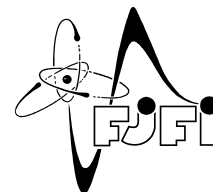


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Analýza a numerické simulace pro model kolektivního chování

Analysis and numerical solutions of the fluid model of collective behavior

Diplomová práce

Autor: **Štěpán Studenovský**
Vedoucí práce: **RNDr. Václav Mácha, Ph.D.**
Konzultant: **doc. Ing. Tomáš Bodnár, Ph.D.**
Akademický rok: 2024/2025

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Studenovský** Jméno: **Štěpán** Osobní číslo: **494683**
Fakulta/ústav: **Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**
Zadávací katedra/ústav: **Katedra matematiky**
Studijní program: **Aplikované matematicko-stochastické metody**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Analýza a numerické simulace pro model kolektivního chování.

Název diplomové práce anglicky:

Analysis and numerical solutions of the fluid model of collective behavior

Pokyny pro vypracování:

Student se bude zabývat Eulerovými rovnicemi s nelokálními členy, které popisují kolektivní chování.
1, V první části využije ročníkový projekt a uvede numerické simulace pro daný systém.
2, Následně se bude zabývat analýzou systému se zřetelem na správnou podmíněnost rovnic -- bude se soustředit na následující
2a, existence řešení
2b, jednoznačnost řešení
2c, stabilita řešení.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Roberts A. Adams, John J. F. Fournier: Sobolev spaces, second edition, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003. xiv+305 pp
- [2] Jose A. Carrillo, Eduard Feireisl, Piotr Gwiazda, Agnieszka Swierczewska-Gwiazda: Weak solutions for Euler systems with non-local interactions, J. Lond. Math. Soc. (2) 95 (2017), no. 3, 705–724
- [3] Constantin M. Dafermos: Hyperbolic conservation laws in continuum physics, third edition, Springer-Verlag, Berlin, 2010. xxxvi+708 pp
- [4] Josef Málek, Jindřich Nečas, Mirko Rokyta, Michael Růžička: Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs, Chapman & Hall, 1996
- [5] Luc Tartar: Compensated compactness and applications to partial differential equations, In: Nonlinear analysis and Mechanics, (ed. R.J.Knops), Heriot-Watt Symposium IV, Research Notes in Mathematics 39, (1979), Pitman, 136-192

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

RNDr. Václav Mácha, Ph.D. oddělení výzkumných aktivit MÚVS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:


doc. Ing. Tomáš Bodnár, Ph.D. ústav technické matematiky FS

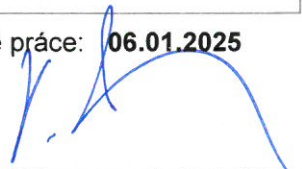
Datum zadání diplomové práce: **15.03.2024**

Termín odevzdání diplomové práce: **06.01.2025**

Platnost zadání diplomové práce: **15.03.2026**


RNDr. Václav Mácha, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


prof. Ing. Zuzana Masáková, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


doc. Ing. Václav Čuba, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

19.3.2024

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli RNDr. Václavu Máchovi, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé diplomové práce. Dále děkuji svému konzultantovi doc. Ing. Tomáši Bodnárovi, Ph.D. za rady, poznámky, trpělivost a ochotu při cenných konzultacích.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 6. ledna 2025

Štěpán Studenovský

Název práce:

Analýza a numerické simulace pro model kolektivního chování

Autor: Štěpán Studenovský

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: RNDr. Václav Mácha, Ph.D., Matematický ústav AV ČR, Žitná 609, 110 00 Nové Město

Konzultant: doc. Ing. Tomáš Bodnár, Ph.D., Ústav technické matematiky, FS, ČVUT, 121 Praha 2, Karlovo nám. 13

Abstrakt: Diplomová práce se zabývá analýzou a numerickými simulacemi Cucker-Smaleho modelu kolektivního chování. Tento model popisuje interakce mezi jednotlivci ve skupinách, jejich tendenci k synchronizaci pohybu a vliv okolních sil. Práce se zejména zaměřuje na jedno-dimenzionální přístup, zahrnující zkoumání existence, jednoznačnosti a stability řešení. Pro numerické simulace bylo použito Lax-Friedrichsovo diferenciální schéma. Hlavní přínos je věnován vlivu překážek a odpuzivých sil na pohyb částic. Výsledky simulací znázorňují, jak interakční síly ovlivňují kolektivní dynamiku systému.

Klíčová slova: Cucker-Smale model, existence, interakce, jednoznačnost, numerické simulace, stabilita

Title:

Analysis and numerical solutions of the fluid model of collective behavior

Author: Štěpán Studenovský

Abstract: The thesis deals with the analysis and numerical simulations of the Cucker-Smale model of collective behaviour. This model describes the interactions between individuals in groups, their tendency to synchronize their movements and the influence of external forces. The work focuses on a one-dimensional approach, involving the investigation of the existence, uniqueness and stability of solutions. The Lax-Friedrichs differential scheme was used for the numerical simulations. The main contribution is devoted to the influence of obstacles and repulsive forces on the particle motion. The simulation results illustrate how the interaction forces affect the collective dynamics of the system.

Key words: Cucker-Smale model, existence, interaction, numerical simulations, stability, uniqueness

Obsah

Úvod	8
1 Rozbor rovnic	11
1.1 Klasifikace rovnic	11
1.2 Zjednodušení mono-kinetickým ansatzem	12
1.3 Přidání konvolučního členu	13
1.4 Zavedení pravé strany	14
2 Existence	17
2.1 Transformace rovnic	17
2.2 Síla a tlak jsou nulové	21
2.3 Analýza řešení obyčejné diferenciální rovnice	23
2.4 Rozbor modelu s pravou stranou	26
2.5 Existence ρ	31
2.6 Existence u	32
3 Jednoznačnost a stabilita	33
3.1 Předpokládaná regularita	37
3.2 Pomocné výpočty	38
3.3 Odvození odhadu	39
4 Numerické výpočty	40
4.1 Lax-Fridrichsovo diferenciální schéma	41
4.2 Diskretizace prostoru a volba jednotek	42
4.3 Počáteční a okrajové podmínky	42
4.3.1 Počáteční podmínky	42
4.3.2 Okrajové podmínky	43
4.4 Aplikace Lax Friedrichse na problém v jedné dimenzi	43
4.5 Algoritmus výpočtu	44
4.6 Poznámky k implementaci	45
5 Numerické výsledky	46
5.1 Nastavení parametrů simulace	46
5.2 Model bez překážky	47
5.3 Model s propustnou překážkou	47
5.4 Poznámky k výsledkům	49

6	Rozšíření rovnic o tlak $P(\varrho)$	50
6.1	Výpočet síly reprezentující propustnou překážku	50
6.2	Řešení hyperbolických rovnic	50
6.3	Řešení hyperbolických rovnic s pravou stranou	51
6.4	Plány do budoucna	52
	Závěr	54

Úvod

Předmětem této diplomové práce je zkoumat existenci, jednoznačnost a aplikace kinetických a dynamických rovnic odvozených z Cucker-Smaleho modelu. Tento model se snaží popsat chování skupin jedinců v přírodě a jejich vzájemné interakce. Příkladem mohou být stáda bizonů putující prérií. Dobrodružnější jedinec pouhým okem, či matematik sledující dokument Animal Planet, si může povšimnout tendence osamocených jedinců sdružovat se do větších skupin, které se následně formují do velkých stád. Kromě běžného pohybu bizonů jako celku popisuje zde zkoumaný Cucker-Smaleho model i sociální interakce, jež vyvolávají podněty k vytvoření nebo rozdělení kolektivu. V obecné formě jej lze nalézt například v [5].

Tato práce se bude věnovat komplexnímu rozboru řešení zjednodušeného jednorozměrného Cucker-Smaleho modelu, odvozeného v bakalářské práci [12], v níž byla navíc implementována vlastní síla reprezentující propustnou překážku. V úvodní části práce stručně shrneme tvar rovnic, popíšeme jednotlivé členy a rozebereme jejich funkci v rovnicích. Důkladně odvodíme existenci řešení těchto rovnic, ukažeme jednoznačnost řešení a v závěru demonstrováme praktickou aplikaci těchto rovnic na reálnou situaci. Zadefinujeme základní úlohu pro numerické řešení těchto rovnic, kterou s definovanými počátečními a okrajovými podmínkami budeme pomocí vhodného postupu řešit.

Cucker-Smaleho částicový model popisuje chování interagujících agentů v prostoru. Obecně tyto rovnice popisují koordinované chování davu, kde se jednotliví agenti snaží vyrovnat rychlost a směr pohybu s ostatními účastníky. To v ideálním případě vede k synchronizovanému pohybu davu. Jedná se vlastně o řešení Cauchyovy úlohy [9] pro Cucker-Smale model ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \partial_t x_i = v_i, & i &= 1, \dots, N, t > 0, \\ \dot{v}_i &= \partial_t v_i = -\frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^N K(x_i, x_j)(v_i - v_j).\end{aligned}$$

Dvojice $(x_i, v_i)(t)$ je poloha a rychlost i -tého agenta v čase $t \in \mathbb{R}$ určená pro každého agenta zvlášť z celkového počtu N agentů v našem systému. Odlišnost od jiných diferenciálních pohybových rovnic představuje člen $K(x_i, x_j)$. Jde o interakci mezi agenty, závisící na jejich vzájemné poloze. Podotkneme, že do celkové interakce i -tého agenta přispívají všichni účastníci systému. Ve srovnání s realitou by byl tento člen pro většinu jedinců v systému takřka nulový, například kvůli dostatečně vzdáleným agentům. První rovnice je klasická definice rychlosti jako časové derivace polohy. Druhá rovnice je derivace rychlosti vzhledem k času, která je rovna vzájemné interakci s ostatními agenty. Funkce $K(x_i, x_j)$ určuje tedy sílu interakce mezi agenty v závislosti na vzájemné vzdálenosti. V této práci budeme uvažovat dvě jádrové funkce. Pro teoretickou analýzu v kapitole 3 použijeme jádro

$$K_1(x_i, x_j) = \frac{1}{|x - y|^{1+2s}},$$

kde $s > \frac{1}{2}$ a má singularitu v bodě $x = y$. Pro numerické simulace v kapitole 5 a 6 použijeme jádro

$$K_2(x_i, x_j) = \frac{1}{1 + (x - y)^2},$$

kteřé se hodí díky hladkosti pro numerické výpočty. Jádro by mělo mít vlastnosti takové, aby síla byla tím větší, čím jsou jedinci blíže k sobě, a bude slábnout se vzdáleností. Směr působení síly bude záviset na počtu jedinců v okolí a bude buď repulzivního, či atraktivního charakteru.

Rozšířením částicového přístupu je odvození kinetické rovnice pro Cucker-Smaleho model, který zavede distribuční funkci, či hustotu pravděpodobnosti částic, $f(t, x, v)$ popisující pravděpodobnosti nálezu částice v okolí bodu x s rychlostí blízkou v . Kinetický popis tedy není zaměřen na popis každé částice samostatně, ale zkoumá statistické chování částic jako celku. Odvozená kinetická rovnice z částicového modelu má tvar

$$\partial_t f + v \nabla_x f + \operatorname{div}_v (f L[f]) = 0. \quad (1)$$

Znovu tedy $f(t, x, v)$ představuje změnu hustoty pravděpodobnosti částic v prostoru v čase, tj. je to funkce určující pravděpodobnost, že částice se v daném čase t nachází v bodě x a má rychlost v . Členy ∂_t , ∇_x , div_v jsou po řadě parciální derivace podle času, gradient vzhledem k poloze a divergence vzhledem k rychlosti. Samotný parametr $L[f]$ je interakce, určující vzájemný vliv sousedních částic na jejich pohyb ve tvaru

$$L[f] = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y, w) (w - v) dw dy.$$

První člen na levé straně kinetické rovnice (1) představuje hustotu částic v čase a prostoru. Druhý člen reprezentuje konzervativní tok částic v různých bodech prostoru. Třetí člen je interakce mezi částicemi. Hlavním předmětem zkoumání v tomto příspěvku je třetí, pro nás poslední možný popis zkoumaného systému. Jedná se o hydrodynamické rovnice popisující hejnové chování Cucker-Smale modelu. Předchozí kinetické rovnice nám umožňují přechod od mikroskopického (pravděpodobnostní hustota částic) k makroskopickému popisu (hustota a rychlost) systému. Z kinetické teorie plynů je dobře známo, že rychlostní momenty distribuční funkce $f(t, x, v)$ dávají makroskopické vlastnosti systému. První momenty jsou definovány integracemi této funkce násobené rychlostní komponentou přes všechny rychlosti. Výjimkou je nulový moment pro hustotu, kde pouze integrujeme přes všechny rychlosti ξ systému

$$\varrho = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, \xi) d\xi.$$

První moment je navíc přenásobený ξ , poté zintegrováný a popisuje hybnost, či tok částic, počítáme jej jako

$$\varrho u = \int_{\mathbb{R}} \xi f(t, x, \xi) d\xi.$$

Pro úplnost je možné dodefinovat i druhý moment pro celkovou energii systému jako

$$\varrho E = \varrho e + \frac{1}{2} \varrho |u|^2,$$

kde $\varrho e = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi - u(x)|^2 f d\xi$ je vnitřní energie systému. Poté již makroskopické veličiny pro hustotu, hybnost, energii splňují hydrodynamické rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x (\varrho u) &= 0, \\ \partial_t (\varrho u) + \operatorname{div}_x (\varrho u \otimes u) + \operatorname{div}_x P(\varrho) + S^{(1)} &= 0, \\ \partial_t (\varrho E) + (\operatorname{div}_x \varrho u (E + P(\varrho)) + q) + S^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Navíc se zde vyskytuje tlaková síla $P = (p_{ij})$ a tepelný tok $q = (q_1, \dots, q_d)$. Integrační členy jsou pro úplný model následujícího tvaru

$$S^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \varrho(x) \varrho(y) (u(x) - u(y)) dy,$$

$$S^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \varrho(x) \varrho(y) (E(x) + E(y) - u(x)u(y)) dy.$$

Tyto rovnice jsou běžně používány v problémech modelování proudění kapalin, dynamiky plynu atd. Více se o tomto problému píše v knize od autora Eleuterio F. Toro [11].

Pro naše účely se používají i pro modelování davu v jednodušším tvaru bez energie jako

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho u) &= 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}_x(\varrho u \otimes u) + \nabla_x P(\varrho) + S^{(1)} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Budeme-li uvažovat mono-kinetický ansatz popsáný v [6],

$$f(t, x, \xi) = \varrho(t, x) \delta(\xi - u(t, x)), \quad x, \xi \in \mathbb{R}^d, t > 0, \tag{3}$$

rovnice (2) se zredukuje o tlak $P(\varrho)$, kdy tlak bude nulový a získáme tak základní tvar Eulerových rovnic bez tlaku (a energie) s pravou stranou.

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho u) &= 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}_x(\varrho u \otimes u) + S^{(1)} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Nakonec přidáme na pravou stranu vnější sílu $F = F(x, u)$, reprezentující překážku v prostoru. V této práci budeme pracovat s Cucker-Smaleho modelem na jednorozměrném toru. Konkrétně provedeme numerické simulace a ukážeme důkaz existence, jednoznačnosti a správné podmíněnosti rovnic. Potřebné a v práci používané tvary rovnic byly již odvozeny v bakalářské práci [12].

Kapitola 1

Rozbor rovnic

Nyní se podíváme na důkladnější rozbor řešených rovnic. Zhodnotíme jednotlivé varianty a všechny podrobně rozebereme a zdůvodníme. Ukážeme si aplikaci mono-kinetického ansatzu [6], který částicím zamezí vzájemné srážky. Tím pádem se problém zjednoduší a vypadnou členy spojené s tlakovou silou. Dále aplikací mono-kinetického ansatzu získáme výhodu při zavádění překážky v podobě neznámé síly působící na částice. Efektivně si usnadníme její výpočet a odvození. Dále v celé práci budeme uvažovat pouze jednu dimenzi prostorové proměnné.

1.1 Klasifikace rovnic

Nejprve specifikujme typ rovnic (1.1), které budeme řešit v následující práci. Podle volně přeložené definice z knihy Randalla J. Levequeho [8, Kapitola 6] lze tuto soustavu rovnic klasifikovat jako hyperbolickou.

Definice 1.1.1. *Uvažujme nelineární systém rovnic zákonů zachování*

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

Kde $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Toto může být zapsáno v kvasilineární formě

$$u_t + A(u)u_x = 0,$$

kde $A(u) = f'(u)$ je Jakobiova matice $m \times m$. Systém pak nazveme hyperbolickým právě tehdy, když $A(u)$ je diagonalizovatelná s reálnými vlastními čísly, a to alespoň na nějakém okolí, kde je rovnice řešitelná.

V rámci pozdějších numerických simulací fyzikálních systémů je klíčové implementovat konzervativní tvar rovnic pro zajištění fyzikální věrohodnosti. Tento přístup zaručuje, že numerické řešení adekvátně reprezentuje zákony zachování, specificky v kontextu hustoty a hybnosti, což je zásadní pro simulaci uzavřených systémů. Konzervativní formulace redukuje počet numerických chyb, což je výhodné pro zvyšování přesnosti a snížení numerické difúze. Tento přístup je rovněž nezbytný pro správnou reprezentaci fenoménů, jako jsou rázové vlny a diskontinuity.

Pokračuje lemma a důkaz, které demonstrují, že systémy rovnic s nulovou pravou stranou v konzervativním tvaru jsou de facto hyperbolické

Lemma 1.1.2. *Nechť máme systém rovnic (4) s nulovou pravou stranou v konzervativním tvaru. Nechť navíc derivace tlaku $\partial_\varrho P(\varrho)$ je kladná, pak se jedná rovnice hyperbolické.*

Důkaz. Ve smyslu předchozí definice označme v (4) jako $w = \begin{pmatrix} \varrho \\ m \end{pmatrix}$, kde $m = \varrho u$ zajistí konzervativní tvar ve smyslu zákonů zachování. Pak můžeme zapsat, že $f(w) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\varrho} + P(\varrho) \end{pmatrix}$ a platí

$$A(w) = f'(w) = J[f'] = \begin{pmatrix} \partial_\varrho f(w) & \partial_m f(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\varrho^2} + P'(\varrho) & 2\frac{m}{\varrho} \end{pmatrix}.$$

Nyní pomocí charakteristického polynomu určíme vlastní čísla matice $A(u)$ a spočteme determinant

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{m^2}{\varrho^2} + P'(\varrho) & 2\frac{m}{\varrho} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{2m}{\varrho}\lambda + \frac{m^2}{\varrho^2} - P'(\varrho) = 0.$$

Přehozením derivace tlaku na pravou stranu rovnice a jednoduchou úpravou kvadratické rovnice pro λ dostaneme

$$\left(\lambda - \frac{m}{\varrho}\right)^2 = P'(\varrho).$$

Z tohoto tvaru vyplývají dva možné případy

- $P' = 0$: v tomto případě máme pouze jeden dvojnásobný kořen rovný $\lambda = \frac{m}{\varrho}$. Jeho algebraická násobnost je dva. Pro toto vlastní číslo existuje pouze jeden vlastní vektor $\begin{pmatrix} \varrho \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$, ostatní jsou jeho lineární kombinace. Tudíž geometrická násobnost je jedna. Z nerovnosti algebraické a geometrické násobnosti víme, že matice $A(w)$ není diagonalizovatelná a nejedná se o hyperbolickou soustavu rovnic.
- $P'(\varrho) > 0$: získáme dva různé reálné kořeny rovnice $\lambda_{1,2} = \frac{m}{\varrho} \pm \sqrt{P'(\varrho)}$. Jelikož $P'(\varrho)$ je kladné proto $\lambda_{1,2}$ jsou různá čísla. To tedy znamená, že matice $A(w)$ je diagonalizovatelná a v tomto případě se jedná o hyperbolickou soustavu rovnic v jedné dimenzi.

Z toho vyplývá, že samotná funkce tlaku $P(\varrho)$ musí být rostoucí, abychom získali hyperbolický tvar rovnic. \square

1.2 Zjednodušení mono-kinetickým ansatzem

Ilustrativním případem na začátek je řešení pouhých jednodimenzionálních rovnic s nulovou pravou stranou (4), ve tvaru

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) &= 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u \otimes u) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Jak jsme již zmínili v předchozím lemma 1.1.2, tyto rovnice nejsou typicky hyperbolické pro $P(\varrho) = 0$. V tomto případě je i tak budeme považovat za jisté zjednodušení hyperbolických rovnic, taktéž popisují propagaci informace prostorem, například vzájemnou interakci při vyrovnávání rychlostí. Takto zjednodušená soustava rovnic zůstává napříč vynechání tlaku systémem diferenciálních rovnic prvního řádu.

Popišme nyní první rovnici, tu můžeme nazvat bilancí hustoty systému. Představuje vývoj hustoty v čase.

Co se týče jednotlivých členů, pak časová derivace hustoty vyjadřuje změnu hustoty v čase. Druhý člen, po zavedení hybnosti jako hustotu násobenou rychlostí, vyjadřuje divergenci hybnosti částic. Udává, že změna hustoty v každém bodu prostoru je způsobena tokem částic z nebo do tohoto bodu v prostoru.

Druhá z rovnic je bilancí hybnosti. Popisuje změnu hybnosti ρu v daném bodě a čase v důsledku interakce vnějších sil. Jak bylo očekáváno, první člen na levé straně představuje změnu hybnosti v čase, druhý člen popisuje, jak rychlostní pole (u) mění hybnost v prostoru. Tento člen do obecného řešení přidává nelinearitu v podobě tensorového součinu rychlostních polí u a je základem pro popis nevazkého proudění v dynamice tekutin.

Poznámka 1.2.1. *Nevazké proudění je ideální proudění, které popisuje proudění tekutiny bez ohledu na vnitřní tření nebo viskozitu. Vnitřní tření znamená tření mezi jednotlivými vrstvami tekutiny. Viskozita reprezentuje odpor proti toku tekutiny, je spjata s vnitřním třením mezi vrstvami.*

Poznámka 1.2.2. *V rovnicích (2) vystupuje navíc ještě gradient tlakové síly, popisuje, jakým směrem a jak rychle síla působí mezi částicemi. Tato síla vzniká interakcí mezi částicemi, typicky jejich srážkami. Nicméně díky mono-kinetickému ansatzu naše částice do sebe nenaráží a tento člen je tedy nulový.*

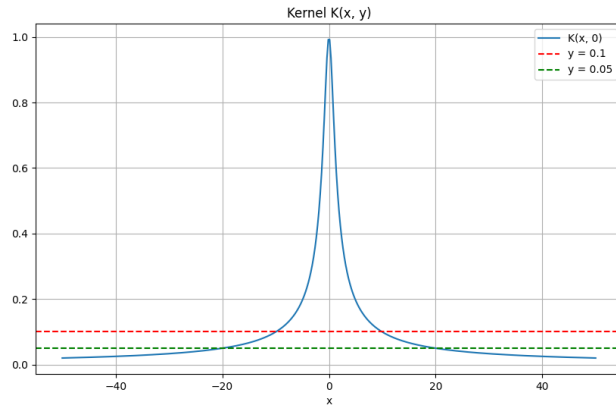
1.3 Přidání konvolučního členu

Nyní si rozšíříme rovnice (1.1) o konvoluční člen. Tento člen představuje interakci mezi všemi jednotlivci v prostoru, konkrétně se jedná o konvoluci mezi jádrovou funkcí a vzájemnou hybností jedinců. Konkrétně se rovná

$$S^{(1)} = \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \rho(x) \rho(y) (u(x) - u(y)) dy,$$

kde nyní dvojice (x, y) představuje polohu x -tého jedince vůči všem ostatním. Klíčovým prvkem je jádrová funkce $K(x, y)$, která charakterizuje interakci mezi jedinci. Tato funkce je závislá na vzájemné poloze dvou jednotlivců, což je podstatné pro modelování interakcí. Ideální vlastnosti této jádrové funkce zahrnují symetrii, nekonečnou diferencovatelnost a omezenost. Důležitým aspektem je, že intenzita vzájemné interakce mezi částicemi by měla být výrazná, pokud jsou částice blízko sebe, a měla by postupně klesat s rostoucí vzájemnou vzdáleností. Jádro $K_1(x, y)$ má fyzikální význam v modelu Cucker-Smale, protože zachycuje interakci částic, která slábne s rostoucí vzdáleností. Nicméně pro numerické simulace je vhodnější použít hladké jádro $K_2(x, y)$, které zjednodušuje výpočty a zároveň zachovává základní vlastnosti interakce. Nyní se blíže podívejme na jádrovou funkci

$$K_2(x, y) = \frac{1}{1 + (x - y)^2} \cdot f$$



Obrázek 1.1: Vliv jádrové funkce $K_2(x, y)$ na okolní body

Obrázek 1.1 znázorňuje průběh jádrové funkce $K_2(x, y)$, která určuje sílu interakce mezi částicemi v Cucker-Smaleho modelu. Na vodorovné ose x je vynesena vzdálenost mezi dvěma částicemi. Svislá osa zobrazuje hodnotu jádrové funkce, která kvantifikuje sílu interakce.

Modrá křivka zobrazuje průběh funkce $K_2(x, y)$ pro pevně zvolené $y = 0$. Červená a zelená křivka ukazují hodnotu jádra pro pěti a desetiprocentní hladinu významnosti, tedy hodnoty, pod které klesá funkce ve vzdálenosti $x = 0.05$ a $x = 0.1$ od středu.

Je patrné, že jádrová funkce má těžké konce, což znamená, že vzdálenější body x rapidně klesají a mají malý vliv. Toho můžeme využít v numerickém řešení a považovat vliv vzdálenějších bodů za zanedbatelný.

Pomocí takto definované jádrové funkce lze rozšířit rovnice v nekonzervativním tvaru na

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) &= 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u \cdot u) + \int_{\mathbb{T}} \frac{\varrho(x)\varrho(y)}{\sqrt{1+(x-y)^2}} (u(x) - u(y)) dy &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.4 Zavedení pravé strany

Posledním krokem je přidat do (1.2) novou pravou stranu reprezentující propustnou překážku. V [12] jsme za předpokladu uplatnění mono-kinetického ansatzu zavedli odpudivou sílu, jejíž význam je zpomalovat částice putující směrem k překážce rychlostí v na konečnou rychlost \bar{w} . Síla působí pouze na částice ve vzdálenost \bar{r} od překážky, které cestují rychlostí v větší než konečná rychlost \bar{w} . Takto navrženou sílu můžeme definovat následovně

$$F(x, v) = \left(0, \frac{v^2 - \bar{w}^2}{2\bar{r}} \chi_{(0, \bar{r})}(x) \chi_{(\bar{w}, \infty)}(v) \right). \quad (1.3)$$

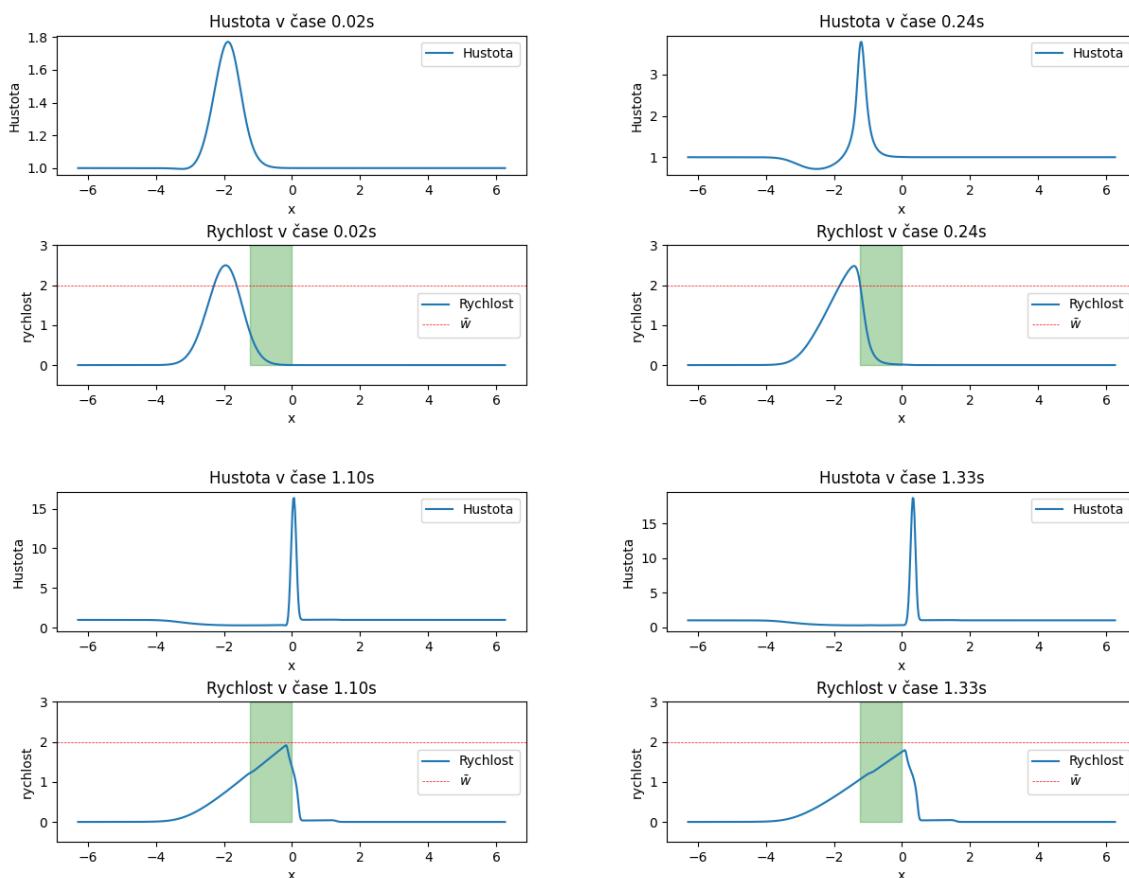
Přidáním této síly do (1.2) získáme poslední tvar dynamických rovnic, které jsou předmětem našeho zájmu. Nezapomeňme podotknout, že takto byla funkce popsána v částicovém modelu. Avšak v důsledku přechodu do kinetického popisu a následné adaptace do dynamického kontextu s využitím mono-kinetického ansatzu je její finální podoba odvozena jako

$$\int_{\mathbb{R}} f(t, x, \xi) F(x, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \delta_u \varrho(x, \xi) F(x, \xi) d\xi = \varrho(x, u) F(x, u). \quad (1.4)$$

Přidáním této pravé strany do tvaru rovnic odvozeného v předchozí kapitole 1.3 získáme konečnou podobu řešených rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) &= 0 \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u \otimes u) + S^{(1)} &= \varrho F(x, u). \end{aligned} \quad (1.5)$$

V následujících obrázcích 1.2 odpovídající dvojice grafů prezentují, jak aplikovaná síla působí na vývoj hustoty a rychlosti jednoho z hustotních vrcholů, který se pohybuje směrem doprava. Oblast působení síly je znázorněna zeleným obdélníkem, který ukazuje interval, v němž síla oponuje pohybu vrcholu hustoty. Hranice, kde rychlost dosahuje hodnoty \bar{w} , je znázorněna pruhovanou červenou čarou. Detailnější popis tohoto fenoménu je diskutován v kapitole 5,6 kde si představíme širší výsledky práce.



Obrázek 1.2: Znázornění vlivu síly na jeden vrchol hustoty a příslušné rychlosti

Zmíněný graf dále ilustruje, jak interakční síly postupně soustředí okolní hustotu do jednoho výrazného vrcholu, zatímco hustota v oblastech mimo hlavní vrchol asymptoticky klesá k nule. Obzvláště na obrázku hustoty v čase 0.024s si můžeme všimnout, jak za vrcholem vzniká prázdná oblast, ve které se nachází téměř nulová hustota. Toto si můžeme velice zjednodušeně připodobnit například ke dvěma řidičům jedoucím na vozovce v jednom jízdním pruhu. První řidič jede rychleji než pomalejší druhý a ve vznikající mezeře mezi nimi nastává efektivně nulová hustota vozidel. Na zbylých dvou obrázcích můžeme v zeleně vyznačené oblasti sledovat zkoumaný vliv vlastní síly, která brzdí pohyb hustoty. Zajímá

mavé je, že rychlost se nezastaví na požadované hranici, ale dále klesá vlivem interakčního členu. Tento pokles rychlosti je již pomalejší, než když se částice nacházely v oblasti s překážkou.

Poznámka 1.4.1. *V našem modelu není implementována žádná další síla, která by způsobovala zrychlení částic na takzvanou "cruising speed". To je na příkladu u řidičů na silnici taková rychlost, na kterou se snaží účastníci provozu zrychlit, aby mohli dále volně pokračovat v cestě. Tento jev je blíže diskutován v článku [5, Introduction], ve kterém jsou probírána slabá řešení Eulerových systémů s nelokálními interakcemi.*

Kapitola 2

Existence

V této kapitole se zabýváme následujícím jednorozměrným systémem Eulerových rovnic zahrnujícím tlak, interakční síly a nelokální vlivy

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u \cdot u) + \partial_x P(\varrho) + S^{(1)} &= \varrho F(x, u).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Tento systém zahrnuje dva typy nelokálních sil. První typ, označený jako $S^{(1)}$ a nacházející se na levé straně rovnice, reprezentuje interakční člen typický pro modely kolektivního chování. Tento člen popisuje vzájemné působení mezi částicemi v systému a modeluje úpravu směru a rychlosti pohybu částic na základě jejich relativní polohy. V této práci uvažujeme konkrétní formu interakčního členu, která vychází z pozice dvou částic a jejich relativní rychlosti

$$S^{(1)} = \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(x) \varrho(y) (u(x) - u(y)) dy.$$

Druhý typ nelokální síly je reprezentován členem na pravé straně rovnice. Tento člen ovlivňuje rychlost částic na základě jejich aktuální pozice prostřednictvím působení vnější síly $F(x, u)$. Cílem této analýzy je popsat podmínky existence řešení uvedeného systému rovnic a porozumět roli jednotlivých členů, zejména interakční síly $S^{(1)}$ a vnější síly $F(x, u)$, v dynamice systému. Pro účely této kapitoly budeme předpokládat, že neznámé funkce jsou dostatečně regulární a všechny uvedené integrály existují.

2.1 Transformace rovnic

Budeme se nyní věnovat odvození a analýze systému rovnic s využitím teorie kritických bodů studované v článku [4]. Začneme výchozími podmínkami

$$(\varrho(\cdot, t), u(\cdot, t))|_{t=0} = (\varrho_0, u_0).$$

- **Rovnice kontinuity**

První rovnice systému (2.1) představuje zákon zachování hmoty. Po rozvinutí pomocí pravidla derivace součinu dostáváme

$$0 = \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = \partial_t \varrho + u \partial_x \varrho + \varrho \partial_x u.$$

Zavedením materiálové derivace $D_t := \partial_t + u \partial_x$ a označením $v := \partial_x u$ lze tuto rovnici zapsat jako

$$D_t \varrho = -\varrho v.$$

Tento tvar odpovídá přechodu do Lagrangeových souřadnic prostřednictvím mapování $x = X(\xi, \tau)$, kde $X(\xi, 0) = \xi$ a $\partial_\tau X(\xi, \tau) = u(X(\xi, \tau), \tau)$. Tento popis znamená, že $X(\xi, \tau)$ sleduje pozici částice, která byla na počátku v bodě ξ , přičemž její pohyb je určován rychlostí u . Pro libovolnou funkci $f(x, t)$, přepsanou v Lagrangeových souřadnicích jako $f(x(\xi, \tau), \tau)$, platí

$$\partial_\tau f(x(\xi, \tau), \tau) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial x} \tilde{v} + \frac{\partial f}{\partial \tau} =: D_\tau f.$$

což odpovídá materiálové derivaci hustoty

$$\partial_\tau \varrho(x(\xi, \tau), \tau) = -\varrho(x(\xi, \tau), \tau) v(x(\xi, \tau), \tau).$$

- **Rovnice hybnosti**

Druhá rovnice systému (2.1) představuje zákon zachování hybnosti. Po detailním rozpisu a aplikaci pravidla derivace součinu získáme

$$\begin{aligned} & \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u \cdot u) + \partial_x P(\varrho(x, t)) \\ &= u \partial_t \varrho + \varrho \partial_t u + u \partial_x(\varrho u) + \varrho u \partial_x u + \frac{\partial P}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ze zákona zachování hmoty přenásobeného rychlostí platí

$$0 = u(\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u)).$$

Aplikací zákona zachování na (2.2) obdržíme

$$\varrho \partial_t u + \varrho u \partial_x u + \frac{\partial P}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \varrho \partial_t u + \varrho u v + \frac{\partial P}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x}.$$

Vydělením hustotou ϱ získáme rovnici pro rychlost u

$$\partial_t u + u v + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial P}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(y) (u(x) - u(y)) dy = F(x, u).$$

- **Nelokální interakční člen** Konvoluční člen na levé straně rovnice (2.1) lze přepsat jako

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(y) (u(x) - u(y)) dy &= u(x) \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(y) dy - \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(y) u(y) dy \\ &= u(x) \cdot (K * \varrho) - (K * (\varrho u)). \end{aligned}$$

kde $K * \varrho$ a $K * (\varrho u)$ označují konvoluce. Derivace tohoto členu podle x poskytuje

$$\begin{aligned} & \partial_x [u(x) \cdot (K * \varrho) - (K * (\varrho u))] \\ &= v \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(y) dy + u(x) \int_{\mathbb{T}} \partial_x K(x, y) \varrho(y) dy - \int_{\mathbb{T}} \partial_x K(x, y) \varrho(y) u(y) dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nyní na poslední člen v (2.3) aplikujeme rovnici kontinuity

$$\partial_y(\varrho(y)u(y)) = -\partial_t\varrho(y).$$

Poznamenejme, že abychom mohli aplikovat rovnici kontinuity, musíme nejprve pomocí metody per partes přehodit derivaci k druhému členu $\varrho(y)u(y)$. Jelikož se nacházíme na toru situace se zjednoduší a získáme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \partial_x K(x, y) \varrho(y) u(y) dy &= - \int_{\mathbb{T}} \partial_y K(x, y) \varrho(y) u(y) dy \\ &\stackrel{p.p.}{=} - \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \partial_y (\varrho(y) u(y)) dy \\ &= \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \partial_t \varrho(y) dy. \end{aligned} \quad (2.4)$$

V první rovnosti (2.4) jsme změnili derivaci dle x na derivaci dle proměnné y pomocí definice jádra $K(x, y)$ a následující úvahy kde při transformaci se změní pouze znaménko

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \psi(|x - y|) \\ \partial_x \psi(|x - y|) &= \psi'(|x - y|) \frac{x - y}{|x - y|} \\ \partial_y \psi(|x - y|) &= \psi'(|x - y|) \frac{y - x}{|x - y|}. \end{aligned}$$

Opravdu, člen $[K(x, y)\varrho(y)u(y)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, plyne z následujících několika myšlenek. Nejprve uvažujme $K(x, y) = \psi(|x - y|)$ takové, že $|x - y| \rightarrow \infty$ se blíží k nule, v jiných slovech to znamená, že vzájemný vliv dvou bodů se ztrácí se vzdáleností. Dále z počátečních podmínek pro hustotu ϱ platí

$$\int_{\mathbb{T}} \varrho_0(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_{\mathbb{T}} \varrho(x) dx < +\infty,$$

pro $\varrho \geq 0$ a pak $\varrho \in L^1(\mathbb{R})$. To plyne z následujícího lemmatu

Lemma 2.1.1. *Necht' ϱ řeší (2.1). Pak platí*

$$\int_{\mathbb{T}} \varrho(t, x) dx = \int_{\mathbb{T}} \varrho(0, x) dx.$$

Pro každé $t > 0$.

Důkaz. Uvažujme integrální formu rovnice kontinuity. Po integraci obou stran přes $x \in \mathbb{T}$, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} \varrho(x, t) dx = - \int_{\mathbb{T}} \partial_x (\varrho(x, t) u(x, t)) dx.$$

Podle Gaussovy věty je pravá strana rovna nule

$$\int_{\mathbb{T}} \partial_x (\varrho(x, t) u(x, t)) dx = 0.$$

Proto je časová derivace integrálu z hustoty přes \mathbb{T} rovna nule.

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} \varrho(x, t) dx = 0.$$

To implikuje, že integrál $\varrho(x, t)$ přes \mathbb{T} je konstantní v čase. Proto platí

$$\int_{\mathbb{T}} \varrho(x, t) dx = \int_{\mathbb{T}} \varrho_0(x) dx$$

Z toho již přímo plyne předcházející tvrzení. □

- **Konvoluční členy a jejich pokles**

Přepíšeme konvoluční člen do tvaru

$$\int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(y) dy = (K * \varrho),$$

a můžeme aplikovat materiálovou derivaci na odpovídající členy.

- **Výpočet derivací**

Pro derivaci konvolučního členu dostáváme

$$\begin{aligned} \partial_x \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(y) (u(x) - u(y)) dy \\ = v \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(y) dy + u(x) \int_{\mathbb{T}} \partial_x K(x, y) \varrho(y) dy + \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \partial_t \varrho(y) dy \\ = v (K * \varrho) + \partial_\tau (K * \varrho). \end{aligned}$$

Za povšimnutí taktéž stojí již snadný převod do Lagrangeových souřadnic.

- **Derivace tlakového členu**

Rozeberme jak vypadají jednotlivé derivace tlaku

$$\begin{aligned} \partial_x^2 P(\varrho(x)) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial P}{\partial \varrho} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 P}{\partial \varrho^2} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial P}{\partial \varrho} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

- **Derivace vnější síly**

Pro pravou stranu rovnice, reprezentující vnější sílu $F(x, u)$, je derivace podle x následující

$$\partial_x F(x, u) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} v.$$

Tento vztah zůstává zachován i při přechodu do Lagrangeových souřadnic, což potvrzuje

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, u(x, t)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(\xi, \tau), u(x(\xi, \tau), \tau)) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} v. \end{aligned}$$

- **Upravená momentová rovnice** Po úpravě a derivaci momentové rovnice obdržíme

$$\partial_t v + u \partial_x v + v^2 - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial P}{\partial \varrho} \phi^2 + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 P}{\partial \varrho^2} \phi^2 + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial P}{\partial \varrho} \partial_x \phi + v (K * \varrho) + \partial_\tau (K * \varrho) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} v.$$

kde $\phi = \partial_x \varrho$.

- **Přechod do Lagrangeových souřadnic**

V Lagrangeových souřadnicích se po aplikaci materiálové derivace $\partial_\tau = \partial_t + u\partial_x$ rovnice transformuje na

$$\begin{aligned} & \partial_\tau(v(x(\xi, \tau), \tau) + (K * \varrho)(x(\xi, \tau), \tau)) = \\ & -v(x(\xi, \tau), \tau) \left(v(x(\xi, \tau), \tau) + (K * \varrho)(x(\xi, \tau), \tau) + \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \frac{\partial F}{\partial x} + \partial_x^2 P(\varrho(x)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2 Síla a tlak jsou nulové

V případě, kdy jsou síla a tlak nulové nebo konstantní, jejich derivace mizí. Z rovnice (2.5) pak tyto členy odpadají. Dostáváme následující soustavu rovnic v Lagrangeových souřadnicích

$$\begin{aligned} \partial_\tau \varrho(x(\xi, \tau), \tau) &= -\varrho(x(\xi, \tau), \tau)v(x(\xi, \tau), \tau) \\ \partial_\tau(v(x(\xi, \tau), \tau) + (K * \varrho)(x(\xi, \tau), \tau)) &= -v(x(\xi, \tau), \tau)(v(x(\xi, \tau), \tau) + (K * \varrho)(x(\xi, \tau), \tau)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Z článku [4, kapitola 1.1] je známo, že

Pozorování 2.2.1. *Globální řešení systému (2.6) existuje právě tehdy, když $\partial_x u_0(x) \geq -K * \varrho_0(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je tvaru $(\varrho, u) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R})) \times \mathbb{C}(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$. Tento stav odpovídá subkritické oblasti a systém se chová stabilně. Naopak, pokud $\partial_x u_0(x) < -K * \varrho_0(x)$, nazýváme toto superkritickou oblastí, kde řešení systému kolabuje v konečném čase.*

Položme $d = v + K * \varrho$ a přepíšeme předchozí systém obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu na

$$\begin{aligned} \partial_\tau \varrho &= -\varrho v = \varrho(d - K * \varrho) \\ \partial_\tau d &= -v(v + K * \varrho) = -d(d - K * \varrho). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dynamiku systému (2.7) z článku [4, Kapitola 2.1] lze shrnout do následujícího tvrzení, jehož důkaz uvádíme, protože jeho myšlenky jsou dále použity v textu

Pozorování 2.2.2. *pro rovnici (2.7) platí*

- *Když $d_0 < 0$, pak $d \rightarrow -\infty$ v konečném čase.*
- *Když $d_0 = 0$, pak $d(\tau) = 0$ pro všechny $\tau \geq 0$.*
- *Když $d_0 > 0$, pak $d(\tau)$ zůstává omezené v čase a $d(\tau) \rightarrow K * \varrho(\tau)$ pro $t \rightarrow \infty$.*

Důkaz.

- První případ pro $d_0 < 0$. Jakmile $d_0 < 0$ pak je jasné, že $d(\tau) \leq 0$ pro všechny $\tau \geq 0$. Pak můžeme psát z (2.6), že $\partial_\tau d(\tau) \leq -d^2(\tau)$ (viz. [3]), protože pro $K * \varrho$ platí dle Cauchyho-Schwartzovy nerovnosti

$$\|K * \varrho\|_{L^\infty} \leq \|K\|_{L^\infty} \|\varrho\|_{L^1} < \infty.$$

To znamená, že konvoluce $K * \varrho$ je omezená. Řešením obyčejné diferenciální rovnice $\partial_\tau d(\tau) = -d^2(\tau)$ je

$$\begin{aligned} \frac{1}{d^2(\tau)} dd(\tau) &= -1 \quad / \int_\tau \\ -\frac{1}{d(\tau)} &= -\tau + C \\ d(\tau) &= \frac{1}{\tau + C} \end{aligned}$$

S počáteční podmínkou $d(0) = d_0$ dává

$$d(0) = \frac{1}{C}$$

to implikuje, že řešením je

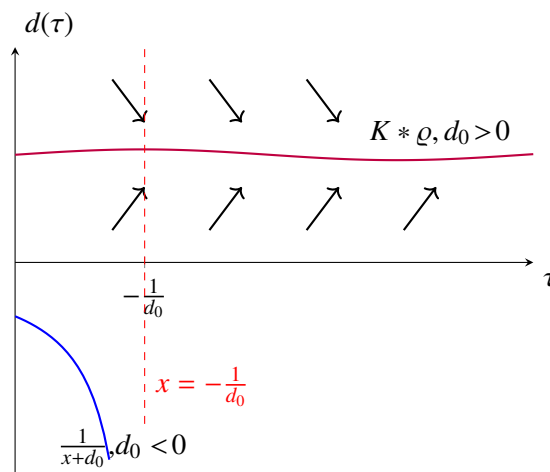
$$d(\tau) = \frac{d_0}{\tau + \frac{1}{d_0}}.$$

Definiční oborem je $D_{d(\tau)} = (-\infty; -\frac{1}{d_0}) \cup (-\frac{1}{d_0}; \infty)$. Zároveň vidíme, že řešení diverguje $d(\tau) \rightarrow -\infty$ pro $\tau^* = -\frac{1}{d_0}$.

- Druhý případ kdy $d_0 = 0$ je triviální, protože $\partial_\tau d = 0$, což znamená, že $d(\tau) = 0$ pro všechna $\tau \geq 0$.
- Třetí případ pro $d_0 > 0$. Pokud $d(\tau) \in (0, K * \varrho)$, pak je $d(\tau) > 0$ a $\partial_\tau d > 0$, což znamená, že $d(\tau)$ je rostoucí k $K * \varrho$. Naopak, pokud $d(\tau) > K * \varrho$ je $d(\tau) < 0$ a $d(\tau)$ je klesající k $K * \varrho$. Tím se potvrzuje, že $d(\tau) \rightarrow K * \varrho(\tau)$ pro $\tau \rightarrow \infty$.

□

Následující obrázek graficky znázorňuje důkaz řešení $d(\tau)$.



Obrázek 2.1: Grafické znázornění důkazu pro jednotlivé varianty d_0 a $\tau > 0$.

Dále sledujme z první rovnice (2.7) charakteristický tok hustoty ϱ podél charakteristik. Pro $\varrho_0 = 0$ máme triviální případ, kdy $\varrho(\tau) = 0$ pro všechny čas $\tau > 0$.

Pro $\varrho_0 > 0$, položíme $\beta := \frac{d}{\varrho}$ a dynamika částice podél charakteristiky je

$$\beta' = \frac{d'\varrho - \varrho'd}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho^2} (d(d - K * \varrho) + d\varrho(d - K * \varrho)) = 0.$$

Z toho vidíme, že $\beta(\tau) = \beta_0$ pro všechny τ . A zároveň β roste uměrně s d s koeficientem ϱ .

Důsledek 2.2.3. *Uvažujme systém rovnic (4)*

- *když $\partial_x(u_0(a)) < -K * \varrho_0(a)$ pak $\partial_x u(x(a, \tau), \tau) \rightarrow -\infty$. Navíc, když $\varrho(a) > 0$, $\varrho(x(a, \tau), \tau) \rightarrow +\infty$ v konečném čase.*
- *když $\partial_x(u_0(a)) = -K * \varrho_0(a)$ pak $\partial_x u(x(a, \tau), \tau) = -K * \varrho_0(x(a, \tau), \tau)$ pro všechny τ*
- *když $\partial_x(u_0(a)) > -K * \varrho_0(a)$, pak $\partial_x u(x(a, \tau), \tau)$ a $-K * \varrho_0(x(a, \tau), \tau)$ jsou omezené pro všechny τ . Navíc $\partial_x u(x(a, \tau), \tau)$ jde v čase do nuly.*

2.3 Analýza řešení obyčejné diferenciální rovnice

Z předchozí kapitoly je pro nás důležité zanalyzovat následující diferenciální rovnici

$$\partial_\tau d = -d^2 + bd + c. \quad (2.8)$$

Než budeme pokračovat v analýze, podívejme se na stacionární řešení diferenciální rovnice (2.8), tj. řešení pro $\partial_\tau d = 0$. To vede na kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou

$$d_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Tato stacionární řešení, $d = d_1$ a $d = d_2$, představují konstantní řešení diferenciální rovnice. Pro $d \neq d_1$ a $d \neq d_2$ můžeme rovnici (2.8) vydělit zápornou hodnotou výrazu na pravé straně, čímž získáme

$$\frac{dd}{d^2 - bd - c} = -d\tau.$$

Rozdělíme jmenovatel na součin lineárních členů a tím získáme

$$\frac{dd}{(d - d_1)(d - d_2)} = -d\tau.$$

Dále postupujeme podle hodnoty diskriminantu $b^2 + 4c$, což definuje různé varianty řešení.

- $b^2 + 4c > 0$. Necht' $d = d_1$ a $d = d_2$ jsou stacionární body. Pro $d \neq d_1$ a $d \neq d_2$ můžeme psát

$$\frac{dd}{(d - d_1)(d - d_2)} = -d\tau.$$

Nyní integrací a použitím rozkladu na parciální zlomky získáme řešenou rovnici

$$\int \frac{1}{d_1 - d_2} \left(\frac{1}{d - d_1} - \frac{1}{d - d_2} \right) dd = - \int d\tau.$$

Řešení této rovnice je již snadné

$$\frac{1}{d_1 - d_2} \ln \left(\frac{|d - d_1|}{|d - d_2|} \right) = \kappa - \tau. \quad (2.9)$$

Dále vyjádříme $d = d(\tau)$, nejprve vynásobíme rovnici, zbavíme se logaritmu a upravíme

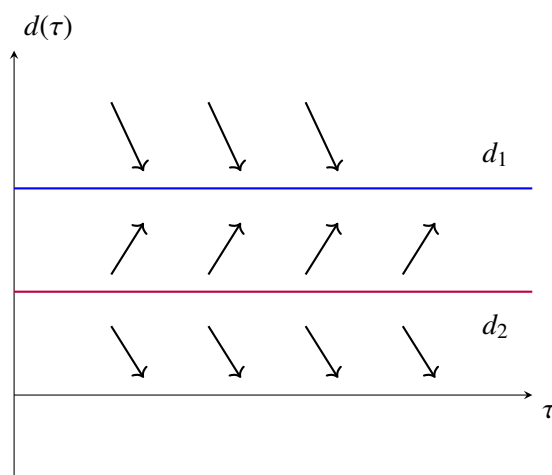
$$\begin{aligned} \frac{|d - d_1|}{|d - d_2|} &= e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)} \\ |d - d_1| &= |d - d_2|e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

V tomto kroku rozdělíme řešení podle znamének uvnitř absolutních hodnot na několik možností. Nejprve však řešení uzavřeme určením integrační konstanty z rovnice (2.9) dosazením počáteční podmínky $d = d(\tau = 0)$. Pak obdržíme integrační konstantu κ jako

$$\kappa = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln \left(\frac{|d_0 - d_1|}{|d_0 - d_2|} \right).$$

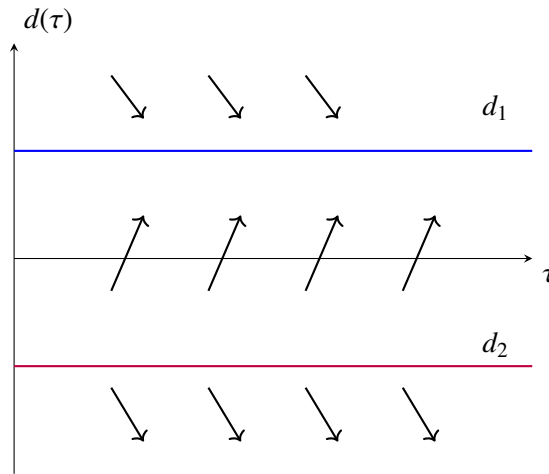
Předpokládejme, že $d_1 > d_2$ pak $d = d_1$ a $d = d_2$ jsou stacionární body. Dále víme, že $d_1 > 0$ vždy, avšak pro d_2 znaménko závisí na velikosti $b^2 + 4c$.

Nejprve se podívejme na variantu kdy d_1 a d_2 kladné. Pak lze diferenciální rovnici (2.8) přepsat do tvaru $\partial_\tau = -(d - d_1)(d - d_2)$. Nyní díky stacionárním bodům můžeme říct, že řešení bude klesající na intervalu $d(\tau) \in (-\infty; d_2) \cup (d_1; \infty)$ a rostoucí na $d(\tau) \in (d_1; d_2)$



Obrázek 2.2: Grafické znázornění důkazu pro jednotlivé varianty d_0 a $\tau > 0$.

Jako druhou volbu máme d_1 kladné a d_2 záporné. Pak diferenciální rovnici (2.8) má jiné stacionární body a o jejím řešení lze říct, že bude klesající na intervalech $d(\tau) \in (-\infty; d_2) \cup (d_1; \infty)$ a rostoucí na $d(\tau) \in (d_2; d_1)$



Obrázek 2.3: Grafické znázornění důkazu pro jednotlivé varianty d_0 a $\tau > 0$.

Z (2.10) můžeme zpozorovat dvě možná řešení $d = d(\tau)$. První z nich nastane, mají-li absolutní hodnoty stejné znaménko. Pak řešením je

$$\begin{aligned} d - d_1 &= (d - d_2)e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)} \\ d &= \frac{d_1 - d_2 e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}{1 - e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Naopak pro rozdílná znaménka absolutních hodnot, získáme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} d - d_1 &= -(d - d_2)e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)} \\ d &= \frac{d_1 + d_2 e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}{1 + e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

- $b^2 + 4c = 0$ Přepíšeme jako $c = -\frac{b^2}{4}$, pak řešíme

$$\begin{aligned} \partial_\tau d &= -(d^2 - bd + \frac{b^2}{4}) \\ \partial_\tau d &= -(d - \frac{b}{2})^2. \end{aligned}$$

Převědeme výrazy obsahující d na jednu stranu a zintegrujeme

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\tau d}{(d - \frac{b}{2})^2} &= -\partial_\tau \\ \int \frac{dd}{(d - \frac{b}{2})^2} &= - \int d\tau \\ -\frac{1}{(d - \frac{b}{2})} &= -\tau + \kappa. \end{aligned}$$

Dále upravíme znaménka, převrátíme zlomky a dostaneme vyjádřené $d = d(\tau)$

$$\begin{aligned} d - \frac{b}{2} &= \frac{1}{\tau - \kappa} \\ d &= \frac{b}{2} + \frac{1}{\tau - \kappa}. \end{aligned}$$

Počáteční podmínku určíme dosazením $d = d(\tau = 0)$ jako $\kappa = -\left(d_0 - \frac{b}{2}\right)^{-1}$.

- $b^2 + 4c < 0$ Nyní převedeme rovnici

$$\begin{aligned}\partial_\tau d &= -(d^2 - bd - c) \\ \partial_\tau d &= -\left(\left(d - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - c\right).\end{aligned}$$

Přičemž nyní vidíme, že $-(\frac{b^2}{4} + c) =: \zeta$ je kladné, pak přepíšeme řešení jako

$$\frac{dd}{\left(d - \frac{b}{2}\right)^2 + \zeta} = -d\tau$$

Toto povede substitucí na $\arctan(\iota)$. Položme $\iota = d - \frac{b}{2}$, zjednodušíme tím výraz ve jmenovateli na

$$\frac{d\iota}{\iota^2 + \zeta} = -d\tau,$$

přičemž $d\iota = dd$. Tvar této diferenciální rovnice, je již standardní formulace derivace funkce $\arctan(\iota)$, proto platí

$$\begin{aligned}\int \frac{d\iota}{\iota^2 + \zeta} &= -\int d\tau \\ \arctan\left(\frac{\iota}{\sqrt{\zeta}}\right) &= \kappa - \tau.\end{aligned}$$

Vrátíme substituci a vyjádříme hledanou $d = d(\tau)$

$$\begin{aligned}\frac{\iota}{\sqrt{\zeta}} &= \tan(\kappa - \tau) \\ \iota &= \sqrt{\zeta} \tan(\kappa - \tau) \\ d &= \frac{b}{2} + \sqrt{\zeta} \tan(\kappa - \tau).\end{aligned}$$

Počáteční podmínku určíme snadno z $d = d(\tau = 0)$ jako $\kappa = \arctan\left(\frac{d - \frac{b}{2}}{\sqrt{-(\frac{b^2}{4} + c)}}\right)$.

2.4 Rozbor modelu s pravou stranou

Nyní zkoumáme diferenciální rovnici (2.5) pouze s pravou stranou závislou na poloze a rychlosti. Odvozená rovnice má pomocí $d = v + K * \varrho$ následující tvar, který se ještě upraví do příhodnější formy

$$\begin{aligned}\partial_\tau d &= (\partial_u F - d)(d - K * \varrho) + \partial_x F, \\ \partial_\tau d &= -d^2 + d(K * \varrho + \partial_u F) - (K * \varrho)\partial_u F + \partial_x F.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Převedeme nyní řešení stávajícího na řešení předchozí kapitoly, vyjádříme odhady lineárního členu $K * \varrho + \partial_u F$ a konstantního členu $(K * \varrho)\partial_u F + \partial_x F$. Určíme znaménka, vhodně odhadneme parametry pro horní a spodní odhady $d = d(\tau)$ a výsledek bude již zřejmý.

Víme, že můžeme odhadnout $0 < (K * \varrho) < \mu_3$, dále $\mu_1 < \partial_u F < \mu_2, \mu_1 \mu_2 < 0$. Pak můžeme psát odhad

lineárního členu $\mu_1 \leq (K * \varrho) + \partial_u F \leq \mu_2 + \mu_3$.

Dále pokračujeme a označme odhad $\mu_4 < \partial_x F < \mu_5, \mu_4 \mu_5 < 0$ Odhad konstantního členu kvadratické rovnice bude $\mu_4 - \mu_2 \mu_3 \leq -(K * \varrho) \partial_u F + \partial_x F \leq \mu_5 - \mu_1 \mu_3$.

Pro $d > 0$ můžeme napsat nerovnici pro spodní a vrchní odhad (2.13) ve tvaru

$$-d^2 + \mu_1 d + \mu_4 - \mu_2 \mu_3 \leq \partial_\tau d \leq -d^2 + d(\mu_3 + \mu_2) + \mu_5 - \mu_1 \mu_3$$

- $d > 0$, vrchní odhad, řeší rovnice $\partial_\tau d = -d^2 + d(\mu_3 + \mu_2) + \mu_5 - \mu_1 \mu_3$. Z kapitoly 2.3 dosadíme za $b = \mu_3 + \mu_2$ a $c = \mu_5 - \mu_1 \mu_3$. Pak ze zavedení proměnných je $b > 0, c > 0$ dává tři varianty

- $b^2 + 4c > 0$. To nám získá kořeny kvadratické rovnice jako $d_1 > 0$ a $d_2 < 0$ a můžeme z předchozí kapitoly podle (2.12) psát řešení ve tvaru

$$d = \frac{d_1 + d_2 e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}{1 + e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}$$

Tedy $d = d(\tau)$ zůstane omezené shora. Neexistuje τ takové, že $\lim_{\tau \rightarrow \tau^*} d(\tau) = \infty$. τ^* značí čas blow-upu.

- $b^2 + 4c = 0$, nenastane, protože $b = \mu_3 + \mu_2 > 0$.
- $b^2 + 4c < 0$ nenastane, protože $b = \mu_3 + \mu_2$ a $c = \mu_5 - \mu_1 \mu_3$ jsou kladné parametry.

- $d > 0$, spodní odhad $-d^2 + \mu_1 d + \mu_4 - \mu_2 \mu_3 = \partial_\tau d$. Vidíme, že podle kapitoly 2.3 pro získání spodního odhadu dosadíme za $b = \mu_1$ zároveň $c = \mu_4 - \mu_2 \mu_3$. Nahlédneme, že $d_2 < d_1 < 0$ pak

- pro variantu řešení $b^2 + 4c > 0$ bude (2.11), to je

$$d = \frac{d_1 - d_2 e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}{1 - e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}$$

Přičemž $\kappa = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln \left(\frac{d_1 - d_0}{d_2 - d_0} \right)$. Zkoumejme kdy $d(\tau) = 0$. To nastane v čase

$$d_1 - d_2 e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)} = 0$$

$$d_1 = d_2 e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}$$

$$\ln \left(\frac{d_1}{d_2} \right) = (d_1 - d_2)(\kappa - \tau)$$

$$\frac{1}{d_1 - d_2} \ln \left(\frac{d_1}{d_2} \right) = \kappa - \tau$$

$$\tau = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln \left(\frac{d_1 - d_0}{d_2 - d_0} \right) - \frac{1}{d_1 - d_2} \ln \left(\frac{d_1}{d_2} \right)$$

$$\tau^* = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln \left(\frac{d_2(d_1 - d_0)}{d_1(d_2 - d_0)} \right)$$

Nyní už $\tau > 0$ a známe čas, kdy se řešení dostane do nuly.

- $b^2 + 4c = 0$, přepíšeme jako $\mu_1^2 + 4\mu_4 - 4\mu_2 \mu_3 = 0$. Máme řešení ve tvaru

$$d = \frac{\mu_1}{2} + \frac{1}{\tau - \kappa} \quad (2.14)$$

kde κ splňuje $\kappa = \frac{2}{\mu_1 - 2d_0}$. Pak přepíšeme (2.14) jako

$$d = \frac{\mu_1}{2} + \frac{1}{\tau - \frac{2}{\mu_1 - 2d_0}} \quad (2.15)$$

Hledáme čas τ , pro který $d(\tau) = 0$. Přepíšeme předchozí rovnici (2.15) jako

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mu_1}{2} + \frac{1}{\tau - \frac{2}{\mu_1 - 2d_0}} \\
-\frac{\mu_1}{2} &= \frac{1}{\tau - \frac{2}{\mu_1 - 2d_0}} \\
-\frac{\mu_1}{2} &= \frac{\mu_1 - 2d_0}{\tau\mu_1 - 2\tau d_0 - 2} \\
-\frac{2}{\mu_1}(\mu_1 - 2d_0) &= \tau\mu_1 - 2\tau d_0 - 2 \\
\frac{4d_0}{\mu_1} &= \tau(\mu_1 - 2d_0) \\
\tau^* &= \frac{4d_0}{\mu_1(\mu_1 - 2d_0)}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

To znamená, že pro d_0 kladné se řešení do nuly nejdříve v čase $\frac{4d_0}{\mu_1(\mu_1 - 2d_0)} > 0$.

– $b^2 + 4c < 0$, podmínku přepíšeme jako $\mu_1^2 + 4\mu_1 - 4\mu_2\mu_3 < 0$. Dosazením za řešení z kapitoly 2.3 získáme

$$\begin{aligned}
\frac{d - \frac{b}{2}}{\sqrt{\zeta}} &= \tan\left(\arctan\left(\frac{d_0 - \frac{b}{2}}{\sqrt{\zeta}}\right) - \tau\right) \\
d &= \frac{b}{2} + \sqrt{\zeta} \tan\left(\arctan\left(\frac{d_0 - \frac{b}{2}}{\sqrt{\zeta}}\right) - \tau\right)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Přičemž $\zeta > 0$ nezávislá na $d = d(\tau)$. Dále $b < 0$ a $d_0 > 0$ je počáteční podmínka řešení. Zajímá nás chování této funkce pouze pro $\tau \geq 0$. Jelikož se jedná o funkci $\tan(x)$ jejímž argumentem je funkce $\arctan(\theta)$, která je dobře definovaná pro všechny reálné θ , řešení bude existovat a budeme hledat kdy $d(\tau) = 0$. To nastane v čase (2.18)

$$\begin{aligned}
-\frac{b}{2\sqrt{\zeta}} &= \tan\left(\arctan\left(\frac{d_0 - \frac{b}{2}}{\sqrt{\zeta}}\right) - \tau\right) \\
\arctan\left(-\frac{b}{2\sqrt{\zeta}}\right) &= \arctan\left(\frac{d_0 - \frac{b}{2}}{\sqrt{\zeta}}\right) - \tau \\
\tau^* &= \arctan\left(\frac{2d_0 - b}{2\sqrt{\zeta}}\right) - \arctan\left(-\frac{b}{2\sqrt{\zeta}}\right).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Pro $d < 0$ můžeme napsat nerovnici pro spodní a vrchní odhad (2.13) ve tvaru

$$-d^2 + (\mu_2 + \mu_3)d + \mu_4 - \mu_2\mu_3 \leq \partial_\tau d \leq -d^2 + d\mu_1 + \mu_5 + \mu_1\mu_3$$

- $d < 0$, horní čas blow-upu nemusíme řešit, protože jak již bylo zmíněno, vrchní hranice existuje pro $d > 0$, takže řešení nemůže mít $\lim d(\tau) = \infty$ v konečném čase.
- $d \leq 0$ pro spodní odhad se diskriminant rovná $(\mu_2 + \mu_3)^2 + 4\mu_4 - 4\mu_2\mu_3$.

- $b^2 + 4c > 0$, s kořeny $d_1 > d_2 > 0$. Absolutní hodnoty $|d - d_1|$ ani o $|d - d_2|$ budou mít stejný znaménka a můžeme psát řešení ve tvaru

$$d = \frac{d_1 - d_2 e^{(d_1-d_2)(\kappa-\tau)}}{1 - e^{(d_1-d_2)(\kappa-\tau)}}.$$

Již víme, že v κ nastane blow-up nejdříve v čase $\kappa = \frac{1}{d_1-d_2} \ln\left(\frac{d_1-d_0}{d_2-d_0}\right) > 0$.

- $b^2 + 4c = 0$, přepíšeme jako

$$(\mu_2 + \mu_3)^2 - 4\mu_2\mu_3 + 4\mu_4 = 0.$$

Pak podle (2.3) píšeme řešení

$$d = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} + \frac{1}{\tau - \kappa}$$

s počáteční podmínkou v $\tau = 0$ určenou $-\kappa = \frac{2}{2d_0 - (\mu_2 + \mu_3)}$. Potom řešení $d = d(\tau)$ přepíšu jako

$$d = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} + \frac{1}{\tau + \frac{2}{2d_0 - (\mu_2 + \mu_3)}}. \quad (2.19)$$

Ze jmenovatele druhého zlomku vidíme, že blow-up nastane nejdříve v

$$\tau^* = \frac{2}{\mu_2 + \mu_3 - 2d_0}. \quad (2.20)$$

- $b^2 + 4c < 0$, přičemž $b = \mu_2 + \mu_3$ kladné a zároveň $c = \mu_4 - \mu_2\mu_3$ záporné. Řešením z analýzy je

$$d = \frac{b}{2} + \sqrt{\zeta} \tan(\kappa - \tau) \quad (2.21)$$

ζ je kladné a κ je počáteční podmínka rovna $\arctan\left(\frac{2d_0-b}{2\sqrt{\zeta}}\right)$. Řešení tedy je klesající funkce, která bude nyní mít blow-up v čase τ^* určeném

$$\begin{aligned} \kappa - \tau &= \frac{\pi}{2} + n\pi \\ \tau^* &= \kappa - \frac{\pi}{2} + n\pi \end{aligned} \quad (2.22)$$

Přičemž $n = 1$, budeme chtít brát hned první asymptotu. Pak tedy řešení bude existovat nejméně do času τ^* .

Následující lemma shrnuje výše uvedené poznatky.

Lemma 2.4.1. *Uvažujme diferenciální rovnici (2.13). Necht' $\mu_1 < \partial_u F < \mu_2, 0 < (K * \varrho) < \mu_3$ a $\mu_4 < \partial_x F < \mu_5$. Necht' dále platí $\mu_1\mu_2 < 0, \mu_4\mu_5 < 0$.*

Pro $d_0 \leq 0$

- *Pokud platí, že diskriminant $(\mu_2 + \mu_3)^2 + 4\mu_4 - 4\mu_2\mu_3 > 0$ pak řešení existuje nejméně do času*

$$\tau^* = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln\left(\frac{d_1 - d_0}{d_2 - d_0}\right)$$

$$\text{kde } d_{1,2} = \frac{\mu_2 + \mu_3 \pm \sqrt{(\mu_2 + \mu_3)^2 + 4\mu_4 - 4\mu_2\mu_3}}{2}.$$

- Pokud diskriminant $(\mu_2 + \mu_3)^2 + 4\mu_4 - 4\mu_2\mu_3 = 0$ řešení (2.13) existuje nejméně do času

$$\tau^* = \frac{2}{\mu_2 + \mu_3 - 2d_0}.$$

- Pokud $(\mu_2 + \mu_3)^2 - 4\mu_2\mu_3 + 4\mu_4 < 0$ pak řešení existuje do času

$$\tau^* = \arctan\left(\frac{2d_0 - \mu_2 - \mu_3}{2\sqrt{\zeta}}\right) - \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

Pro $d_0 > 0$

- pokud diskriminant $\mu_1^2 + 4\mu_4 - 4\mu_2\mu_3 > 0$ řešení (2.13) bude existovat nejméně do času

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln\left(\frac{d_1}{d_2}\right) + \frac{1}{d_1' - d_2'} \ln\left(\frac{d_2'(d_1' - d_0')}{d_1'(d_2' - d_0')}\right).$$

Příčemž $d_{1,2} = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu^2 + 4\mu_4 - 4\mu_2\mu_3}}{2}$ a platí $0 > d_1 > d_2$.

- Pro diskriminant roven nule, tj. $\mu_1^2 + 4\mu_4 - 4\mu_2\mu_3 = 0$. Řešení existuje nejméně do času

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{2}{\mu_2 + \mu_3} + \frac{4d_0'}{(\mu_1' - 2d_0')\mu_1'}.$$

- Pro záporný diskriminant $\mu_1^2 + 4\mu_4 - 4\mu_2\mu_3 < 0$ existuje řešení nejméně do času

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \arctan\left(-\frac{\mu_2 + \mu_3}{2\sqrt{\zeta}}\right) - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2d_0 - \mu_1'}{2\sqrt{\zeta'}}\right) - \arctan\left(-\frac{\mu_1'}{2\sqrt{\zeta'}}\right).$$

Čárkované proměnné jsou časy odhadu pro předchozí případ s počáteční podmínkou $d_0 < 0$.

A zároveň $\zeta = -\frac{(\mu_2 + \mu_3)^2}{4} - \mu_2\mu_3 + \mu_4$ a $\zeta' = -\frac{\mu_1'^2}{4} + \mu_4 - \mu_2\mu_3$.

Důkaz. Důkaz je přímým důsledkem rozboru (2.3) a využitím faktu, že řešení, které začíná v $d_0 > 0$ se nejprve může dostat do nuly v nějakém čase a pak může pokračovat dál či může klesnout do $d_0 < 0$ a nastane blow-up. Blow-up jdoucí v čase do $+\infty$ nemůže nastat. Pro diferenciální rovnici

$$\partial_\tau d = -d^2 + d(K * \varrho + \partial_u F) - (K * \varrho)\partial_u F + \partial_x F \quad (2.23)$$

platí, že

- pro $d > 0$ je $-d^2 + \mu_1 d + \mu_4 - \mu_2\mu_3 \leq \partial_\tau d$ spodní odhad řešení (2.23). Kořeny kvadratické rovnice jsou $0 > d_1 > d_2$. Pak dle kapitoly 2.3 je

- pro diskriminant $\sqrt{\mu_1^2 + 4(\mu_4 - \mu_2\mu_3)} > 0$ na pravé straně spodního odhadu, máme řešení ve tvaru

$$d = \frac{d_1 - d_2 e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}{1 - e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}.$$

Toto řešení se dostane do nuly v nejméně v čase $\tau_1^* = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln\left(\frac{d_2(d_1 - d_0)}{d_1(d_2 - d_0)}\right) > 0$. Dále si uvědomíme, že jakmile je řešení v nule, může pokračovat dál, či klesat. Jakmile klesá dostaneme se do situace pro $d_0 \leq 0$.

– pro diskriminant $\sqrt{\mu_1^2 + 4(\mu_4 - \mu_2\mu_3)} = 0$, je řešení ve tvaru (2.15)

$$d = \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_1 - 2d_0}{\tau(\mu_1 - 2d_0) - 2}$$

To se dostane do nuly v čase (2.16) $\tau_2^* = \frac{4d_0}{\mu_1(\mu_1 - 2d_0)}$.

– pro diskriminant $\sqrt{\mu_1^2 + 4(\mu_4 - \mu_2\mu_3)} < 0$, dostaneme řešení ve tvaru (2.17). To se dostane do nuly v čase τ_3^* (2.18).

- pro $d < 0$ je $d \geq -d^2 + (\mu_2 + \mu_3)d + \mu_4 - \mu_2\mu_3$ spodním odhadem rovnice (2.23). Pro kořeny kvadratické rovnice z předpokladů platí $d_1 > d_2 > 0$. Dle kapitoly 2.3 je pro

– diskriminant $\sqrt{(\mu_2 + \mu_3)^2 + 4(\mu_4 - \mu_2\mu_3)} > 0$ řešením (2.23)

$$d = \frac{d_1 - d_2 e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}{1 - e^{(d_1 - d_2)(\kappa - \tau)}}.$$

To má blow-up pro $\kappa = \tau$ a zároveň $\kappa = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln\left(\frac{d_1 - d_0}{d_2 - d_0}\right) > 0$. Po dosazení za $d_0 = 0$ získáme hledaný čas blow-upu pro $\tilde{\tau}_1$.

– diskriminant $\sqrt{(\mu_2 + \mu_3)^2 + 4(\mu_4 - \mu_2\mu_3)} = 0$ řešením (2.23) je (2.19) s časem blow-upu $\tilde{\tau}_2$ rovným (2.20).

– diskriminant $\sqrt{(\mu_2 + \mu_3)^2 + 4(\mu_4 - \mu_2\mu_3)} < 0$ řešením (2.23) je (2.21) s časem blow-upu $\tilde{\tau}_3$ rovným (2.22).

Proto pokud pro případy diskriminantu většího jak nula, existence řešení (2.23) je zaručena alespoň do sečtení časů τ_1^* a $\tilde{\tau}_1$. Pro diskriminant rovný nule se existuje řešení do sečtení časů $\tau_2^* + \tilde{\tau}_2$ a nakonec pro poslední variantu existuje řešení minimálně do času $\tau_3^* + \tilde{\tau}_3$. To uzavírá důkaz předchozího lemma. \square

2.5 Existence ϱ

Věnujme se nyní existenci ϱ . Použijeme Gronwallovu nerovnici viz [10, kapitola 1.44]. Pracujeme s první rovnicí (2.7)

$$\partial_\tau \varrho = \varrho(d - K * \varrho).$$

Přepíšeme do integračního tvaru (2.7)

$$\varrho(\tau) = \varrho_0 + \int_0^\tau \varrho(s)(d - K * \varrho(s)) ds. \quad (2.24)$$

Nyní chceme omezit $\varrho(t)$ v čase. Můžeme ve smyslu [10] psát $y(t) = \varrho(t)$, kterou budeme chtít omezit v čase τ pomocí Gronwallovy nerovnosti. Za předpokladu, že $K * \varrho$ je omezená, můžeme pomocí $(d - K * \varrho) \leq (|d| + \mu_3)$ přepsat (2.24) jako

$$\varrho(\tau) \leq \varrho_0 \int_0^\tau \varrho(s)(|d| + \mu_3) ds.$$

Nyní použijeme Gronwallovu nerovnici z [10]. Dosazením za $y(\tau) = \varrho(\tau)$ a získáme

$$\varrho(\tau) \leq \varrho_0 e^{\int_0^\tau (|d(s)| + \mu_3) ds}.$$

Z toho plyne, že dokud je d omezené, pak ϱ je také omezená.

2.6 Existence u

Dále budeme pokračovat podobně jako v důkazu [4, Věta 1.1]. Pro všechna x označíme $d_{0,x}^* =: \partial_x u_0(x)$. Necht' řešení existuje do časů $T(d_0) < \infty$. Pak čas blow-upu označím $T^* = \inf_{x \in \mathbb{T}} T(d_{0,x}^*)$. Pro libovolné d_0 a kladný diskriminant existuje řešení do času

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln \left(\frac{d_1}{d_2} \right) + \frac{1}{d_1' - d_2'} \ln \left(\frac{d_2'(d_1' - (u_{inf} + K * \varrho_0))}{d_1'(d_2' - (u_{inf} + K * \varrho_0))} \right).$$

Pro nulový diskriminant, existuje řešení alespoň do času

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{2}{\mu_2 + \mu_3} + \frac{4(u_{inf} + K * \varrho_0)}{(\mu_1' - 2(u_{inf} + K * \varrho_0))\mu_1'}.$$

A pro záporný diskriminant existuje řešení nejméně do času

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \arctan \left(-\frac{\mu_2 + \mu_3}{2\sqrt{\zeta}} \right) - \frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{2(u_{inf} + K * \varrho_0) - \mu_1'}{2\sqrt{\zeta'}} \right) - \arctan \left(-\frac{\mu_1'}{2\sqrt{\zeta'}} \right).$$

Věta 2.6.1. *Necht' $u_0(x)$ je spojitá funkce se spojitými omezenými prvními derivacemi na prostoru toru \mathbb{T} , a necht' platí $d_x(0) = \partial_x u(0, x)$ pro všechna $x \in \mathbb{T}$. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ existuje čas $T^*(x) > 0$ takový, že $d_x(x)$ existuje na intervalu $(0, T^*(x))$, přičemž $T^*(x)$ závisí na $\partial_x u(0, x)$ podle funkce $T^*(x) = f(\partial_x u(0, x))$. Dále definujeme $T^{**} = \inf_{x \in \mathbb{R}} T^*(x)$, a platí, že řešení rovnice existuje a je hladké na intervalu $(0, T^*)$.*

Důkaz. Necht' pro $x \in \mathbb{T}$ je rovnice dána počátečními podmínkami $u(0, x) = u_0(x)$ a $d_x(0) = \partial_x u_0(x)$. Necht' počáteční podmínky jsou hladké a dobře definované. Podle lemma (2.4.1) existuje lokální řešení hledané diferenciální rovnice na intervalu $(0, T^*(x))$, kde $T^*(x) > 0$ a závisí spojitě na počátečních podmínkách $\partial_x u_0(x)$.

Opravu časy blow-upu jsou kladné. V důkazu lemma (2.4.1) například pro případ kladného diskriminantu a $d_0 \leq 0$ máme, že čas blow-upu $\tau^* = \frac{1}{d_1 - d_2} \ln \left(\frac{d_1 - d_0}{d_2 - d_0} \right)$. Zde platí $d_1 > d_2$ a z toho plyne, že i zlomek $\frac{d_1 - d_0}{d_2 - d_0} > 1$. Logaritmus čísla většího než jedna je kladný, a proto i $\tau^* > 0$.

Pro případ diskriminantu rovnému nule a $d_0 < 0$ vzorec pro čas blow-upu je $\tau^* = \frac{2}{\mu_2 + \mu_3 - 2d_0}$. Z předpokladů Lemma (2.4.1) víme, že $\mu_2 + \mu_3 > 0$. Z toho plyne, že $\mu_2 + \mu_3 - 2d_0 > 0$ a pak i $\tau^* > 0$.

Pro záporný diskriminant a $d_0 < 0$ platí $\tau^* = \arctan \left(\frac{2d_0 - \mu_2 - \mu_3}{2\sqrt{\zeta}} \right) + \frac{\pi}{2}$. Zde Arkus tangens nabývá hodnot z intervalu $(-\pi/2; \pi/2)$, pak již snadno plyne, že $\tau^* > 0$.

Pro případy $d > 0$ řešení $d(\tau)$ nejprve může dostat do nuly v čase $\tau_1 > 0$. Z analýzy pro $d_0 < 0$ již víme, že časy $\tau^* > 0$. Pak celkový čas blow-upu pro $d_0 > 0$ je dán součtem $\tau_1^* + \tau_2^* > 0$. Tím máme zajištěnu existenci času $T^*(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{T}$.

Platnost $T^* > 0$ plyne z nezávislosti parametrů μ na počáteční podmínce $d_0(x)$. Chceme ukázat, že T^* existuje pro $-c < d_0(x)$. Pak už $T^*(d_0(x)) > 0$. Z kapitoly 2.4 vidíme, že různé časy blow-upu τ můžeme psát jako funkci $\tau^* = \tau^*(d_0(x))$. Dosadíme tedy pro všechny $\tau^* = \tau^*(-c)$ a snadno nahlédneme, že všechny časy jsou nenulové kladné. Navíc $\tau^*(d_0(x))$ je spojitá kladná funkce. Nebude proto nikdy nulová. Pak již jen položíme $T^{**} = \inf_{x \in \mathbb{T}} T^*(x)$ a to je již zaručeně kladné. \square

Kapitola 3

Jednoznačnost a stabilita

V této kapitole se zaměříme na problematiku jednoznačnosti a stability řešení soustavy rovnic (2.1). Naším cílem bude analyzovat podmínky, za kterých jsou řešení této soustavy jednoznačně určeny. Předpokládejme, že máme dvě řešení soustavy (2.1), která označíme jako (ϱ_1, u_1) a (ϱ_2, u_2) . Z rovnic kontinuity pro obě řešení plyne

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho_1 + \partial_x(\varrho_1 u_1) &= 0 \\ \partial_t \varrho_2 + \partial_x(\varrho_2 u_2) &= 0.\end{aligned}$$

Obě rovnice od sebe odečteme

$$\partial_t(\varrho_1 - \varrho_2) + \partial_x(\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2) = 0,$$

vynásobíme $(\varrho_1 - \varrho_2)$ přičteme a odečteme $\varrho_2 u_1$,

$$\partial_t(\varrho_1 - \varrho_2) + \partial_x(\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2 + \varrho_2 u_1 - \varrho_2 u_1) = 0.$$

Zintegrujeme přes \mathbb{T} a obdržíme

$$\int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_t(\varrho_1 - \varrho_2) + (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_x(\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2 + \varrho_2 u_1 - \varrho_2 u_1) dx = 0.$$

První člen od časové derivace můžeme přepsat jako

$$\int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_t(\varrho_1 - \varrho_2) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \partial_t(\varrho_1 - \varrho_2)^2.$$

Ve druhém členu vytkneme a rozdělíme podle derivace součtu na

$$\partial_x((\varrho_1 - \varrho_2)u_1) + \partial_x(\varrho_2(u_1 - u_2)).$$

Násobený rozdílem $(\varrho_1 - \varrho_2)$ a zintegrujeme přes \mathbb{T} . Pro první člen získáme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_x((\varrho_1 - \varrho_2)u_1) dx &= - \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)u_1 \partial_x(\varrho_1 - \varrho_2) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} u_1 \partial_x(\varrho_1 - \varrho_2)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 \partial_x u_1 dx.\end{aligned}$$

Podobným způsobem přepíšeme i druhý integrál a obdržíme

$$\int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_x((u_1 - u_2)\varrho_2) = \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)(u_1 - u_2) \partial_x \varrho_2 + \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2) \varrho_2 \partial_x (u_1 - u_2).$$

Přepíšeme výsledky dohromady

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 \partial_x u_1 dx + \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_x (\varrho_2 (u_1 - u_2)) dx = 0$$

Třetí člen rozložíme pomocí Leibnitzova pravidla pro derivaci součinu a použijeme Youngovu nerovnost $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$. Obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_x (\varrho_2 (u_1 - u_2)) dx &= \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)(u_1 - u_2) \partial_x (\varrho_2) dx + \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2) \varrho_2 \partial_x (u_1 - u_2) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \varrho_2^2 (\partial_x (u_1 - u_2))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2 (\partial_x \varrho_2)^2 dx. \end{aligned}$$

Dále platí $|\partial_x u_1| \leq \|\partial_x u_1\|_{L^\infty}$ pak můžeme přepsat předchozí nerovnici jako

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \|\partial_x u_1\|_{L^\infty} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \|\partial_x (\varrho_2 (u_1 - u_2))\|_2^2 dx$$

Po zintegrování v čase přes interval $(0, t)$ obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2(t) dx &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2(s) (\|\partial_x u_1\|_{L^\infty} + 1) dx ds \\ &\quad + \int_0^t \|\partial_x (\varrho_2 (u_1 - u_2))\|_2^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)(0) dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tímto jsme ukázali, že pokud jsou počáteční podmínky $\varrho_1(0)$ a $\varrho_2(0)$ stejné, rozdíl mezi řešeními $\varrho_1(t)$ a $\varrho_2(t)$ zůstane nulový pro všechny časy t . To znamená, že řešení soustavy rovnic (2.1) je jednoznačné, pokud jsou počáteční podmínky jednoznačně specifikovány.

Dále se podíváme na druhou rovnici v (2.1). Uvažujme mono-kinetický ansatz, vynecháme tedy člen s tlakem. Uvažujme dvě řešení systému (2.1), které mají (ϱ_1, u_1) a (ϱ_2, u_2) . Získáme soustavu tvaru

$$\begin{aligned} \partial_t(\varrho_1 u_1) + \partial_x(\varrho_1 u_1 \cdot u_1) + S^{(1)} &= \varrho_1 F(x, u_1) \\ \partial_t(\varrho_2 u_2) + \partial_x(\varrho_2 u_2 \cdot u_2) + S^{(1)} &= \varrho_2 F(x, u_2). \end{aligned}$$

Obě rovnice od sebe odečteme

$$\partial_t(\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2) + \partial_x(\varrho_1 u_1 \cdot u_1 - \varrho_2 u_2 \cdot u_2) + S_1^{(1)} - S_2^{(1)} = \varrho_1 F(x, u_1) - \varrho_2 F(x, u_2).$$

Vynásobíme $(u_1 - u_2)$ a zintegrujeme přes oblast \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_t(\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_x(\varrho_1 u_1 \cdot u_1 - \varrho_2 u_2 \cdot u_2) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (S_1^{(1)} - S_2^{(1)}) dx \\ = \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 F(x, u_1) - \varrho_2 F(x, u_2)) dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Odděleně rozepíšeme jednotlivé členy v předchozí rovnici (3.2). Začneme prvním členem, ve kterém přičteme a odečteme $\varrho_1 u_2$, získáme

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_t (\varrho_1 u_1 - \varrho_1 u_2 + \varrho_1 u_2 - \varrho_2 u_2) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_t (\varrho_1 (u_1 - u_2)) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_t ((\varrho_1 - \varrho_2) u_2) dx. \end{aligned}$$

Zde můžeme dále rozdělit derivace uvnitř integrálu podle derivace součinu jako

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \varrho_1 \partial_t (u_1 - u_2) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2 \partial_t \varrho_1 dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_t u_2 dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) u_2 \partial_t (\varrho_1 - \varrho_2) dx. \end{aligned}$$

To můžeme ještě pomocí derivací součinu a vztahu $\partial_t \varrho = -\partial_x \varrho u$ upravit do následující pod

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2 \partial_x (\varrho_1 u_1) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_t u_2 dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) u_2 \partial_t (\varrho_1 - \varrho_2) dx. \end{aligned}$$

Dále takto upravený první integrál sečteme s druhým integrálem z (3.2). Obdržíme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2 \partial_x (\varrho_1 u_1) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_t u_2 dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) u_2 \partial_t (\varrho_1 - \varrho_2) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_x (\varrho_1 u_1 \cdot u_1 - \varrho_2 u_2 \cdot u_2) dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nyní provedeme sérii úprav, které následně sečteme dohromady

- Jako první upravíme druhý člen pomocí per partes a získáme

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2 \partial_x (\varrho_1 u_1) dx = \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 u_1 (u_1 - u_2) \partial_x (u_1 - u_2) dx.$$

- K pátému členu přičteme a odečteme v parciální derivaci $\varrho_1 u_1 u_2$. Vytkneme a roztrhneme na dva integrály. Přičemž na první z nich poté použijeme per partes.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_x (\varrho_1 u_1 \cdot u_1 - \varrho_1 u_1 u_2 + \varrho_1 u_1 u_2 - \varrho_2 u_2 \cdot u_2) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_x (\varrho_1 u_1 (u_1 - u_2)) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_x (u_2 (\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2)) dx \\ &= - \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 u_1 (u_1 - u_2) \partial_x (u_1 - u_2) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \partial_x (u_2 (\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2)) dx \end{aligned}$$

Nyní již vidíme, že celý pátý člen se vynuluje s druhým a částí členu čtvrtého. Zůstane jen

$$(3.3) = \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_t u_2 dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2) \partial_x u_2$$

Přepíšeme (3.2) do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (S_1^{(1)} - S_2^{(1)}) dx &= \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 F(x, u_1) - \varrho_2 F(x, u_2)) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_t u_2 dx - \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2) \partial_x u_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Věnujme se nyní pravé straně (3.4). Uvažujme funkci $F = F(x, u)$ Lipschitzovskou, pak můžeme psát

$$|F(x, u_1) - F(x, u_2)| \leq c |u_1 - u_2|. \quad (3.5)$$

Provedeme několik oddělených úprav, které pak složíme dohromady

- K prvnímu integrálu obsahující F_1 a F_2 přičteme a odečteme člen $\varrho_1 F(x, u_2)$, obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 F(x, u_1) - \varrho_2 F(x, u_2)) dx \\ = \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) \varrho_1 (F(x, u_1) - F(x, u_2)) dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) F(x, u_2) dx \end{aligned}$$

Pak podle (3.5) platí následující nerovnosti

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 F(x, u_1) - \varrho_2 F(x, u_2)) dx \\ \leq c \|\varrho_1\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)(u_1 - u_2) dx + \|F(x, u_2)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) dx. \end{aligned}$$

- Druhý člen se odhadne

$$- \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_t u_2 dx \leq \|\partial_t u_2\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) dx.$$

- K třetímu členu přičteme a odečteme $\varrho_1 u_2$, získáme

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 u_1 - \varrho_2 u_2) \partial_x u_2 dx \\ = - \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 \partial_x u_2 dx - \int_{\mathbb{T}} u_2 (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) \partial_x u_2 dx \\ \leq \|\partial_x u_2\|_{L^\infty} \|\varrho_1\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx + \|u_2\|_{L^\infty} \|\partial_x u_2\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) dx. \end{aligned}$$

Konečně přepíšeme (3.4) do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (S_1^{(1)} - S_2^{(1)}) dx \\ \leq C (\|\varrho_1\|_{L^\infty}, \|u_2\|_{L^\infty}, \|F(x, u_2)\|_{L^\infty}, \|\partial_t u_2\|_{L^\infty}, \|\partial_x u_2\|_{L^\infty}) \left(\int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) + (u_1 - u_2)^2 dx \right). \end{aligned}$$

Celkově máme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx + \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (S_1^{(1)} - S_2^{(1)}) dx \\ & \leq C \left(\int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) + (u_1 - u_2)^2 dx \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

O druhém členu na levé straně můžeme říct, že je kladný protože pro jednotlivé členy

$$(u_1 - u_2) \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(x) \varrho(y) ((u_1(x) - u_1(y)) - (u_2(x) - u_2(y))) dy$$

platí, že $K(x, y), \varrho(x), \varrho(y) > 0$. A jelikož rozdíl $S_1^{(1)} - S_2^{(2)}$ závisí přímo na rozdílech $(u_1 - u_2)$, který je vážený kladnými konstantami, můžeme říct, že oba součinitele budou mít stejné znaménko, tudíž bude vždy kladný.

Po zintegrování v čase obdržíme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2(t) dx \\ & \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) + (u_1 - u_2)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)(0) dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sečteme výsledky z (3.1) a (3.7) obdržíme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2(t) + \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx \leq \int_0^t \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2(s) (\|\partial_x u_1\|_{L^\infty} + 1) dx ds \\ & + C \int_0^t \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) + (u_1 - u_2)^2 dx ds + \int_0^t \|\partial_x (\varrho_2 (u_1 - u_2))\|_2^2 ds \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)(0) + \varrho_1 (u_1 - u_2)(0) dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dále pro jednoduchost zápisu předpokládáme, že C je konstanta, která se může měnit řádek od řádku, nicméně je stále nezávislá na řešení. Pak po použití Youngovy nerovnosti na

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2) (\varrho_1 - \varrho_2) dx ds \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2 + (\varrho_1 - \varrho_2)^2 dx ds,$$

odhadneme (3.8) jako

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2(t) + \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 + (u_1 - u_2)^2 dx ds \\ & + \int_0^t \|\partial_x (\varrho_2 (u_1 - u_2))\|_2^2 ds + C \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)(0, x) + \varrho_1 (u_1 - u_2)(0, x) dx. \end{aligned}$$

3.1 Předpokládaná regularita

Uvažujme rovnice (3.1) a (3.7) z předchozí kapitoly. Necht' platí $\varrho_1 > C > 0$. Dále na chvíli předpokládáme, že platí

$$C \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2 dx \leq \int_{\mathbb{T}} \varrho_1 (u_1 - u_2)^2 dx$$

Nechť dále na chvíli platí, že

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}} (\partial_x(u_1 - u_2))^2 dx ds \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 + (u_1 - u_2)^2 dx ds. \quad (3.9)$$

Pak v tomto ideálním případě přepíšeme (3.6) jako

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (\varrho_1 - \varrho_2)^2 + (u_1 - u_2)^2 dx \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2 + (\varrho_1 - \varrho_2)^2 dx ds + C \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2(0, x) + (\varrho_1 - \varrho_2)^2(0, x) dx$$

Nyní v tom již můžeme rozpoznat Gronwallovu nerovnost,

$$\int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2(t, x) + (\varrho_1 - \varrho_2)^2(t, x) dx \leq \frac{C}{2} \int_{\mathbb{T}} (u_1 - u_2)^2(0, x) + (\varrho_1 - \varrho_2)^2(0, x) dx \cdot e^t$$

Z toho plyne

- **Jednoznačnost:** Pokud platí $\varrho_1 - \varrho_2 = 0$ a zároveň pokud $u_1 - u_2 = 0$ pro $t = 0$ vyplývá, že $\varrho_1 = \varrho_2$ a $u_1 = u_2$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.
- **Stabilita:** Pokud $\|(\varrho_1 - \varrho_2)(0)\|_{L^2}^2 + \|(u_1 - u_2)(0)\|_{L^2}^2 < \varepsilon$. Pak z Gronwallovy nerovnosti plyne, že $\|(\varrho_1 - \varrho_2)(t)\|_{L^2}^2 + \|(u_1 - u_2)(t)\|_{L^2}^2 < \varepsilon e^t$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

3.2 Pomocné výpočty

Pomocné výpočty a odhady pro odvození jednoznačnosti. Rovnice (3.9) vyžaduje velice restriktivní předpoklady. Mějme rovnice

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u^2) &= 0 \\ \varrho \partial_t u + \varrho u \partial_x(u) &= \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(x) \varrho(y) (u(x) - u(y)) dy + F(\varrho, u). \end{aligned}$$

Druhou rovnici vydělíme ϱ , obdržíme

$$\partial_t u + u \partial_x(u) = \int_{\mathbb{T}} K(x, y) \varrho(y) (u(x) - u(y)) dy + \frac{F(\varrho, u)}{\varrho}.$$

Nechť pro další účely platí pro $s > \frac{1}{2}$

$$(-\Delta^s)u = \int_{\mathbb{T}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+2s}} dx.$$

Předpokládejme nyní $K(x, y) = K_1(x, y) = \frac{1}{|x - y|^{1+2s}}$, pak platí

$$\partial_t u - \int_{\mathbb{T}} \varrho(y) \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+2s}} dy = -u \partial_x u + F(\varrho, u). \quad (3.10)$$

3.3 Odvození odhadu

Pro tuto kapitolu navíc dále předpokládáme, že ϱ_1, ϱ_2 jsou konstantní. Předpokládáme dvě různá řešení $(\varrho_1, u_1), (\varrho_2, u_2)$ rovnice (3.10)

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 - \varrho_1(-\Delta)^s(u_1) &= -u_1 \partial_x u_1 + F(\varrho_1, u_1) \\ \partial_t u_2 - \varrho_2(-\Delta)^s(u_2) &= -u_2 \partial_x u_2 + F(\varrho_2, u_2)\end{aligned}$$

Navzájem odečteme a máme

$$\partial_t(u_1 - u_2) - \varrho_1(-\Delta)^s(u_1 - u_2) = -u_1 \partial_x u_1 - u_2 \partial_x u_2 + F(\varrho_1, u_1) - F(\varrho_2, u_2) + (\varrho_2 - \varrho_1)(-\Delta)^s u_2$$

Nyní podle [7, Věta 3.1] a [7, Příklad 3.2 E] pak platí následující

$$\begin{aligned}\int_0^t \|u_1 - u_2\|_{W^{2s,2}}^2 &\leq \int_0^t \|u_1 \partial_x u_1 - u_2 \partial_x u_2 + F(\varrho_1, u_1) - F(\varrho_2, u_2) + (\varrho_2 - \varrho_1)(-\Delta)^s u_2\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \left[\|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 \|\partial_x u_1\|^2 + \|u_2(\partial_x u_1 - \partial_x u_2)\|_{L^2}^2 + Lip_F \left(\|\varrho_1 - \varrho_2\|_{L^2}^2 + \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \|\varrho_2 - \varrho_1\|_{L^2}^2 \|(-\Delta)^s u_2\|_{L^\infty}^2 \right] \\ &\leq C \|\varrho_2 - \varrho_1\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Za předpokladu, že $\|(-\Delta)^2 u_2\|_{L^\infty}^2$ je omezený. Necht' je dále u_2 omezené pak taktéž platí

$$\|u_2 \partial_x(u_1 - u_2)\|_{L^2}^2 \leq c \|u_1 - u_2\|_{W^{1,2}}^2 \leq \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 + \delta \|u_2 - u_1\|_{W^{2s,s}}^2,$$

δ je libovolně malé. Po zvolení $\delta = \frac{1}{2}$ se některé členy odečtou a platí

$$\frac{1}{2} \int_0^t \|u_1 - u_2\|_{W^{2s,2}}^2 \leq C \int_0^t \|u_1 - u_2\|^2 + C \int_0^t \|\varrho_1 - \varrho_2\|^2.$$

Podle Sobolevova vnoření pro poslední nerovnost platí

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_0^t \|\partial_x(u_1 - u_2)\|_{L^2}^2 ds &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|u_1 - u_2\|_{W^{2s,2}}^2 ds \\ &\leq C \int_0^t \|u_1 - u_2\|^2 + C \int_0^t \|\varrho_1 - \varrho_2\|^2.\end{aligned}$$

Pak už nahlédneme, že platí (3.9).

Kapitola 4

Numerické výpočty

Popíšme si základní numerické řešení metodou konečných diferencí a numerická schémata, pomocí kterých budeme řešit výše odvozené rovnice.

Metoda konečných diferencí je založená na předpokladu, že derivace můžeme aproximovat pomocí rozdílů jejích hodnot v diskrétních bodech takzvaných diferencí. To znamená, že místo kontinuálního průběhu funkce budeme pracovat s jejími hodnotami v pevně daných bodech a napočítávat difference v těchto bodech.

Aproximaci první derivace funkce $f(x)$ v bodě x lze vytvořit pomocí hodnoty v tomto bodě a hodnoty v bodě, který je v bezprostřední blízkosti Δx , tzv. krok na síti. Máme několik druhů základních diferencí

- Dopředná diference: $\partial_x f \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
- Zpětná diference: $\partial_x f \approx \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$
- Centrální diference: $\partial_x f \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$.

Dopředná diference napočítává hodnotu pomocí následujícího bodu na síti, zpětná pomocí předchozího a centrální kombinuje přístup obou dvou. Přesnost těchto metod závisí na velikosti kroku Δx . Musíme najít takovou přiměřenou velikost prostorového kroku, aby časový krok, počítaný u časových derivací, nebyl příliš malý, nebo naopak velký a naše schéma bylo stabilní. Mezní velikost prostorového a časového kroku definuje takzvaná Courant-Friedrichs-Lewyho (CFL) podmínka. Specifikuje omezení na velikost časového kroku v numerických simulacích a zaručuje tak stabilitu řešení. Pro případ jednoduché lineární advekční rovnice

$$u_t + au_x = 0,$$

kde bez újmy na obecnosti $a > 0$ je konstantní rychlost advekce. Courant-Friedrichsovu podmínka γ je zavedena následovně

$$\Delta t = \frac{\gamma \Delta x}{|a|}, \quad (4.1)$$

kde

- Δt je časový krok
- Δx je prostorový krok sítě
- γ je bezrozměrný koeficient mezi $(0, 1)$.

4.1 Lax-Fridrichsovo diferenciální schéma

Lemma 4.1.1. *Uvažujme lineární advekční rovnici ve tvaru*

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

kde a je konstanta reprezentující rychlost. Tato rovnice je definována na jednorozměrné oblasti $x \in [X_0, X_N]$. Diskretizujeme tento kontinuální prostor na jednorozměrnou síť s prostorovými a časovými kroky Δx a Δt . Počáteční podmínka je dána funkcí $u(x, 0) = u_0(x)$ a okrajové Dirichletovy podmínky jsou specifikovány jako $u(X_0, t) = u_{X_0}(t)$ a $u(X_N, t) = u_{X_N}(t)$.

Definujme aproximaci řešení $u(x, t)$ na síti jako

$$\hat{u}(x_i, t^n) = u_i^n,$$

kde $x_i = X_0 + i\Delta x$ a $t^n = n\Delta t$, kde

$$\begin{aligned} x_i &= b + i\Delta x & i &\in 0, \dots, N, \\ t^n &= n\Delta t & n &\in 0, \dots, M. \end{aligned}$$

Zde N je počet prostorových dělení síti při kroku Δx a M je počet časových kroků do času T při kroku Δt . Poté Lax-Friedrichsova metoda aproximuje advekční diferenciální rovnici s danými počátečními a okrajovými podmínkami jako

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} + a \frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2\Delta x} = 0,$$

což lze přepsat pro neznámou u_i^{n+1} v časové vrstvě $n + 1$ jako

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n).$$

Lemma 4.1.2. *Pro nelineární hyperbolický systém rovnic zákonů zachování lze předchozí lemma přepsat do zobecněného tvaru pomocí toku $f = f(u)$ jako*

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)).$$

Odvození jednotlivých lemmat je možné k nahlédnutí v příložené literatuře [1][2]. Lax-Fridrichsovo schéma je explicitní, tzn. hodnota v novém časovém kroku závisí pouze na hodnotách z předchozího kroku. Další výhodou je snadná aplikace stability pomocí CFL podmínky $|\frac{\Delta t}{\Delta x}| \leq 1$ a také to, že uměle přidává numerickou viskozitu či difuzi a vyhlazuje tak skoky v numerickém řešení. Zamezuje tak oscilacím, které by v řešení mohly vzniknout, a díky tomu přidává schématu na stabilitě.

Poznámka 4.1.3. *Když budeme uvažovat $f(u) = au$, dostaneme lineární problém.*

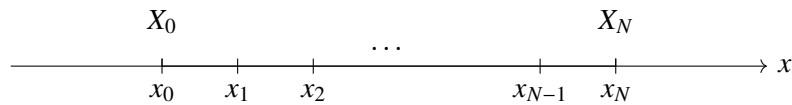
Poznámka 4.1.4. *Příčemž $u = u(x, t)$ může být vektor o $m \in \mathbb{N}$ dimenzích. V takovém případě řešíme soustavu m rovnic.*

4.2 Diskretizace prostoru a volba jednotek

Nyní se zaměříme na diskretizaci prostoru a volbu jednotek pro numerické řešení (1.5). Uvažujme jednorozměrnou oblast reprezentovanou úsečkou. Tuto oblast rozdělíme do N rovnoměrně rozložených podintervalů, tedy vytvoříme síť, kde každý bod x_i je definován vztahem

$$x_i = X_0 + i\Delta x, \quad i \in 0, \dots, N,$$

kde X_0 je počáteční bod prostoru, Δx je prostorový krok a N je celkový počet bodů sítě.



Co se týče časového kroku, budeme chtít splnit CFL podmínku diskutovanou výše (4.1) v každém časovém kroku. Hodnota CFL by se měla blížit k jedné a rychlost c bereme jako maximum ze všech rychlostí v jednom časovém kroku.

V rámci numerických simulací, včetně aplikace Lax-Friedrichsova schématu na rovnice (1.5), je běžné použít bezrozměrné jednotky. Tento přístup je v souladu s konceptem bezrozměrnosti ve fyzice, který uvádí, že fyzikální zákony jsou invariantní vůči volbě soustavy jednotek. Získáme tak vyšší obecnost, zjednodušení numerické analýzy a výsledky lze snadněji aplikovat na různé fyzikální systémy. Teoreticky se zvýší i numerická stabilita a efektivita, protože lze odstranit problémy s příliš malými či velkými čísly.

4.3 Počáteční a okrajové podmínky

Tato kapitola se zabývá definicí počátečních a okrajových podmínek, které představují základní stavební kameny pro numerické simulace. Správná formulace těchto podmínek je zásadní pro dosažení fyzikální věrohodnosti, stability a přesnosti výsledků simulace. V první části jsou rozebrány počáteční podmínky modelu, zatímco druhá část se zaměřuje na aplikaci periodických okrajových podmínek.

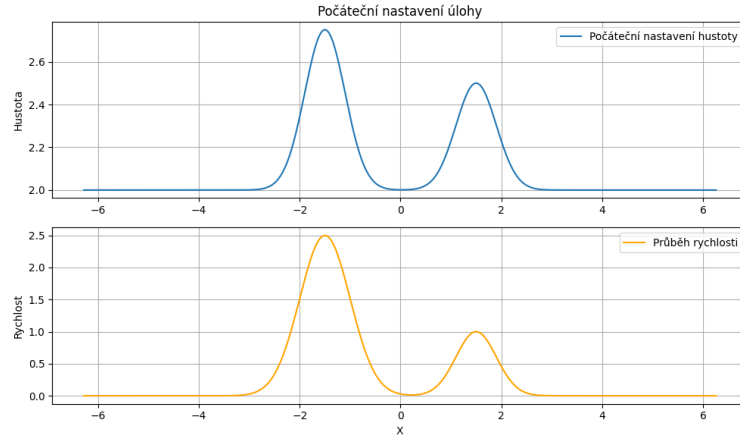
4.3.1 Počáteční podmínky

Počáteční podmínky v numerických simulacích představují základní stavební kámen pro studium vývoje dynamiky systémů. Tyto podmínky jsou nastaveny pro hustotu a rychlost v prostorové doméně a mají zásadní vliv na vývoj simulace. Počáteční stav hustoty $\varrho(x, 0)$ je modelován jako kombinace dvou Gaussových funkcí posunutých v prostoru, konkrétně

$$\varrho(x, 0) = h_1 \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + h_2 \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} + 1 \quad h_{1,2}, \sigma_{1,2} > 0, \mu_{1,2} \in \mathbb{R},$$

kde h představuje amplitudu každého vrcholu, μ je střední hodnota (poloha vrcholu) a σ je standardní odchylka, která určuje šířku vrcholu. Přidání konstanty $+1$ zajišťuje nenulovost hustoty pro stabilní numerické výpočty.

Počáteční rychlost $u(x, 0)$ je definována tak, aby byly rozdílly mezi oblastmi kolem jednotlivých vrcholů hustoty. Tento asymetrický přístup vytváří podmínky pro dynamickou interakci mezi vrcholy, což umožňuje pozorovat komplexní chování systému během simulace. Ilustraci konkrétní konfigurace počáteční hustoty a rychlosti poskytuje obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Počáteční hustota a rychlost

4.3.2 Okrajové podmínky

V kontextu našeho modelu, který pro jednoduchost v jedné dimenzi může připomínat pohyb částic na kružnici, jsou zavedeny periodické okrajové podmínky. Tyto podmínky jsou vhodné pro simulaci uzavřeného systému, kde vstup a výstup částic jsou spojeny v jednotný kontinuální tok. Matematicky lze tyto podmínky formulovat jako

$$\varrho(0, t) = \varrho(x_N, t) \quad \text{a} \quad u(0, t) = u(x_N, t),$$

kde x_N je poslední bod v prostoru. Tento přístup zajišťuje, že hodnoty na jednom konci prostoru jsou spojeny s hodnotami na opačném konci, čímž se vytváří neustálý cyklus v čase a prostoru. Tato kontinuita napodobuje například chování automobilů na kruhovém objezdu bez emise či připojování dalších účastníků provozu, což je klíčové pro zachování celkové hustoty v systému a umožňuje nám sledovat čistě efekty interakcí.

4.4 Aplikace Lax Friedrichse na problém v jedné dimenzi

Nyní aplikujeme obecné Lax-Friedrichsovo schéma na soustavu rovnic (1.5) a odvodíme si jejich numerický tvar. Začneme s první rovnicí $\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0$, kterou přepíšeme do tvaru

$$\varrho_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\varrho_{i+1}^n + \varrho_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (\varrho_{i+1}^n u_{i+1}^n - \varrho_{i-1}^n u_{i-1}^n).$$

Pro přepsání druhé rovnice si budeme muset poradit s členem $S^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \varrho(x) \varrho(y) (u(x) - u(y)) dy$. V tomto členu chceme pro každý bod napočítat jeho interakci se zbylými body v diskretizované oblasti. Zajistíme to pomocí dvojnásobné sumy, která bude procházet všechny body oblasti, a získáme následující aproximaci

$$S^{(1)} \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(x_i, y_j) \varrho(x_i) \varrho(y_j) (u(x_i) - u(y_j)).$$

Přičemž $K(x, y)$ aproximujeme pomocí

$$K_2(x_i, y_j) \approx \frac{1}{(1 + (x_i - y_j)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Zde můžeme využít kapitoly 1.1 a použít pěti nebo desetiprocentní hranici vlivu. Tak lze zjednodušit výpočet interakce hustoty počítáním interakce pouze v nejbližších bodech spadajících do intervalu s dostatečnou mírou vlivu.

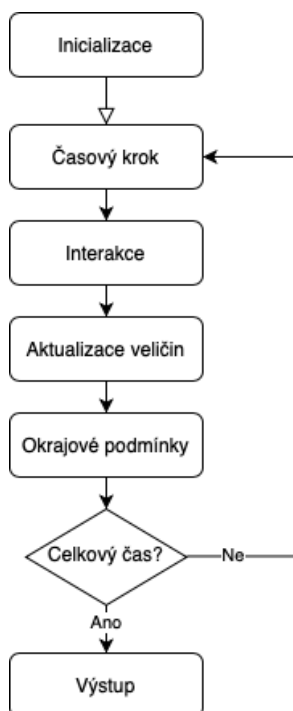
Další faktor je samotné modelování propustné překážky, kterou vložíme libovolně do oblasti. Člen obsahující sílu jednoduše dle (1.4) zapíšeme ve tvaru $\varrho(x_i, u_i)F(x_i, u_i)$. Využijeme-li konzervativního tvaru pro hybnost $m = \varrho u$, můžeme již přepsat druhou rovnici do tvaru

$$m_i^{n+1} = \frac{1}{2} (m_{i+1}^n + m_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (m_{i+1}^n u_{i+1}^n - m_{i-1}^n u_{i-1}^n) - \Delta t S_i^{(1),n} + \Delta t \varrho_i^n F_i^n. \quad (4.2)$$

4.5 Algoritmus výpočtu

Shrňme nyní celý algoritmus numerické simulace popsany v předchozích kapitolách do několika krátkých kroků

1. Inicializace oblasti, parametrů, počátečních podmínek a dalších veličin
2. Cyklus končící dosažením celkového času simulace
 - Určení velikosti časového kroku
 - Výpočet interakce a síly působící mezi částicemi
 - Aktualizace makroskopických veličin v daném časovém kroku
 - Splnění okrajových podmínek
3. Ukončení a výstup



Obrázek 4.2: Diagram algoritmu

4.6 Poznámky k implementaci

Numerické řešení bylo sepsáno ve vlastním kódu v programu PyCharm CE v jazyce Python ve verzi 3.10. K implementaci kódu stačily základní knihovny, zejména knihovna Numpy, která využívá své nástavby z jazyka C, C++ pro efektivnější vektorové operace. Dále jsme využili knihovny Matplotlib pro vizualizaci výsledků a grafů. Samotné výpočty byly prováděny na vlastním zařízení.

V kódu byl oproti základním numerickým schématům definovaným v úvodu kapitoly 4 implementován koeficient ε pro porovnání dopředného a Lax-Friedrichsova diferenciálního schématu. Můžeme to pro jasnější představu vidět v následující rovnici

$$q_i^{n+1} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon (q_{i-1}^n + q_{i+1}^n) + (1 - \varepsilon) \cdot q_i^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (m_{i+1}^n - m_{i-1}^n).$$

Odkaz na knihovnu GitHub: https://github.com/SteveLikesToDebug/Numeric_solution_CS_model.

Kapitola 5

Numerické výsledky

V této kapitole uvedeme numerické výsledky získané ze simulací kombinováním předchozích schémat z kapitoly 4, přednost je dáována Lax Friedrichsově diferenciálnímu schématu. Hlavním cílem je zjistit, jak se vyvíjí hustota částic v jedné dimenzi v čase, jak spolu interagují a jak se chovají, vložíme-li jim do cesty polopropustnou překážku.

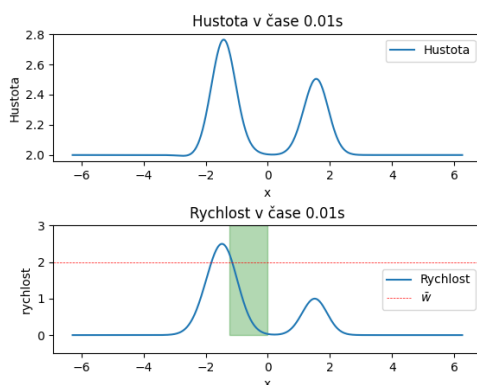
5.1 Nastavení parametrů simulace

V první fázi simulace je definována oblast a parametry, se kterými budeme simulace provádět. Délka intervalu Ω byla zvolena jako $(-2\pi; 2\pi)$, aby umožnila dostatečnou zřejmost interpretovaných výsledků. Počet prostorových kroků byl zvolen na 501 bodů, což zajistilo dostatečně přesné modelování, zatímco byly zachovány periodické okrajové podmínky. Lichý počet kroků byl zvolen kvůli symetrii systému při modelování překážky uprostřed mřížky. Celkový charakteristický čas simulace byl stanoven na 20 jednotek jako přibližná charakteristická rychlost a vzdálenost simulace.

Počáteční podmínky byly zvoleny dle kapitoly 4. Konkrétně pro polohu $\mu_{1,2} = \pm 1,5$, $\sigma_{1,2} = 0,4$, $h_1 = \frac{3}{4}$, $h_2 = \frac{2}{4}$. Pro rychlost se měnily konstanty $h_1 = 2,5$, $h_2 = 1$.

Koeficient CFL byl nastaven na 1 tak, aby zajistil stabilní chování simulovaného systému. Koeficient ε byl měněn v rozmezí 0 a 1 pro porovnání vlivu umělé difuze na řešení problému.

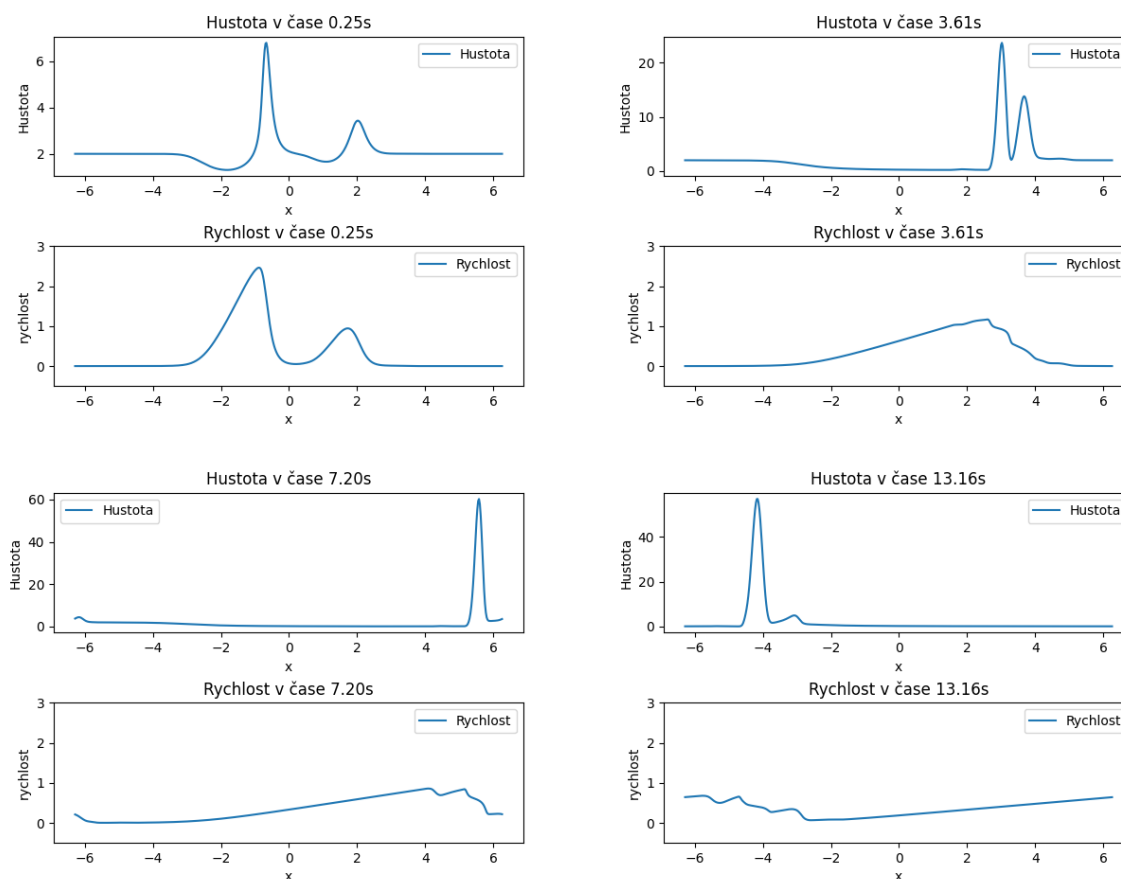
V dalším obrázku 5.1 můžeme vidět počáteční nastavení systému pro $CFL = 1$, $\varepsilon = 1$, šířka interakčního jádra je nastavena na pětiprocentní hranici, síla začíná působit na částice ve vzdálenosti deseti procent celkové délky intervalu.



Obrázek 5.1: Počáteční nastavení úlohy pro parametry diskutované v textu výše

5.2 Model bez překážky

Tato sekce se zaměřuje na základní model bez externích sil, což umožňuje analyzovat vnitřní dynamiku systému. Tato část je zásadní pro základní porozumění úvodního modelu (4). Je zde uvedeno pro ilustraci pouze pár obrázků zásadních změn v průběhu simulace.

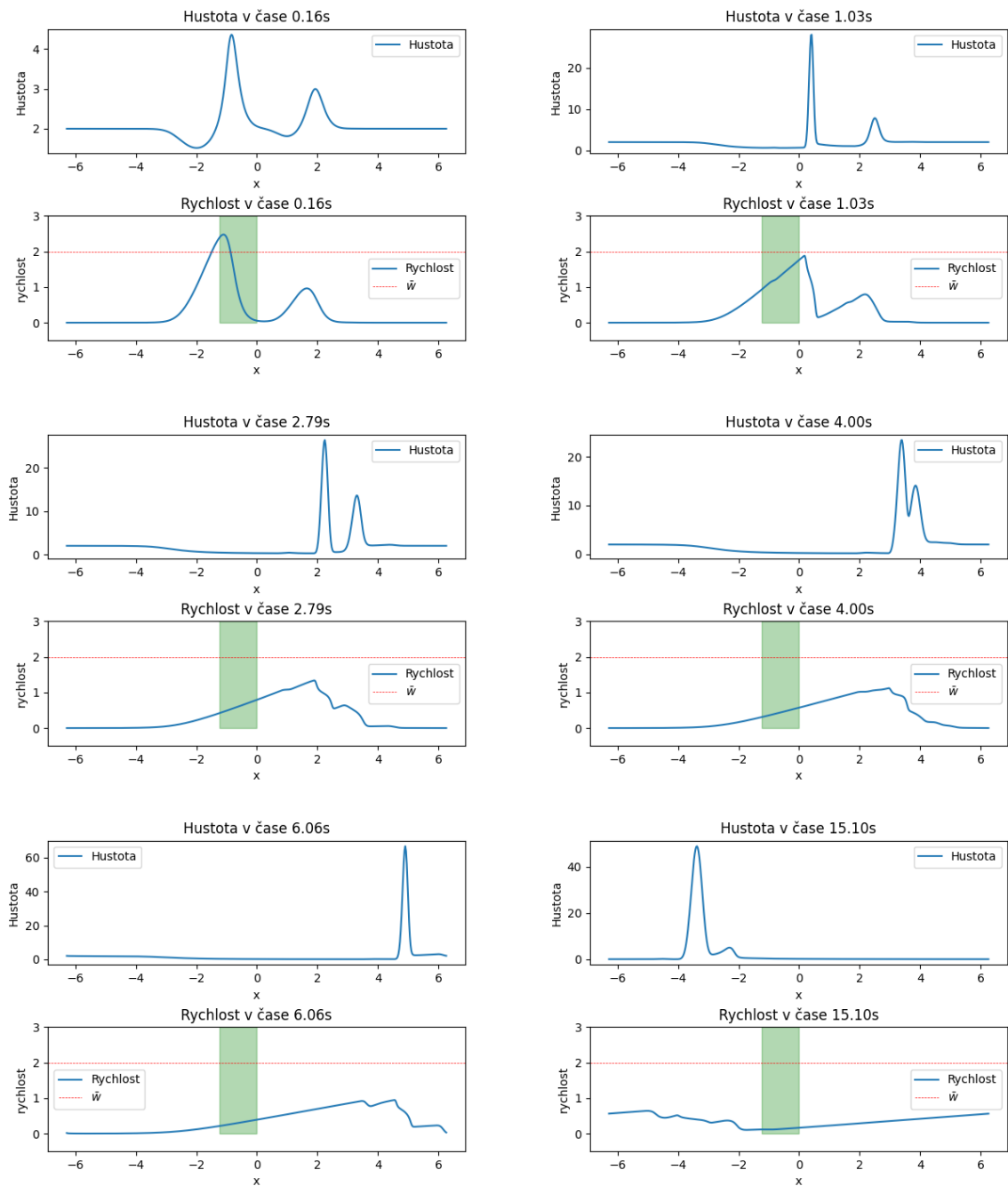


Obrázek 5.2: Znázornění vývoje hustoty a rychlosti pro základní model

Za povšimnutí stojí oproti obrázkům 5.1 interakční člen, který na prvním obrázku sníží okolní hustotu u obou vrcholů a přitahuje okolní hustotu k sobě. Dále vidíme díky rozdílnému nastavení rychlostí obou vrcholů, jak jeden z nich pohltí druhý. Rychlost se v důsledku působení interakce a jejího vlivu na hybnost systému v průběhu postupně snižuje.

5.3 Model s propustnou překážkou

V poslední části jednorozměrného modelu je aplikována nenulová externí síla, která umožňuje prozkoumat změnu v chování systému v rámci působení této síly. Síla je popsána v kapitole 1.4. Pokud ji umístíme doprostřed intervalu, bude působit proti pohybu na hustotu v nejbližších deseti procentech celkové vzdálenosti intervalu před překážkou. Znázornění samotné síly je na obrázku 1.2. Řešené rovnice budou nyní ve tvaru (1.5).

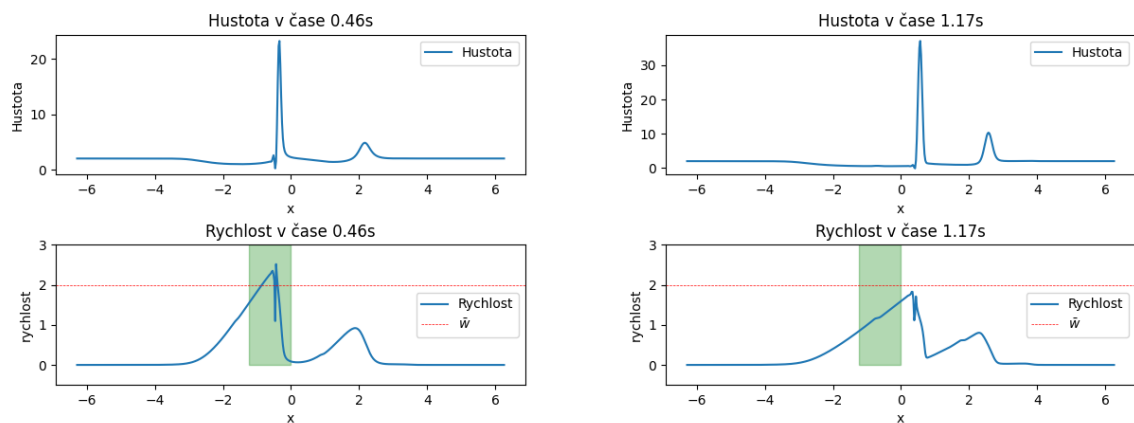


Obrázek 5.3: Simulace vývoje hustoty a rychlosti pro rozšířený model o sílu

Na obrázcích 5.3 můžeme zpozorovat nejdříve vliv síly na první z vrcholů, kdy se ve vymezené oblasti výrazně zhustí počet částic v prostoru a rychlost se sníží na požadovanou hranici. Dále můžeme pozorovat, že rychlost i dále klesá vlivem interakčního členu. V poslední řadě obrázků 5.3 je vidět zachování okrajové podmínky a ustálení hustoty a rychlosti.

5.4 Poznámky k výsledkům

V kapitole 4.6 jsme si uvedli, že budeme porovnávat kombinaci použití dvou diferenciálních schémat. V programu jsme vzali procentuální část z dopředného diferenciálního schématu a zbylou z Lax-Friedrichsova schématu. Pomocí $\varepsilon = 0.7$ jsme určili míru použití sedmdesáti procent v Lax-Friedrichsově diferenciálním schématu, při kterém se již stává kombinace nestabilní a již po několika krocích jsou vidět skoky naznačující nespojitosti a problémy při napočítávání diferenciálů.



Obrázek 5.4: Porovnání kombinace diferenciálních schémat

Kapitola 6

Rozšíření rovnic o tlak $P(\varrho)$

V této kapitole se budeme věnovat přímo rovnicím (2). Zásadním rozdílem při aplikaci tlaku $P(\varrho)$ v rovnicích (2) oproti rovnicím (1.1) je ten, že nyní již nebude platit mono-kinetický ansatz (3). Díky tomu budeme řešit již klasické hyperbolické rovnice diskutované v kapitole 1.1. Další změna spojená s neužitím mono-kinetického ansatzu nastává při výpočtu síly (1.3) reprezentující propustnou překážku na pravé straně rovnic.

6.1 Výpočet síly reprezentující propustnou překážku

V bakalářské práci [12] jsme si uvedli, že pro výpočet síly bez aplikace mono-kinetického ansatzu budeme muset sílu (1.3) počítat pomocí integrálu

$$F(x, u) = \int_{\mathbb{R}} F(x, \xi) f(t, x, \xi) d\xi. \quad (6.1)$$

Uvažujme nyní pro jednoduchost, že $f(t, x, v)$ má normální rozdělení částic, to znamená $f(t, x, \xi) = \varrho(t, x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\xi)^2}{2}}$. Poté můžeme sílu (6.1) přepsat do tvaru

$$F(x, u) = \int_{\mathbb{R}} F(x, \xi) \frac{\varrho(t, x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\xi)^2}{2}} d\xi = \frac{\chi_{(0, \bar{r})}(x)}{\sqrt{8\pi\bar{r}^2}} \varrho(t, x) \int_{\bar{w}}^{\infty} (\xi^2 - \bar{w}^2) e^{-\frac{(u-\xi)^2}{2}} d\xi.$$

Takto odvozená síla nemá analytické vyjádření, ale můžeme ji spočítat numericky, když nahradíme integrál pomocí sumy jako

$$\int_{\bar{w}}^{\infty} (\xi^2 - \bar{w}^2) e^{-\frac{(u-\xi)^2}{2}} d\xi \approx \sum_{i=0}^N (\bar{\xi}_i - \bar{w})^2 e^{-\frac{(u-\bar{\xi}_i)^2}{2}} \Delta\bar{\xi},$$

kde $\bar{\xi}_i = \bar{w} + i\Delta\bar{\xi}$. Získáme tedy, že konečná síla $F(x, u)$ se napočítá jako

$$F(x, u) = \frac{\chi_{(0, \bar{r})}(x)}{\sqrt{8\pi\bar{r}^2}} \varrho(t, x) \sum_{i=0}^N (\bar{\xi}_i - \bar{w})^2 e^{-\frac{(u-\bar{\xi}_i)^2}{2}} \Delta\bar{\xi}. \quad (6.2)$$

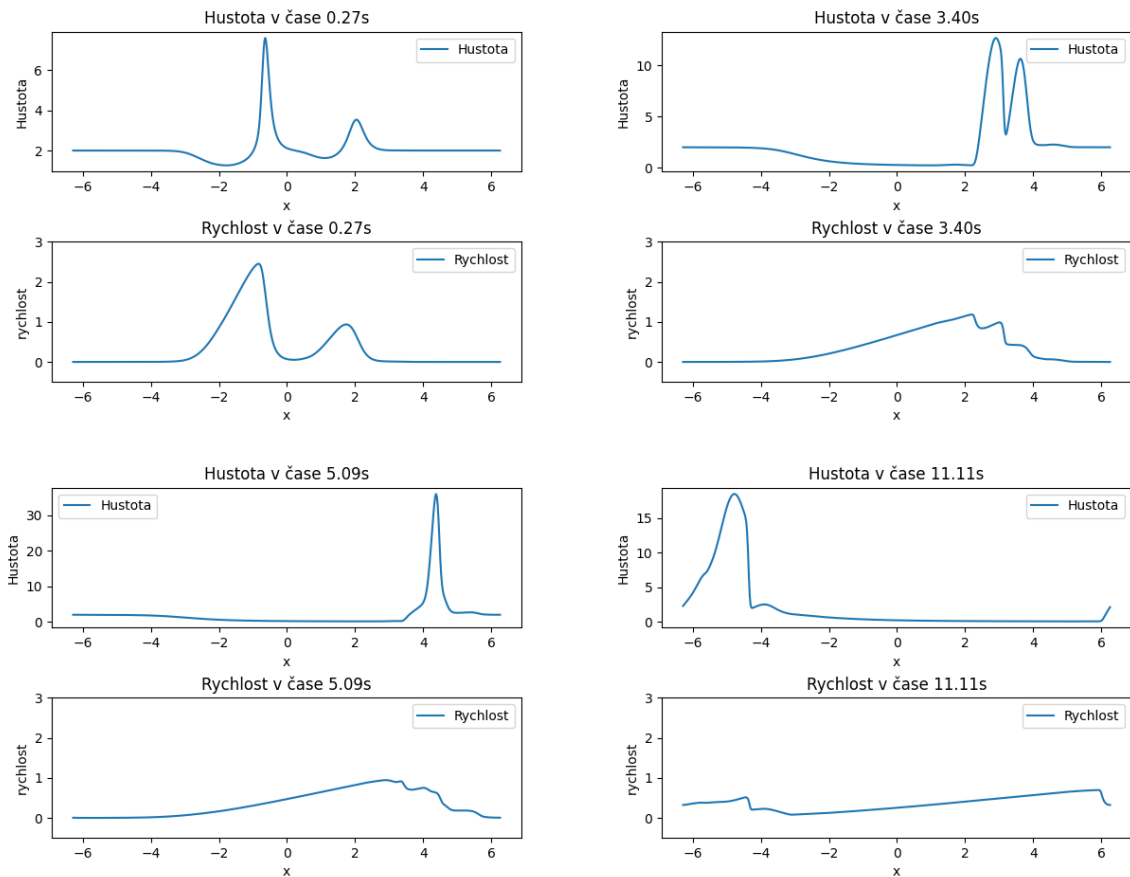
6.2 Řešení hyperbolických rovnic

Nejprve se podívejme na výsledné řešení rovnic (2) bez pravé strany. Uvažujme stejné nastavení úlohy, jak bylo diskutováno v kapitole 4, máme tedy stejné parametry, periodické okrajové podmínky i

počáteční podmínky jako na obrázku 5.1. Jediné, co se mění, je rovnice pro výpočet hybnosti (4.2), ve které přibude tlak v následující podobě

$$m_i^{n+1} = \frac{1}{2}(m_{i+1}^n + m_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(m_{i+1}^n u_{i+1}^n - m_{i-1}^n u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(P_{i+1} - P_{i-1}) - \Delta t S_i^{n(1)} (+\Delta t \varrho_i^n F_i^n).$$

Tlak jsme definovali jako $P(\varrho) = \alpha \varrho^\phi$ pro α větší než nula a ϕ větší než jedna. V následujících obrázcích 6.1 je vyobrazena simulace hustoty a rychlosti hyperbolických rovnic (2) v čase.



Obrázek 6.1: Znázornění vlivu tlaku

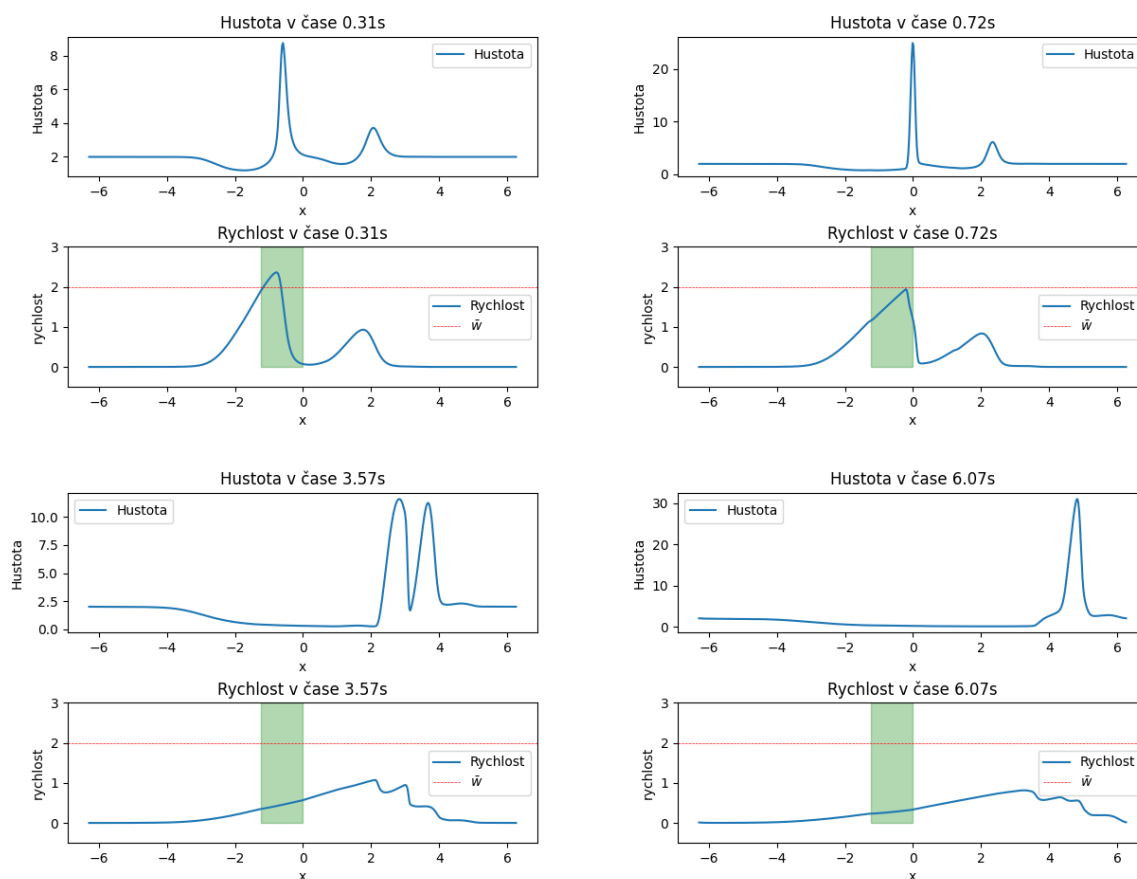
Zprvu se pohyb hustoty vyvíjí velice podobně jako v obrázcích (5.2). Avšak v pozdější části simulace se začne promítat vliv tlakové síly, ten se v grafu projeví značným snížením vrcholu hustoty a jeho rozšířením do větší oblasti.

6.3 Řešení hyperbolických rovnic s pravou stranou

V této kapitole si znázorníme řešení hyperbolických rovnic (2), ve kterých budeme navíc uvažovat ještě sílu (6.2) vystupující na pravé straně, jejíž výpočet jsme si odvodili v kapitole 4. Tyto rovnice nabudou tvaru

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) &= 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u \otimes u) + \nabla_x P(\varrho) + S^{(1)} &= F(x, u). \end{aligned}$$

V následujících několika obrázcích 6.2 je k vidění vliv síly působící na vývoj hustoty a rychlosti částic pouze v zeleně vyznačené oblasti. Důraz je kladen na samotný vliv síly, kdy vidíme razantnější zpomalení pohybu hustoty v zelené oblasti představující vliv překážky na pohyb částic. Na poslední dvojici obrázků v 6.2 lze porovnat finální stav systému po sjednocení obou vrcholů. V porovnání s obrázkem 6.1 vidíme samotný vliv síly na zpomalení částic a sjednocení obou vrcholů z obrázků 6.2.



Obrázek 6.2: Zachycení vlivu síly v úplných rovnicích

6.4 Plány do budoucna

V rámci této práce byla použita pouze základní verze Lax-Friedrichsova schématu v jedné dimenzi. V rámci rozšíření a pokračování bych se rád zaměřil na dokončení implementace modifikované verze Lax-Friedrichsova schématu, které přidává druhou derivaci reprezentující umělou difuzi. Toto schéma by mělo přidat dodatečnou stabilitu, avšak stává se nestabilním, pokud se časový krok blíží nule. Uvažujme nyní rovnice (2.1) bez interakcí a externích sil. Pak jde o řešení Eulerových rovnic, které napíšeme ve tvaru

$$u_t + f(u)_x = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \varrho u \\ \varrho uu + P(\varrho) \end{bmatrix}_x = 0.$$

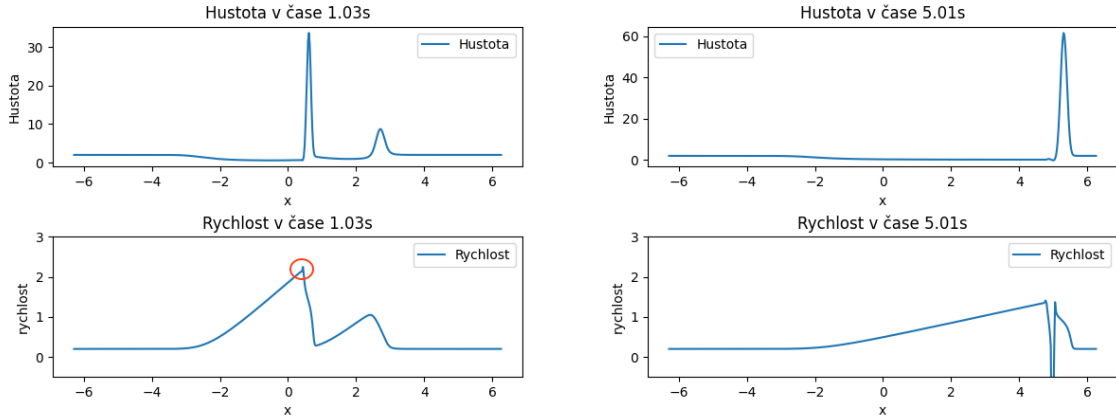
Pak podle [1] lze odvodit modifikovanou rovnici

$$u_t + f(u)_x = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) u_{xx},$$

kde $\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Modifikované Lax-Friedrichsovo schéma v explicitním tvaru je dáno rovnicí

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{1}{2}\gamma(f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) - \frac{1}{2}\gamma^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n).$$

Momentálně po implementaci těchto rovnic dostávám nestabilní řešení, kde se kumuluje chyba u výpočtů rychlostí, což vede k nerealistickým hodnotám a oscilacím. Znáznorněno na dalším obrázku



Obrázek 6.3: Kumulující se chyba v modifikovaném Lax-Friedrichsově schématu

Další možností by bylo rozšířit tyto jednodimenzionální rovnice o další interakční členy, které přidávají do modelu například zrychlení nebo jiné druhy interakcí.

Dále bych se rád zaměřil na převedení problému do dvou dimenzí, kde pracujeme s rovnicemi tvaru

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x P(\rho) + S^{(1)} &= \rho F(x, u). \end{aligned}$$

Bez interakce a externích sil, přepíšeme jako klasické Eulerovy hyperbolické rovnice, které mají tvar

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ \varrho v \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \varrho u \\ \varrho uu + P(\varrho) \\ \varrho uw \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} \varrho v \\ \varrho vw \\ \varrho vv + P(\varrho) \end{bmatrix}_y = 0.$$

Dvoudimenzionální klasické Lax-Friedrichsovo schéma může být odvozeno v explicitním tvaru jako

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) - \frac{1}{2}\gamma[f(u_{i+1,j}^n) - f(u_{i-1,j}^n)] - \frac{1}{2}\gamma[g(u_{i,j+1}^n) - g(u_{i,j-1}^n)],$$

kteří je stabilní pro CFL podmínku menší jak 1/2. V případě dvou dimenzí bych se rád zaměřil na odvození existence a jednoznačnosti problému, je-li to vůbec možné.

Závěr

Tato diplomová práce se zabývala analýzou a numerickými simulacemi modelu kolektivního chování, přičemž hlavním předmětem zkoumání byly diferenciální rovnice odvozené z Cucker-Smaleho modelu. Tento model umožňuje popsat chování skupin agentů, včetně jejich interakcí, synchronizace pohybu a vlivů externích sil, jako jsou překážky v prostředí.

V teoretickém úvodu byl představen Cucker-Smaleho model, který slouží k modelování kolektivního chování a procesů shlukování. Podrobně byly rozebrány základní rovnice a jejich role při popisu interakcí a dynamiky systému. Na základě těchto rovnic byly definovány úlohy pro numerické řešení a následnou simulaci.

Hlavní část práce se zaměřila na teoretickou analýzu rovnic, zejména na zkoumání existence a jednoznačnosti řešení. Důležitým krokem bylo také rozšíření rovnic o nelokální členy popisující interakce mezi agenty a zavedení externích sil reprezentujících překážky. V práci jsme úspěšně ukázali existenci řešení uvažovaných rovnic. Avšak jednoznačnost a stabilita řešení byla dokázána pouze pro velmi omezující podmínky. Zobecnění těchto podmínek je jedno z témat, kterým se budu věnovat do budoucna. Dále byly prezentovány podmínky stabilního a kolabujícího chování systému.

V numerické části byla použita metoda konečných diferencí, konkrétně Lax-Friedrichsovo schéma, pro řešení rovnic v jednorozměrném případě. Numerické simulace znázornily chování systému na jednoduchém příkladě, včetně modelů bez překážek i s překážkami.

Plány do budoucna jsou věnovány rozšíření Cucker-Smaleho modelu o další nelokální interakční členy. Pro takto rozšířený model určit existenci a jednoznačnost systému ve více dimenzích. Následně provést numerické simulace ve více dimenzích za použití modifikovaných schémat. Nakonec navrhnout a aplikovat sestrojený model na reálnou situaci.

Literatura

- [1] Tomáš Bodnár, Philippe Fraunié, and Karel Kozel. Modified equation for a class of explicit and implicit schemes solving one-dimensional advection problem. *Acta Polytechnica*, 61(SI):49–58, 2021.
- [2] Michael Breuss. The correct use of the Lax-Friedrichs method. *M2AN, Math. Model. Numer. Anal.*, 38(3):519–540, 2004.
- [3] Mirko Budinčević. A comparison theorem of differential equations. *Novi Sad J. Math.*, 40(1):55–56, 2010.
- [4] José A. Carrillo, Young-Pil Choi, Eitan Tadmor, and Changhui Tan. Critical thresholds in 1D Euler equations with non-local forces. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(1):185–206, 2016.
- [5] José A. Carrillo, Eduard Feireisl, Piotr Gwiazda, and Agnieszka Świerczewska-Gwiazda. Weak solutions for Euler systems with non-local interactions. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 95(3):705–724, 2017.
- [6] Seung-Yeal Ha, Moon-Jin Kang, and Bongsuk Kwon. A hydrodynamic model for the interaction of Cucker-Smale particles and incompressible fluid. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 24(11):2311–2359, 2014.
- [7] Matthias Hieber and Jan Prüss. Heat kernels and maximal L^p - L^q estimates for parabolic evolution equations. *Commun. Partial Differ. Equations*, 22(9-10):1647–1669, 1997.
- [8] Randall J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Basel etc.: Birkhäuser Verlag, 1990.
- [9] Randall J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Camb. Texts Appl. Math. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [10] Tomáš Roubíček. *Nonlinear partial differential equations with applications*, volume 153 of *ISNM, Int. Ser. Numer. Math.* Basel: Birkhäuser, 2nd ed. edition, 2013.
- [11] Eleuterio F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*. Berlin: Springer, 3rd ed. edition, 2009.
- [12] Štěpán Studenovský. Propustná hranice v hydrodynamických modelech kolektivního chování. *Bakalářská práce, FNSPE CTU, Prague*, 2023.