenční věta

Otázka č. 7:
Vlastnosti trajektorií, pojem derivace a integrálů od náhodného procesu, stochastická míra a náhodný integrál, Wienerův proces

a) Limita, spojitost a derivace náhodného procesu

b) Proces s ortogonálními přírůstky, přírůstková funkce, definice $\int_0^t f(s)dW_s$

c) Definujte Wienerův proces a uveďte základní vlastnosti (Markovská vlastnost, Gaussovský proces, autokovarianční funkce, vlastnosti trajektorií)

Otázka č. 8:
Kovarianční funkce procesu a Karhunenova věta, slabě stacionární procesy a jejich spektrální rozklad. Bochnerova věta, Herglotzovo lemma

a) Bochnerova věta, Herglotzovo lemma, slabě stacionární procesy

b) Karhunen-Loèvova věta a spektrální rozklad pro Wienerův proces

Otázka č. 9:
Predikce procesů a posloupností, lineární singularita a regularita. Woldův rozklad, ergodické věty a zákon velkých čísel

a) Časové řady, lineární proces, proces klouzavých součtů, autoregresní proces

b) Definujte $ARMA(p,q)$, Woldův rozklad

Otázka č. 10:
Náhodné matice, jejich třídy, Laymanova klasifikace, Bernsteinova nerovnost, Golden-Thompsonova nerovnost, Liebova věta

a) Příklady náhodných matic (nezávislé prvky, rotačně invariantní, GOE)

b) Bernsteinova nerovnost pro nezávislé matice (náznak důkazu), Golden-Thmopsonova nerovnost a Liebova věta (bez důkazu)

Parciální diferenciální rovnice

- volitelný předmět SZZ NMS Aplikovaná algebra a analýza

Otázka č. 1
Eulerovy-Lagrangeovy rovnice
Odvoďte Eulerovy-Lagrangeovy rovnice pro funkcionál

$$I[w] := \int_U L(Dw(x), w(x), x)\mathrm{d}x,$$

kde $w = g$ na ∂U.

Otázka č. 2
Nutná podmínka pro existenci minimizeru funkcionálu
V hlavních krocích odvoďte nutnou podmínku pro existenci minimizeru funkcionálu I.

Otázka č. 3
Postačující podmínka pro existenci minimizeru funkcionálu
Vyslovte postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost minimizeru funkcionálu I. Pokuste se je alespoň heuristicky obhájit.

Otázka č. 4
Věta o střední hodnotě
Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě pro harmonické funkce.

Otázka č. 5
Aplikace věty o střední hodnotě
Pohovořte o důsledcích/aplikacích věty o střední hodnotě pro harmonické funkce: princip maxima, Liouvillův teorém, jednoznačnost řešení Poissonovy rovnice.

Otázka č. 6
Princip maxima pro eliptické operátory
Vyslovte slabý princip maxima pro eliptické operátory a naznačte jeho důkaz.

Otázka č. 7
Hopfovo lemma
Vyslovte Hopfovo lemma pro eliptické operátory a vysvětlete, jak se z něj odvodí silný princip maxima.

Otázka č. 8
Slabá derivace a Sobolevovy prostory
Definujte pojem slabé derivace a zaveďte Sobolevovy prostory $W^{k,p}(U)$ a $W_0^{k,p}(U)$. Ukažte, že se jedná o dobře zavedené pojmy. Diskutujte základní vlastnosti Sobolevových prostorů (úplnost, separabilita, reflexivita).

Otázka č. 9
Sobolevovy prostory-aproximace hladkými funkcemi
Vyslovte věty o lokální aproximaci a aproximaci až k hranici (stačí pro hvězdicovitou oblast). Diskutujte klíčové kroky příslušných důkazů.

Otázka č. 10
Sobolevovy prostory-věta o stopě
Vyslovte větu o stopě pro funkce z $W^{1,p}(U)$ a představte klíčové kroky jejího důkazu.

Otázka č. 11
Sobolevovy nerovnosti
Rozšiřte Gagliardovu-Nirenbergerovu-Sobolevovu nerovnost na $W_0^{1,p}(U)$, speciálně diskutujte Poincarého nerovnost. Vyslovte Sobolevovu nerovnost pro $W^{1,p}(U)$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, s $n < p$.

Otázka č. 12
Slabá formulace eliptického problému
Odvoďte slabou formulaci pro eliptickou rovnici s Dirichletovou hraniční podmínkou a popište, jak se odvodí existence a jednoznačnost slabého řešení (Lax-Milgramova věta a energetický odhad).

Otázka č. 13
Lax-Milgramova věta
Vyslovte a dokažte Lax-Milgramovu větu.

Otázka č. 14
Regularita slabých řešení eliptického problému
Vyslovte větu o vnitřní H^2-regularitě slabého řešení eliptického problému. Zaveďte pojem diferenčního kvocientu a vysvětlete, jak se použije v důkaze vnitřní regularity. Ukažte, že za podmínek věty o vnitřní regularitě splývá slabé řešení s klasickým skoro všude.

Otázka č. 15
Operátorové semigrupy
Definujte operátorovou semigrupu a její generátor. Popište základní vlastnosti semigrup a jejich generátorů. Vyslovte Hille-Yosidovu větu.

Otázka č. 16
Aplikace operátorových semigrup
Detailněji pohovořte o vybrané aplikaci semigrupových metod v teorii parciálních diferenciálních rovnic (souvislost spektra a stability, konstrukce řešení pro parabolické a hyperbolické rovnice druhého řádu apod.).