

Ing. František Štampach, Ph.D.
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze:

Posudek školitele diplomové práce
Vojtěcha Bartoše

Diskrétní Schrödingerův operátor s komplexním schodovitým potenciálem

Předmětem diplomové práce Bc. Vojtěcha Bartoše je spektrální analýza diskrétního Schrödingerova operátoru

$$H_\alpha := -\Delta + \alpha\chi_{[0,\infty)}$$

na $\ell^2(\mathbb{Z})$, kde Δ je diskrétní Laplaceův operátor, potenciál $\chi_{[0,\infty)}$ je Heavisidova funkce a parametr α je *komplexní* vazebná konstanta. Operátor H_α není samosdružený pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Modely operátorů matematické fyziky s nespojitým komplexním potenciálem se doposud studovaly pouze v klasickém spojitém nastavení jako např. operátor Schrödingerův, biharmonický, nebo Diracův v jedné dimenzi (viz články [5], [7] a [10] ze seznamu literatury v DP). Cílem práce bylo prozkoumat také diskrétní variantu modelu. Výhodou těchto modelů je na jedné straně jejich jednoduchost umožňující relativně explicitní spektrální analýzu. Na straně druhé vykazují spektrální vlastnosti těchto operátorů zásadní odlišnosti od samosdružených modelů. Právě z těchto důvodů posloužil nedávno podobný operátor jako H_α k nalezení odpovědi např. na otevřené otázky z teorie Liebových–Thirringových nerovnic.

Práce sestává ze tří kapitol. V první kapitole autor shrnuje vybrané standardní výsledky z operátorové a spektrální teorie. Druhá a třetí kapitola obsahuje původní výsledky autora. Druhá kapitola je zaměřena na spektrální analýzu H_α , nalézá spektrum H_α a Greenovo jádro rezolventního operátoru $(H_\alpha - \lambda)^{-1}$. Pomocí různých metod jsou odvozeny oboustranné odhady normy rezolventního operátoru, a tím je přibližně lokalizováno netriviální pseudospektrum H_α . V samosdruženém případě $\alpha \in \mathbb{R}$ také autor odvodil explicitní vzorce pro hustotu spektrální míry.

Nejzajímavější výsledky obsahuje kapitola 3, která je zaměřena na studium spektra $H_\alpha + V$ pod vlivem malé aditivní poruchy dané komplexním potenciálem V . Existují dva fundamentálně odlišné scénáře v závislosti na tom, zda $\alpha = 0$, nebo $\alpha \neq 0$. Operátor H_0 je kritický, a proto pro libovolně malé poruchy V splňující jisté předpoklady vznikají ve spektru $H_0 + V$ izolované vlastní hodnoty. Tato dobře známá analýza slabých vazeb se tradičně omezuje na Schrödingerovy operátory s reálnými potenciály. V případě H_0 student zobecnil analýzu slabých vazeb na případ dovolující obecně potenciály s komplexními hodnotami. Je-li $\alpha \neq 0$, esenciální spektrum H_α se rozštěpí na dvě úsečky analogicky jako ve spojitém případě, ale na rozdíl od spojitě analogie (a také H_0) vykazuje H_α tzv. spektrální stabilitu. Pod vlivem libovolně dostatečně malé komplexní poruchy V je spektrum $H_\alpha + V$ stejné jako spektrum H_α včetně jeho částí. Autor našel konkrétní postačující podmínky na potenciál V garantující spektrální stabilitu $H_\alpha + V$ pro $\alpha \neq 0$ a vyloučil existenci vložených vlastních hodnot v esenciálním spektru $H_\alpha + V$.

Zadání práce bylo splněno. Odborná úroveň práce je velmi dobrá. Práce je logicky strukturovaná a dobře se čte. Záměry autora bývají až na výjimky od začátku jasné. Funkce a množiny se složitější strukturou jsou ilustrovány numericky na obrázcích. Práce se zdroji odpovídá potřebám textu. Přebírané výsledky jsou řádně ocitovány. Aktivita studenta byla výborná. Pravidelně docházel na konzultace a dílčí úkoly zpracovával samostatně.

Práce je napsaná anglicky, jazyk je na velmi dobré úrovni. Z některých formulací je ovšem patrná jistá nezkušenost autora s psaním matematických textů většího rozsahu. Místy se student upíná ke slovnímu komentáři, který následně doplní stejným matematickým vyjádřením. Vznikají tak repetitivní argumentace a důkazy se prodlužují. Na druhou stranu, jelikož jsem studenta vedl

už od jeho bakalářské práce, pozoruji zásadní zlepšení ve způsobu formulace matematických tvrzení a logické struktúře důkazů. Práce obsahuje drobné chyby a překlepy, ale jejich výskyt je řídký.

Rád bych dodal, že původní výsledky autora by po mírné reformulaci bylo možné sepsat do kratšího článku a pokusit se publikovat v některém z impaktovaných časopisů, kde podobné články vycházejí. Tato činnost, která jde jistě nad rámec úkolů ze zadání diplomové práce, by si vyžádala investici dodatečného úsilí a času. Ačkoliv byly počáteční ambice studenta své výsledky publikovat, svůj plán si nakonec rozvrhl tak, že mu už, bohužel, na sepsání článku čas nezbyl.

Diplomová práce Bc. Vojtěcha Bartoše splňuje všechny náležitosti a celkově ji považuji za výbornou. Proto ji doporučuji k obhajobě a navrhuji hodnotit známkou **A - výborně**.

V Praze 20. 1. 2025

Ing. František Štampach, Ph.D.

