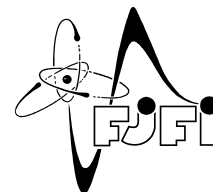




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Pokročilé geometrické metody zpracování obrazu

Advanced geometric methods of image processing

Diplomová práce

Autor: **Bc. Aaron Schick**
Vedoucí práce: **prof. Dr. Ing. Michal Beneš**
Akademický rok: 2024/2025

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Schick** Jméno: **Aaron** Osobní číslo: **486290**
Fakulta/ústav: **Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra matematiky**
Studijní program: **Matematické inženýrství**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Pokročilé geometrické metody zpracování obrazu

Název diplomové práce anglicky:

Advanced geometric methods of image processing

Pokyny pro vypracování:

1. V práci zohledněte nejnovějšími trendy v oblasti zpracování digitálního obrazu s důrazem na difuzní procesy.
2. Prozkoumejte souvislost Allenovy-Cahnovy rovnice s gradientními toky a seznamte se s nejnovějšími trendy zkoumající tzv. Sobolevovy gradienty.
3. Pro analýzu Allenovy-Cahnovy rovnice použijte pokročilé metody matematické analýzy evolučních parciálních diferenciálních rovnic.
4. Použijte numerické řešení Allenovy-Cahnovy rovnice pro vytvoření a rozvoj algoritmů pro geometrické zpracování obrazu.
5. Tyto algoritmy použijte při zpracování obrazových dat získaných z medicínské praxe.

Seznam doporučené literatury:

- [1] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions and J.M. Morel, Axioms and fundamental equations of image processing, Arch. Rat. Mech. Anal. 123, 1993, 200-257
- [2] J.R. Parker, Algorithms for Image Processing and Computer Vision, Wiley, New York, 1996
- [3] M. Beneš, V. Chaloupecký and K. Mikula, Geometrical image segmentation by the Allen-Cahn equation, Applied Numerical Mathematics, 51:2, 2004, 187--205
- [4] G. Sundaramoorthi, A. Yezzi and A. Mennucci, Sobolev Active Contours. In: Paragios, N., Faugeras, O., Chan, T., Schnörr, C. (eds) Variational, Geometric, and Level Set Methods in Computer Vision. VLSM 2005. Lecture Notes in Computer Science, vol 3752. Springer, Berlin, Heidelberg 2005, pp. 109-120
- [5] J. Weickert, Anisotropic Diffusion in Image Processing, ECMI Series, Teubner, Stuttgart, 1998
- [6] G. Aubert, P. Kornprobst, Mathematical Problems in Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, Springer, New York, 2002

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

prof. Dr. Ing. Michal Beneš katedra matematiky FJFI


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Ing. Miroslav Kolář, Ph.D. katedra matematiky FJFI

Datum zadání diplomové práce: **31.10.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **10.05.2024**

Platnost zadání diplomové práce: **31.10.2025**


prof. Dr. Ing. Michal Beneš
podpis vedoucí(ho) práce


prof. Ing. Zuzana Masáková, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


doc. Ing. Václav Čuba, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

9.11.2023

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat svému školiteli prof. Dr. Ing. Michalu Benešovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé diplomové práce. Dále bych chtěl také poděkovat Ing. Miroslavu Kolářovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 6. ledna 2025

Bc. Aaron Schick

Název práce:

Pokročilé geometrické metody zpracování obrazu

Autor: Bc. Aaron Schick

Studijní program: Matematické inženýrství

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš, Katedra matematiky, FJFI, ČVUT

Konzultant: Ing. Miroslav Kolář, Ph.D., Katedra matematiky, FJFI, ČVUT

Abstrakt: Tato práce pojednává o zpracování digitálního obrazu pomocí difuzních metod. Po úvodních kapitolách je nejprve zmíněna lineární rovnice difuze. Dále se práce zaměřuje na nelineární difuzní modely z ní vycházející, které mohou být použity pro potřeby zpracování obrazu. Konkrétně se jedná o Peronovu–Malikovu a Allenovu–Cahnovu rovnici, včetně její modifikace pro automatickou segmentaci. Následně je čtenář uveden do konceptu gradientního toku a Sobolevova gradientu, přičemž je demonstrována jejich souvislost se zmíněnými rovnicemi. Po popsání těchto modelů se práce zabývá jejich aproximativním řešením pomocí schémat založených na metodě konečných diferencí. V poslední kapitole jsou tato schémata aplikována na testovací data, včetně lékařských snímků z magnetické rezonance srdce, a jsou zde demonstrovány vlastnosti gradientních toků podle Sobolevova gradientu.

Klíčová slova: Allenova–Cahnova rovnice, digitální zpracování obrazu, gradientní tok, metoda konečných diferencí, Peronova–Malikova rovnice, segmentace, Sobolevovy gradienty

Title:

Advanced geometric methods of image processing

Author: Aaron Schick

Abstract:

This work deals with digital image processing using diffusion methods. After the introductory chapters, the linear diffusion equation is presented. Next, the work focuses on nonlinear diffusion models, which can be used for image processing purposes. Specifically, it covers the Perona-Malik equation and the Allen-Cahn equation, including its modification for automatic segmentation. Subsequently, the reader is introduced to the concept of the gradient flow and the Sobolev gradient, while demonstrating their connection to the mentioned equations. After describing these models, the thesis addresses their approximate solutions using finite difference method-based schemes. In the final chapter, these schemes are applied to test data, including medical images from cardiac magnetic resonance imaging. The properties of gradient flows with respect to the Sobolev gradient are demonstrated here.

Key words: Allen-Cahn equation, digital image processing, finite difference method, gradient flow, Perona-Malik equation, segmentation, Sobolev gradients

Obsah

Použité značení	9
1 Úvod	11
1.1 Digitální obraz a jeho zpracování	11
1.1.1 Reprezentace digitálního obrazu	12
1.1.2 Rozdělení postupů zpracování obrazu podle úloh	12
1.1.3 Rozdělení postupů zpracování obrazu podle metod	13
1.2 Data z magnetické rezonance srdce	16
1.2.1 Srdeční cyklus	16
1.2.2 Objem srdeční komory a ejekční frakce	17
2 Zpracování obrazu pomocí diferenciálních rovnic difuzního typu	21
2.1 Lineární difuzní rovnice a Peronova–Malikova rovnice	21
2.2 Allenova–Cahnova rovnice	22
2.3 Asymptotická analýza Allenovy–Cahnovy rovnice	23
2.3.1 Vnější rozvoj	24
2.3.2 Vnitřní rozvoj	24
2.4 Segmentační model vycházející z Allenovy–Cahnovy rovnice	28
2.4.1 Silový člen, počáteční podmínky a zastavovací kritérium	28
2.5 Gradientní toky	29
2.5.1 Variační počet	29
2.5.2 Sobolevovy prostory	31
2.5.3 Sobolevovy gradienty	32
3 Numerická schémata	37
3.1 Diskretizace a diferenční náhrady	37
3.2 Allenova–Cahnova rovnice	38
3.3 Segmentační model	39
3.4 Sobolevovy gradienty	40
3.4.1 Difuzní rovnice	41
3.4.2 Allenova–Cahnova rovnice	42
4 Výpočetní výsledky	43
4.1 Allenova–Cahnova rovnice	43
4.2 Segmentační model	47
4.3 Sobolevova difuze	55
4.4 Sobolevova Allenova–Cahnova rovnice	66

Použité značení

MRI	magnetická rezonance
EDV	end-diastolický objem
ESV	end-systolický objem
EF	ejekční frakce
$\partial\Omega$	hranice množiny Ω
$\bar{\Omega}$	uzávěr množiny Ω
$f' \equiv \frac{df}{dx}$	derivace funkce f podle x
$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$	derivace funkce f podle t
$\partial_t u \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$	první parciální derivace funkce u podle proměnné t
$\partial_{xy} u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	druhá parciální derivace funkce u podle proměnných x a y
$\partial_x^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	druhá parciální derivace funkce u podle proměnné x
$\partial_n u \equiv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$	první směrová derivace funkce u ve směru vektoru \mathbf{n}
$\text{dom}(u)$	definiční obor funkce u
$\text{ran}(u)$	obor hodnot funkce u

Kapitola 1

Úvod

Digitální zpracování obrazu je úzce spjato s vývojem digitálních počítačů od 60. let 20. století, kdy již tehdejší počítače disponovaly dostatečnou paměťovou kapacitou a výpočetním výkonem, aby bylo možné provádět smysluplné operace s digitálními obrazy [24]. V důsledku rychlého pokroku výpočetní techniky dnes existuje celá řada metod pro digitální zpracování obrazu, včetně těch, které využívají neuronové sítě. Ty jsou obvykle spojené s velkými datovými sadami. V této práci se však zaměříme na metody založené na difuzních procesech. Tyto metody jsou stále důležité, zejména proto, že slouží jako základní model rozmazání obrazu. Difuzní metody se rovněž uplatňují v technikách strojového učení a neuronových sítí. V pracích [4] a [38] je segmentační křivka popsána pomocí energetického funkcionálu, jehož gradientní tok je evoluční diferenciální rovnice difuzního charakteru. V publikaci [32] zase autoři navrhli klasifikační algoritmus, který využívá Peronovu–Malikovu rovnici¹ na grafech.

Úvodní kapitola této práce se věnuje stručnému přehledu o postupech při zpracování digitálního obrazu a terminologii spojené s daty z magnetické rezonance srdce. Druhá kapitola se zaměřuje na difuzní modely ve zpracování obrazu. Nejdříve je zde představena lineární difuzní rovnice a regularizovaná Peronova–Malikova rovnice. Pozornost je dále věnována Allenově–Cahnově rovnici, u níž je pomocí asymptotické analýzy ukázána souvislost s pohybem podle střední křivosti. Na základě této souvislosti je dále uveden segmentační model, včetně volby jeho parametrů s ohledem na formát obrazových dat z magnetické rezonance. Následně je pozornost upřena na pojmy gradientního toku a Sobolevova gradientu, přičemž je ukázána jejich souvislost s uvedenými modely. Třetí kapitola se zabývá odvozením numerických schémat pro aproximativní řešení některých zmíněných úloh pomocí metody konečných diferencí. V závěrečné kapitole jsou tato schémata aplikována na testovací data. Segmentační model je zde použit pro určení objemu levé srdeční komory ze série snímků z magnetické rezonance srdce. Nakonec jsou zde demonstrovány vlastnosti gradientních toků podle Sobolevova gradientu.

1.1 Digitální obraz a jeho zpracování

Tato část práce poskytuje základní přehled o digitálním obrazu a postupech při jeho zpracování. Nejprve je zde stručně uvedena reprezentace digitálního šedotónového obrazu. Dále jsou zde klasifikovány postupy ve zpracování obrazu podle řešené úlohy a použitých metod, s důrazem na vybrané části. Tato sekce je primárně založena na publikacích [24], [45], [3], [10] a [35].

¹Jedná se rovněž o nelineární parciální diferenciální rovnici difuzního typu.

1.1.1 Reprezentace digitálního obrazu

V této práci budeme pracovat výhradně se šedotónovým obrazem. Ten můžeme matematicky reprezentovat *obrazovou funkcí* tvaru

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Hodnota této funkce $u(x, y)$ pak určuje *intenzitu* (nebo také *úroveň šedi*) v prostorové souřadnici $[x, y]$. Pokud definiční obor x a y obsahuje pouze konečné množství diskrétních hodnot, tak tato obrazová funkce reprezentuje *digitální obraz*. Ten bývá v počítači zpravidla uložen jako matice, jejíž prvky nazýváme *pixely*. Definičním oborem a oborem hodnot jsou pak po řadě množiny

$$\text{dom}(u) = \{0, \dots, M - 1\} \times \{0, \dots, N - 1\}, \quad \text{ran}(u) = \{0, \dots, B - 1\},$$

kde B je mocnina 2 (z technických důvodů) a $M, N \in \mathbb{N}$. Bývá zvykem hodnoty intenzit $\{0, \dots, B - 1\}$ mapovat na interval $\langle 0, 1 \rangle$. Pro podrobnější popis vzniku a uložení digitálního obrazu lze nahlédnout například do [24], [45] a [10].

1.1.2 Rozdělení postupů zpracování obrazu podle úloh

Jedním ze způsobů, jak můžeme postupy ve zpracování obrazu klasifikovat je podle řešené úlohy. Mezi nejčastější kategorie úloh patří:

Obnovení a vylepšení obrazu (Image Restoration and Enhancement)

Hlavním cílem obnovení, tak vylepšení obrazu je zlepšit obraz s vadou určitým předem definovaným způsobem. Rozdíl je v tom, že u obnovení obrazu máme více informací o vzniku této vady a u vylepšení obrazu méně. Obnovení obrazu je pak tedy více objektivní proces, zatímco vylepšení obrazu je spíše subjektivní [24, 45]. Zmíněnou vadou pak může být například šum, rozmazání pohybem, ztráta části obrazu vlivem nedokonalé snímací techniky nebo nedostatečný kontrast. Obnovení či vylepšení obrazu velmi často předchází většině dále zmíněným úlohám a může silně ovlivnit jejich úspěšnost.

Segmentace obrazu (Image Segmentation)

Obecně je segmentací myšlen proces, při němž se obraz rozdělí na určité podobrazy podle určitého kritéria. Pokud tedy je Ω definiční obor obrazové funkce, můžeme jako *segmentaci* definovat proces, který rozdělí Ω do n podoblastí $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \Omega$ splňující [24]

1. $\bigcup_{i=1}^n I_i = \Omega$,
2. I_i je souvislá množina pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$,
3. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$ taková, že $i \neq j$,
4. všechny podoblasti I_i splňují nějaké kritérium, přičemž podoblasti $I_i \cup I_j$ toto kritérium nesplňují pro žádné sousedící podoblasti I_i a I_j .

Poslední podmínka nám zadává, co v příslušném obraze segmentací myslíme a může být dána i konkrétním segmentačním algoritmem. Jednoduchým příkladem tohoto kritéria může být požadavek na stejnou intenzitu pixelů v dané podoblasti. V této práci bude dále uveden segmentační model založený na řešení evoluční diferenciální rovnice difuzního typu.

Extrakce příznaků (Feature Extraction)

Extrakce příznaků se zaměřuje na identifikaci a popis klíčových vlastností obrazu, například rohů a textur, které lze použít pro následnou hlubší analýzu. Extrakce příznaků z obrazu může probíhat dvěma způsoby. Prvním je použití klasických metod. U těch je tvar příznaků, které hledáme, předem definovaný člověkem. Druhým způsobem je využití metod hlubokého učení, které jsou založeny na konvolučních neuronových sítích. V tomto případě se jak hodnota, tak tvar příznaků učí z trénovacích dat [24]. Příkladem tvaru příznaků z klasických metod mohou být takzvané Fourierovy deskriptory [45, 35]. Používají se pro popis tvaru objektů v obraze. Tento tvar je pak popsán příznakovým vektorem, který se skládá z prvních pár koeficientů diskrétní Fourierovy transformace hranice daného objektu [24, 45].

Zajímavým faktem je, že při trénování některých konvolučních neuronových sítí na reálných obrázcích jsou příznaky extrahované po prvních konvolučních vrstvách vizuálně velice podobné příznakům získaných pomocí Gaborových filtrů [39, 29]. Tyto filtry jsou zase velmi podobné experimentálně naměřeným receptivním polím ve vizuálním kortexu savců [17].

Klasifikace obrazu (Image Classification)

Pokud máme k dispozici příznaky popisující objekty v obraze nebo přímo daný obraz, můžeme dané objekty či dané obrazy na základě těchto příznaků roztrždit do určených tříd. Tomuto procesu se pak říká klasifikace obrazu. Toto třídění lze provádět porovnáváním daných příznaků s příznakem předem daného reprezentanta příslušné třídy, například pomocí euklidovské vzdálenosti. Způsobů, jak provádět klasifikaci obrazu při znalosti příznakových vektorů, existuje ale celá řada a je možné se o nich více dozvědět v publikacích [24], [45] a [35].

V komplexnějších úlohách² je však ruční systematické určování tvarů příznaků v podstatě nemožná úloha. Tento problém lze řešit pomocí konvolučních neuronových sítí. U těch, jak již bylo zmíněno, se daný tvar a hodnoty příznaků pro danou úlohu určují automaticky během učení [24, 1].

1.1.3 Rozdělení postupů zpracování obrazu podle metod

Dalším způsobem, jak můžeme postupy ve zpracování obrazu rozdělit je podle použité metody. Vzhledem k enormnímu množství technik a metod ve zpracování obrazu zde uvedeme jen vybrané a ty, které více souvisí se zbylým obsahem této práce.

Filtrace pomocí konvolucí a Fourierova transformace

Lineární filtrace pomocí konvolučních filtrů a diskrétní Fourierova transformace patří k nejzákladnějším metodám používaných ve zpracování obrazu [45]. *Lineární filtrace v prostorové oblasti* spočívá v nahrazení každého pixelu vstupního obrazu u_{in} lineární kombinací okolních pixelů. Výsledkem je výstupní obraz u_{out} . Tuto operaci můžeme matematicky zapsat pomocí diskrétní konvoluce [24]

$$u_{out}(m, n) = (K * u_{in})(m, n) = \sum_{k=-S}^S \sum_{l=-S}^S K_{k,l} u_{in}(m-k, n-l),$$

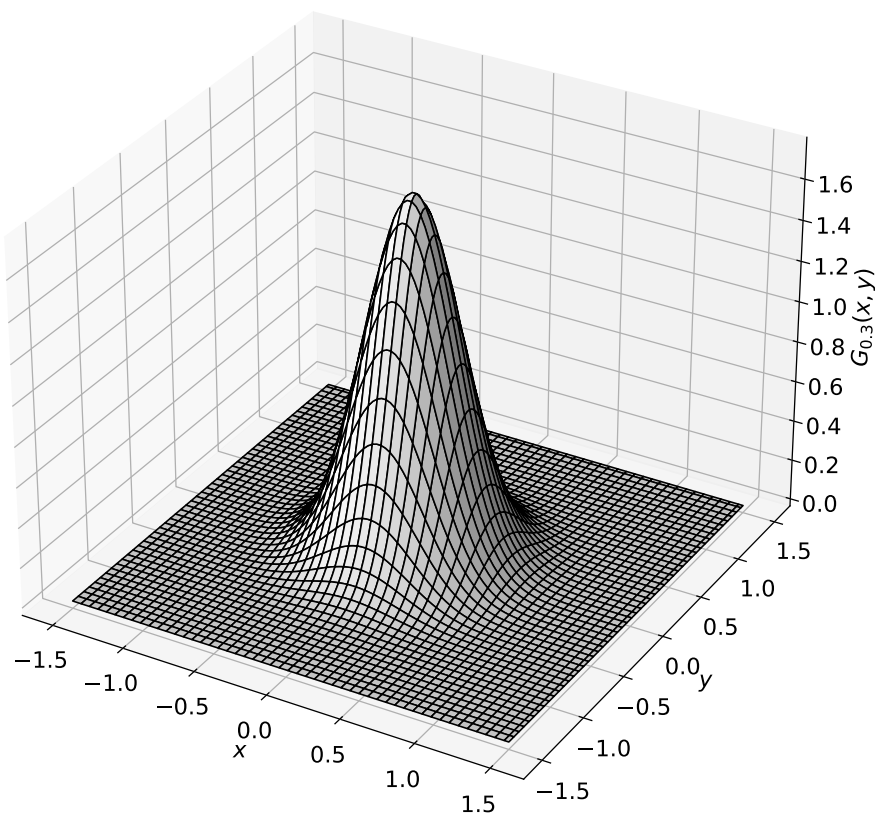
kde $[m, n] \in \text{dom}(u_{in})$, $S \in \mathbb{N}$ a K je reálná matice o rozměru $(2S + 1) \times (2S + 1)$ nazývaná *konvoluční maska*. Její velikost definuje zmíněné okolí pixelu a její konkrétní hodnoty zase povahu této operace. V praxi se lineární filtrace používá například k rozmazání obrazu, odstranění šumu, zaostření obrazu či

²Rozpoznání, jestli je na daném obrázku kočka nebo pes, může být obecně mnohem složitější úloha, než rozlišit od sebe například pomeranč a jablko na základě barvy.

k extrakci různých příznaků. Příkladem může být gaussovská filtrace. U ní se jako konvoluční maska bere vhodná diskretizace Gaussovy funkce

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right),$$

kde $\sigma > 0$. Na obrázku 1.2 můžeme vidět příklad gaussovské konvoluční masky vzniklé diskretizací Gaussovy funkce na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Graf Gaussovy funkce $G_{\sigma}(x, y)$ pro $\sigma = 0.3$.

$$\begin{bmatrix} 0.0023 & 0.0441 & 0.0023 \\ 0.0441 & 0.8144 & 0.0441 \\ 0.0023 & 0.0441 & 0.0023 \end{bmatrix}$$

Obrázek 1.2: Gaussovská konvoluční maska o velikosti 3×3 pro $\sigma = 0.3$.

Pro digitální obraz $f = f(x, y)$ o velikosti $M \times N$ je jeho *diskrétní Fourierova transformace* (DFT) definována jako [24]

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)},$$

kde i je imaginární jednotka a $u \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, $v \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Z $F(u, v)$ můžeme $f(x, y)$ reprodukovat pomocí *inverzní diskrétní Fourierovy transformace* (IDFT) dané vztahem

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}.$$

Filtrace ve frekvenční oblasti spočívá v úpravě DFT $F(u, v)$ digitálního obrazu $f(x, y)$ a provedení IDFT na $F(u, v)$. Tuto filtraci pak můžeme zapsat jako

$$g(x, y) = \text{Re} \{ \text{IDFT} [H(u, v)F(u, v)] \},$$

kde $H(u, v)$ je filtr ve frekvenční oblasti, $g(x, y)$ výsledný obraz po filtraci a $\text{Re}\{z\}$ reálná část komplexního čísla z .

Morfologické zpracování obrazu

Morfologické zpracování obrazu je technika založená na teorii množin, která analyzuje geometrické struktury obrazu, zejména v binární a šedotónové reprezentaci. Jedná se o operace, které pracují s tvary, hranicemi a strukturami objektů v obraze, přičemž klíčovou rolí hraje tzv. strukturální element. Tento prvek je malá matice, která definuje pravidla pro manipulaci s okolními pixely. Základními operacemi v morfologickém zpracování obrazu jsou dilatace a eroze [24]. Tyto techniky lze použít k segmentaci obrazu, extrakci příznaků či ke klasifikaci obrazu.

Metody založené na konvolučních neuronových sítích

Konvoluční neuronové sítě (CNN) jsou určeny pro manipulaci s daty ve formě na sebe poskládaných matic, přičemž běžným příkladem takových dat je dvourozměrný obraz. Zároveň v obrazových datech bývá silná prostorová závislost, jelikož sousedící pixely v obraze mají často podobnou intenzitu. Proto se v CNN používají diskrétní konvoluce, které se pro zmíněné lokální zpracování velice hodí [1, 24]. Konvoluční neuronové sítě mají hierarchickou strukturu, která umožňuje efektivní analýzu obrazů. Základem jsou konvoluční vrstvy, které pomocí filtrů extrahují příznaky z obrazových dat, například hrany nebo textury. Tyto příznaky jsou dále redukovány pomocí pooling vrstev, které zmenšují velikost dat a zvyšují odolnost modelu vůči změnám v obraze. Síť zahrnuje také aktivační funkce, jako je ReLU, které přidávají nelinearitu za každou konvoluční vrstvu a umožňují učení složitějších vztahů. Na konci se data zploští a projdou plně propojenými vrstvami, které integrují všechny informace a provádějí finální predikce, například klasifikaci. Tato struktura umožňuje CNN automaticky rozpoznávat klíčové vzory v datech. Modely založené na CNN zpravidla obsahují enormní množství parametrů a pro jejich správnou optimalizaci je potřeba i enormní množství dat. Pro podrobnější popis architektur a fungování CNN lze nahlédnout například do [1] nebo [24]. Jako příklad konvoluční neuronové sítě můžeme zmínit klasifikační síť AlexNet [29], která v roce 2012 zvítězila v soutěži *ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge* (ILSVRC), kde dosáhla výrazně nižší chybovosti než tehdejší metody. Její úspěch zahájil éru širokého využití hlubokého učení v počítačovém zpracování obrazu [24, 1].

Metody založené na řešení diferenciálních rovnic

Tyto metody využívají numerického řešení evolučních parciálních diferenciálních rovnic. Zpracováváný obraz do této úlohy vstupuje jako počáteční podmínka nebo skrz jiný parametr. Dané diferenciální rovnice často vycházejí z minimalizace konkrétního funkcionálu [3]. Pro funkci $u : \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}$ mějme nyní úlohu

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) = \Delta u(t, x, y) & \text{na } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) & \text{na } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Jedná se o Cauchyho úlohu pro rovnici vedení tepla (nebo také rovnici difuze) na \mathbb{R}^2 . Tato rovnice je asi nejstarší a nejvíce prozkoumaná rovnice ve zpracování obrazu [3]. Vstupní obrázek je zde reprezentován počáteční podmínkou u_0 . Pomocí teorie zobecněných funkcí (viz například [48]) lze nalézt řešení této úlohy jako

$$u(t, x, y) = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}{4t}\right) \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y}, \quad (1.2)$$

kde

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Jedná se tedy o spojitou konvoluci počáteční podmínky u_0 reprezentující vstupní obraz s Gaussovou funkcí s rozptylem $\sqrt{2t}$. Vhodnou diskretizací (1.2) získáme již zmíněnou gaussovskou filtraci, což je lineární filtrace sloužící k odstranění šumu, rozmazání obrazu či k potlačení jemných detailů. Ve frekvenční oblasti lze tento jev popsat jako potlačení vysokých frekvencí [3].

V následující kapitole se budeme zabývat některými modely založenými na řešení nelineárních evolučních parciálních diferenciálních rovnic difuzního typu. Bude i uveden segmentační model, který v poslední kapitole použijeme pro segmentaci levé srdeční komory z dat z magnetické rezonance srdce. Proto si povahu těchto dat dále stručně popíšeme.

1.2 Data z magnetické rezonance srdce

Magnetická rezonance (MRI) je moderní neinvazivní zobrazovací technika používaná především v medicíně pro pořizování detailních obrazů vnitřních struktur těla. Tato metoda využívá fyzikálního principu nukleární magnetické rezonance (NMR) atomového jádra. V lékařství jsou převážně využívána jádra vodíku, a proto je MRI velmi vhodná k vyšetřování tkání s vysokým obsahem vody. Pomocí této metody je možné pořizovat kvalitní snímky nejen nehybných tkání, jako je například mozek či páteř, ale i průběh srdečního cyklu.

Při tvorbě této sekce bylo čerpáno převážně ze zdrojů [14] a [26]. Anonymizované snímky z magnetické rezonance srdce byly poskytnuty Institutem klinické a experimentální medicíny (IKEM) v Praze.

1.2.1 Srdeční cyklus

Srdeční cyklus je činnost srdce probíhající od začátku jednoho tepu do začátku druhého [26]. Skládá se ze dvou fází. Ve fázi srdečního cyklu zvané diastola dochází k relaxaci, kdy se daná srdeční komora naplní krví. Tato fáze je následována systolou, při níž dochází ke kontrakci srdce způsobující vypuzení krve z dané komory.

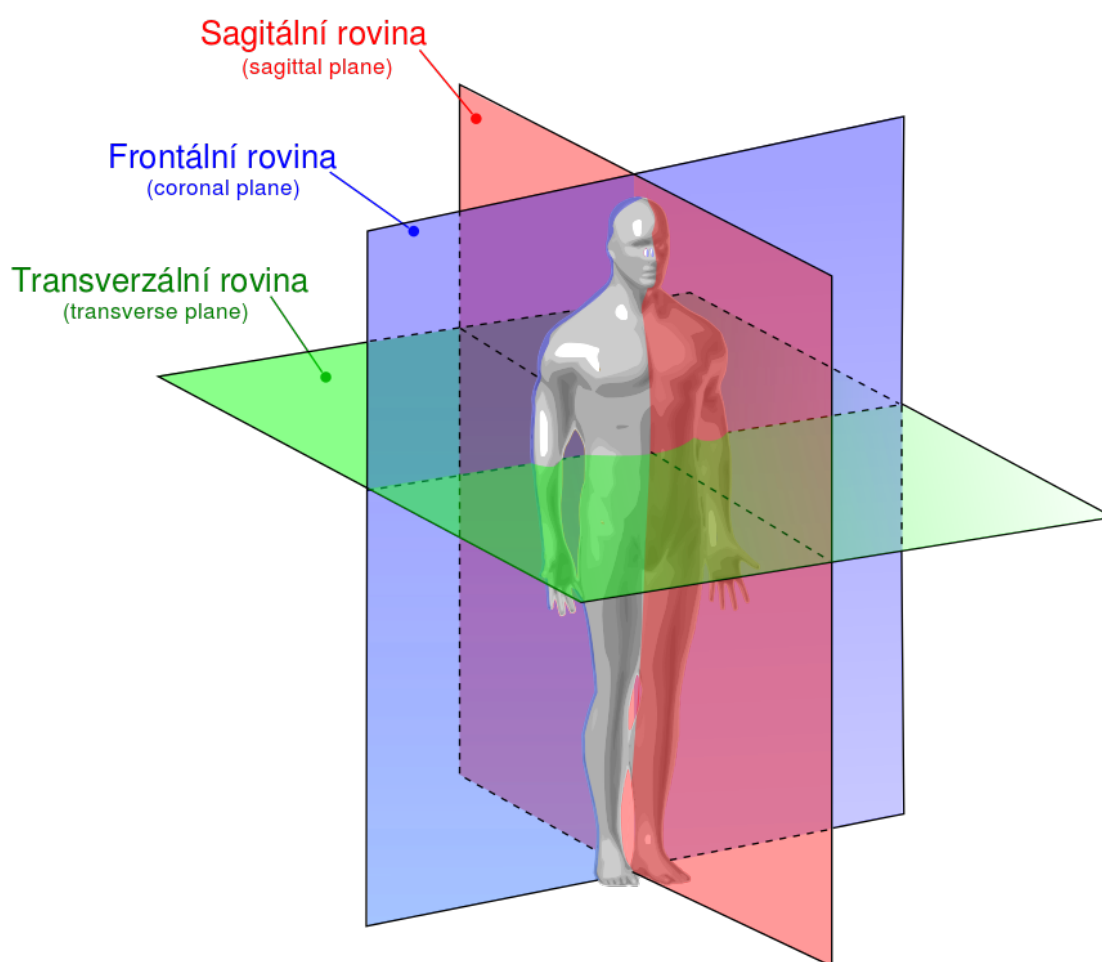
1.2.2 Objem srdeční komory a ejekční frakce

Pomocí magnetické rezonance lze pořídit sérii snímků zachycující průřezy srdcem, tak jako je znázorněno na obrázku 1.4. Každý z těchto řezů je pořízen v několika časových okamžicích (viz obrázek 1.5) tak, že je zachycen celý srdeční cyklus. Z těchto dat je pak možné určit vývoj objemu srdeční komory v čase za pomoci segmentace v každém snímku. Toto lze provádět ručně, nicméně se jedná o velmi časově náročný úkon. My se v této práci budeme zabývat segmentačním modelem, který umožňuje tento proces z velké části automatizovat.

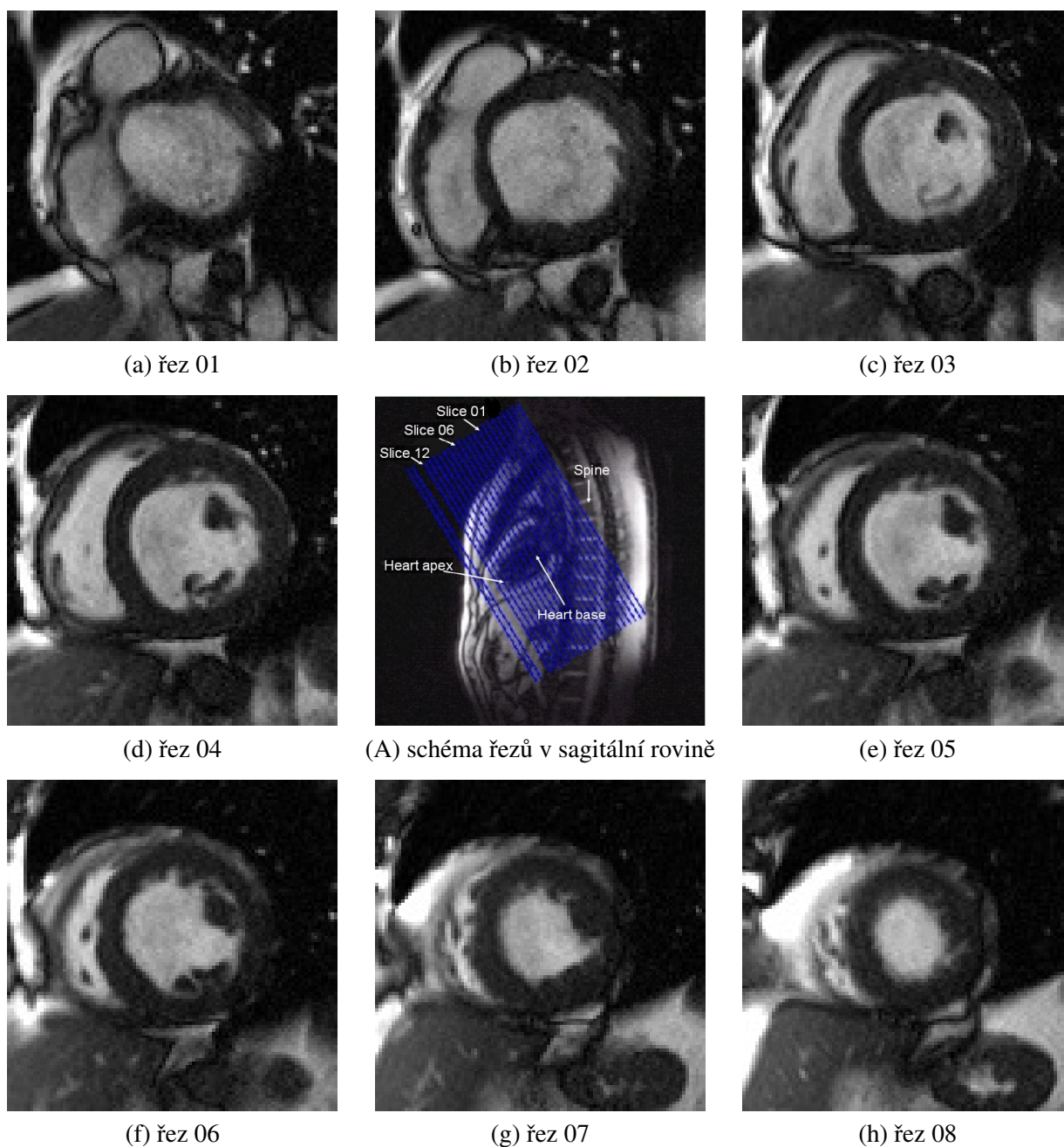
End-diastolický objem (EDV) je objem krve v dané srdeční komoře na konci diastoly. Jedná se o maximální objem během celého srdečního cyklu. End-systolický objem (ESV) je pak objem krve, který v dané komoře zůstane na konci systoly (tedy jde o minimální objem v rámci jednoho cyklu). S jakou účinností srdeční komora krev pumpuje můžeme vyjádřit pomocí těchto dvou parametrů. Ejekční frakce (EF) je definována jako podíl objemu krve vypuzeného během systoly ku end-diastolickému objemu. Jedná se tedy o procentuální vyjádření end-diastolického objemu krve, které srdce zvládne vypumpovat během jednoho cyklu. Ejekční frakce lze tedy spočítat dle vzorce

$$EF = \frac{EDV - ESV}{EDV}. \quad (1.3)$$

Její nízká hodnota může u daného pacienta indikovat nedokonalou funkčnost srdce. Jedná se tedy o důležitý parametr srdeční činnosti. My se ho v poslední kapitole této práce budeme snažit určit pro levou srdeční komoru z poskytnutých dat za pomoci semiautomatického segmentačního modelu představeného v další kapitole.



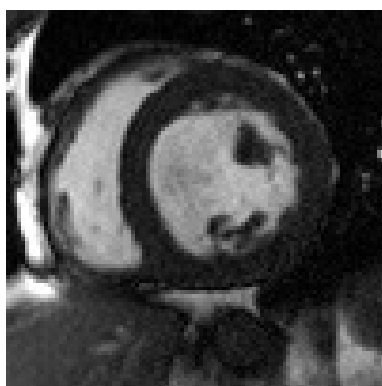
Obrázek 1.3: Znárodnění základních anatomických rovin u člověka. Převzato z [18].



Obrázek 1.4: Na snímku (A) je modrými čarami v sagitální rovině (viz obrázek 1.3) procházející srdcem znázorněno naplánování sběru jednotlivých řezů srdce. Na snímcích (a)-(h) můžeme vidět příklady takovýchto dat.



(a) čas 00



(b) čas 03



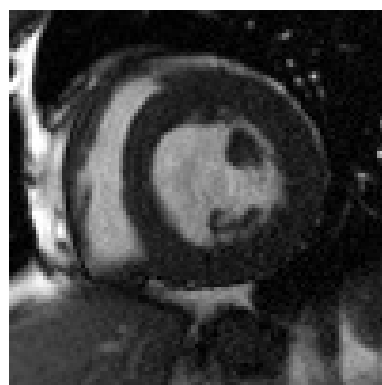
(c) čas 06



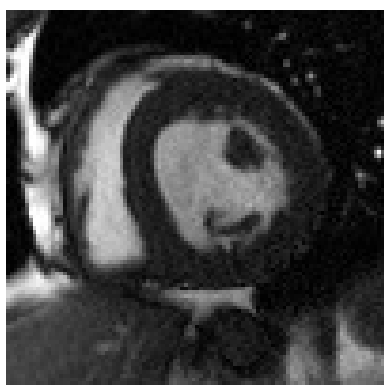
(d) čas 09



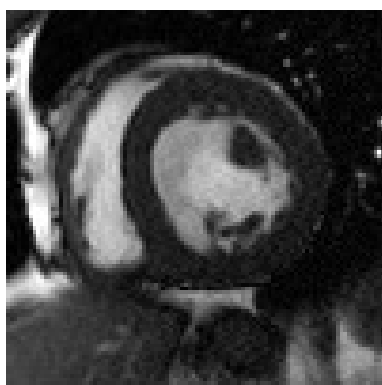
(e) čas 12



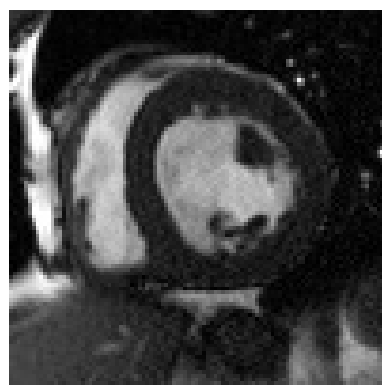
(f) čas 15



(g) čas 18



(h) čas 21



(i) čas 24

Obrázek 1.5: Na snímcích (a)-(i) můžeme vidět časový vývoj řezu 04 během srdečního cyklu.

Kapitola 2

Zpracování obrazu pomocí diferenciálních rovnic difuzního typu

Nyní si představíme některé evoluční parciální diferenciální rovnice difuzního typu, které mají využití ve zpracování obrazu. První z nich je lineární difuzní rovnice, která tvoří předlohu pro další modely. Dále si uvedeme její modifikaci – rovnici Peronovu–Malikovu. Poté se podíváme na Allenovu–Cahnovu rovnici, ukážeme si jak souvisí s úlohou o pohybu křivky podle střední křivosti a představíme její modifikaci pro účely segmentace obrazu. Nakonec si uvedeme pojem gradientního toku a Sobolevova gradientu a ukážeme si jejich souvislost s uvedenými modely.

2.1 Lineární difuzní rovnice a Peronova–Malikova rovnice

Lineární rovnice difuze (také známá jako rovnice vedení tepla) je nejstarší a nejvíce prozkoumaná rovnice ve zpracování obrazu [3]. Smíšená úloha pro rovnici difuze na omezené oblasti Ω

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) = D \Delta u(t, x, y) & \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x, y) = I_0(x, y) & \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, x, y) = 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

může sloužit jako filtr šumu v obraze I_0 . Nevýhodou tohoto modelu je výrazné potlačování obrysů, které jsou podobně jako šum reprezentovány skoky v intenzitě. V práci [13] byl představen model

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) = \nabla \cdot [g(|\nabla(G_\sigma * u)|) \nabla u] & \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x, y) = I_0(x, y) & \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, x, y) = 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

který je jen regularizovaná verze rovnice popsané v [36] s názvem Peronova–Malikova rovnice. Funkce $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ zde splňuje podmínky

$$g(0) = 1, \quad g \text{ je hladká klesající funkce,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Za těchto předpokladů lze pozorovat:

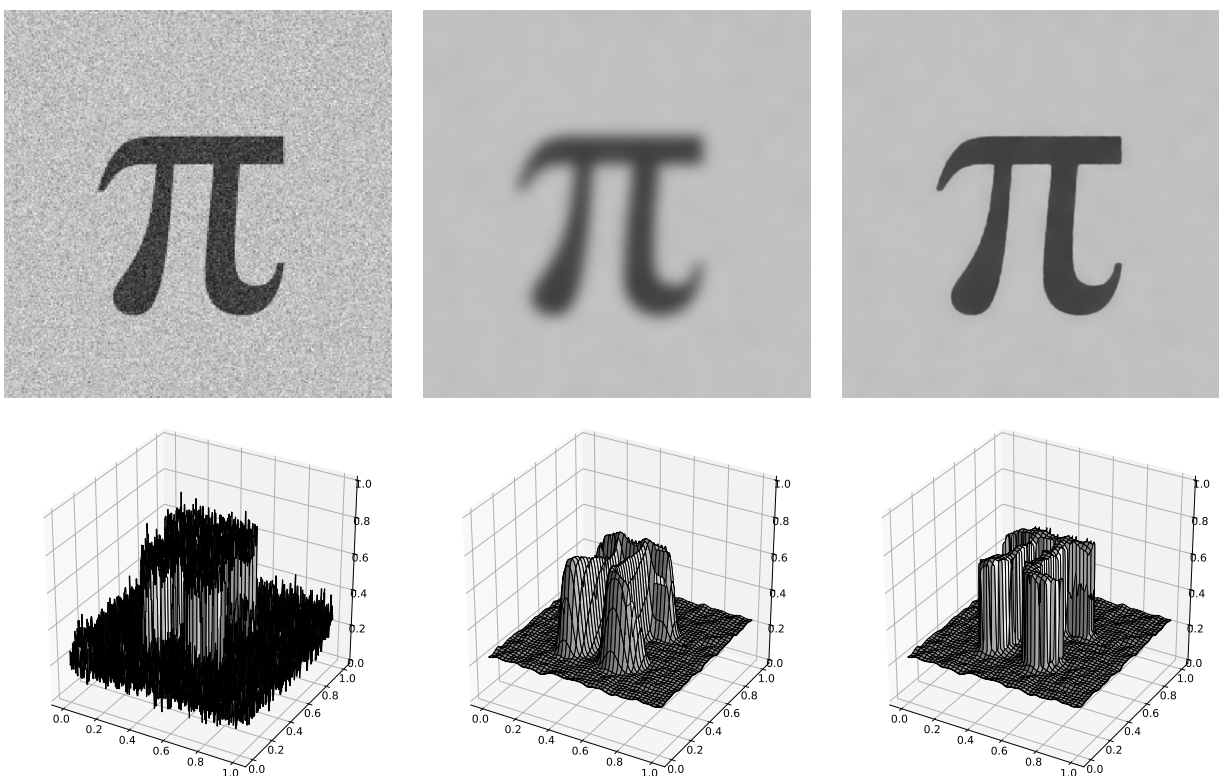
1. V místech malé velikosti gradientu $|\nabla u|$ dochází k rozmazávání, tak jako u lineární rovnice difuze.
2. Se zvyšujícím se gradientem, se tento rozmazávací efekt projevuje méně. Od určité hranice se rovnice kolmo na hrany dokonce chová jako zpětná difuzní rovnice (hrany jsou zvýrazňovány).

Jedná se tedy o hrany zvýrazňující filtr šumu. Další vlastnosti této rovnice i rovnice předchozí jsou podrobně rozebrány v knize [3]. V publikacích [2] a [49] jsou dané modely rozebírány v kontextu matematické morfologie a je ukázán jejich vztah k takzvané *scale-space theory*.

Často je funkce g volena jako

$$g(s) = \frac{1}{1 + \lambda s^2}, \quad (2.3)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ je parametr, kterým můžeme korigovat onu citlivost k hranám. Na obrázku 2.1 můžeme vidět porovnání aplikace modelů (2.1) a (2.2) na uvedený testovací obrázek.



Obrázek 2.1: Porovnání aplikace difuzní rovnice (uprostřed) a regularizované Peronovy–Malikovy rovnice (vpravo) na počáteční obrázek I_0 (vlevo). Nahoře jsou obrázky znázorněny jako bitmapy – oborem hodnot je zde diskrétní prostor odstínů šedi. Dole jsou obrázky reprezentovány grafem funkce dvou proměnných zobrazující do $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnota 1 odpovídá černé a hodnota 0 bílé. Na dolním grafu je názorněji vidět geometrická skladba obrázku. Obzvláště je patrná hustota zašumění. Vytvořeno v rámci předchozí práce [43].

2.2 Allenova–Cahnova rovnice

V čase vyvíjející se rovinná křivka $\Gamma(t) \subset \mathbb{R}^2$ se pohybuje podle střední křivosti, pokud splňuje

$$\begin{aligned} v_N(t, \mathbf{x}) &= -\kappa(t, \mathbf{x}) + F(t, \mathbf{x}), \\ \Gamma(0) &= \Gamma_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\mathbf{x}: \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ a v_N je normálová složka vektoru $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. Člen $\kappa(t, \mathbf{x})$ je (střední) křivost křivky a $F(t, \mathbf{x})$ je vnější vliv působící v normálovém směru. Existují dva hlavní způsoby jak tuto úlohu řešit a to

parametricky (přímou) nebo vrstevnicově (implicitně) [28]. Oba tyto přístupy našly v rámci zpracování obrazu své uplatnění [27, 9, 22, 31]. V předchozí práci [43] jsme aplikovali na testovací obrazová data tři různé modely vycházející z vrstevnicového přístupu.

K pohybu podle střední křivosti lze přistupovat i pomocí modelu fázového pole [6, 20, 28], který pochází z fyziky a slouží k popisu růstu mikrostruktur při fázových přechodech za předpokladu neostře hranice mezi fázemi¹. Jedním z představitelů tohoto přístupu je Allenova–Cahnova rovnice ve tvaru

$$\begin{cases} \xi \partial_t p(t, x, y) = \xi \Delta p(t, x, y) + \frac{1}{\xi} f_0(p(t, x, y)) + \xi F |\nabla p(t, x, y)| & \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ p(0, x, y) = p_0(x, y) & \text{na } \Omega, \\ \partial_n p(t, x, y) = 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

kde

$$f_0(p) = p(1-p) \left(p - \frac{1}{2} \right)$$

a $\xi > 0$. Vektor \mathbf{n} je vnější normála na hranici $\partial\Omega$ a $F \in \mathbb{R}$. Řešení této úlohy

$$p = p(t, \mathbf{x}; \xi)$$

se nazývá fázové pole. To pomocí své vrstevnice určuje fázové rozhraní

$$\Gamma(t; \xi) = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid p(t, \mathbf{x}; \xi) = \frac{1}{2} \right\} \quad (2.6)$$

ležící uvnitř přechodové vrstvy $\Omega_\Gamma \subset \Omega$, jež rozděluje Ω na dvě množiny $\Omega_s \subset \Omega$ a $\Omega_l \subset \Omega$ ve fyzikálním případě reprezentující pevnou a kapalnou fázi. Na Ω_s je hodnota $p(t, \mathbf{x}; \xi)$ blízká 1 a na Ω_l je hodnota $p(t, \mathbf{x}; \xi)$ naopak blízká 0. Tloušťka přechodové vrstvy Ω_Γ je dána parametrem ξ .

V [14], [7] a [16] lze najít v různých formách větu o existenci jednoznačného řešení slabé formulace úlohy (2.5).

2.3 Asymptotická analýza Allenovy–Cahnovy rovnice

Abychom demonstrovali vztah mezi úlohami (2.4) a (2.5), provedeme formální² překrývací asymptotickou analýzu [30] po vzoru [6] a [20]. Ta se skládá z formálního vnějšího a vnitřního asymptotického rozvoje. Vnější se provádí na $\Omega_s \subset \Omega$ a $\Omega_l \subset \Omega$. Vnitřní pak na přechodové vrstvě $\Omega_\Gamma \subset \Omega$. Konkrétně chceme ukázat, že fázové rozhraní $\Gamma(t; \xi)$ se vyvíjí podle (2.4) s parametrem $\xi \rightarrow 0_+$. Tento vztah lze formálně vyjádřit pomocí schématu

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\xi \partial_t p} & = & \underbrace{\xi \Delta p + \frac{1}{\xi} f_0(p)} + \underbrace{\xi F |\nabla p|} \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ v_N & = & -\kappa + F \end{array} \quad \text{při } \xi \rightarrow 0_+.$$

Mějme nyní Allenovu–Cahnovu rovnici ve tvaru

$$\xi^2 \partial_t p = \xi^2 \Delta p + f(p, \nabla p; \xi), \quad (2.7)$$

kde

$$f(p, \nabla p; \xi) = f_0(p) + \xi^2 F |\nabla p|.$$

¹Tento fyzikální model navíc obsahuje oproti dále zmíněné úloze rovnici vedení tepla, jejímž řešením je teplotní pole. To pak v dále zmíněné úloze vystupuje skrz člen F .

²Rigorózně je tato procedura provedena například v [11].

2.3.1 Vnější rozvoj

Nyní provedeme formální vnější asymptotický rozvoj fázového pole

$$p(t, \mathbf{x}; \xi) \sim \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(t, \mathbf{x}) \xi^i \quad (2.8)$$

a rozvineme $f(p, \nabla p; \xi)$ do Taylorovy řady prvních třech proměnných v bodě $[p_0, \partial_x p_0, \partial_y p_0]$. Do této řady dosadíme rozvoj (2.8) a výsledek společně s (2.8) vložíme do (2.7). Porovnáním jednotlivých mocnin ξ na levé a pravé straně obdržíme

$$0 = f_0(p_0) = p_0(1 - p_0)(p_0 - \frac{1}{2}) \quad \text{pro } \xi^0, \quad (2.9)$$

$$0 = \partial_p f(p_0, \nabla p_0) p_1 = \left(-3p_0^2 + 3p_0 - \frac{1}{2} \right) p_1 \quad \text{pro } \xi^1, \quad (2.10)$$

$$\partial_t p_0 = \Delta p_0 + F|\nabla p_0| + \partial_p f(p_0, \nabla p_0) p_2 + \frac{1}{2} \partial_{pp} f(p_0, \nabla p_0) p_1^2 \quad \text{pro } \xi^2. \quad (2.11)$$

Z (2.9) vyplývá, že $p_0(t, \mathbf{x})$ je na daných podoblastech Ω_s, Ω_l konstantní a nabývá stabilních hodnot 0 a 1. Rovnice (2.10) implikuje $p_1 = 0$ a z (2.11) následně plyne, že i $p_2 = 0$. Odtud již vyjde, že

$$p(t, \mathbf{x}; \xi) \sim p_0 + \mathcal{O}(\xi^3).$$

2.3.2 Vnitřní rozvoj

Nyní budeme zkoumat rovnici (2.7) na přechodové vrstvě $\Omega_\Gamma = \Omega_\Gamma(t; \xi)$. Pro tyto potřeby provedeme transformaci souřadnic. Fázové pole p je jakožto řešení diferenciální rovnice dostatečně hladká funkce (viz [11]), a proto můžeme fázové rozhraní (2.6) lokálně parametrizovat dostatečně hladkým zobrazením \mathbf{q} jako

$$\Gamma(t) = \{ \mathbf{x} \in \Omega \mid (\exists_1 s \in S)(\mathbf{x} = \mathbf{q}(s)) \},$$

kde

$$S \subset \mathbb{R}, \quad \mathbf{q}: S \rightarrow \Omega, \quad (\forall s \in S)(p(t, \mathbf{q}(s); \xi) = 0, 5).$$

To znamená, že i $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, s; \xi)$. V okolí křivky Γ zavedeme lokální systém souřadnic jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}(t, s; \xi) + r\mathbf{n}(t, s; \xi),$$

kde $\mathbf{n}(t, s; \xi) = (n_1, n_2)^T$ je jednotková normála ke Γ v bodě $\mathbf{q}(t, s; \xi) = [q_1, q_2]$. Tímto vztahem přejdeme od soustavy souřadnic $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ k souřadnicím $[s, r]$, kde s je podélná a r radiální souřadnice určující vychýlení \mathbf{x} v normálovém směru od bodu $\mathbf{q}(t, s; \xi)$ ležícím na křivce Γ . Z věty o implicitní funkci existují inverzní zobrazení

$$s = s(t, \mathbf{x}; \xi), \quad r = r(t, \mathbf{x}; \xi). \quad (2.12)$$

Z předchozího vyplývá několik skutečností

$$|\mathbf{n}| = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \partial_s \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \partial_s \mathbf{q} = 0. \quad (2.13)$$

Operátor nabla má v nových souřadnicích tvar

$$\nabla_{(s,r)} = \mathbb{J} \cdot \nabla_{(\mathbf{x})}, \quad (2.14)$$

kde

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \partial_s q_1 + r \partial_s n_1 & \partial_s q_2 + r \partial_s n_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}$$

je Jakobiho matice definované transformace. Pomocí adjugované matice můžeme spočítat její inverzi³ jako

$$\mathbb{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{J}} \begin{pmatrix} n_2 & -\partial_s q_2 - r \partial_s n_2 \\ -n_1 & \partial_s q_1 + r \partial_s n_1 \end{pmatrix}.$$

Operátor nabla následně vyjádříme jako

$$\nabla_{(x)} = \mathbb{J}^{-1} \cdot \nabla_{(s,r)} = \frac{1}{\det \mathbb{J}} \begin{pmatrix} n_2 \partial_s - (\partial_s q_2 + r \partial_s n_2) \partial_r \\ -n_1 \partial_s + (\partial_s q_1 + r \partial_s n_1) \partial_r \end{pmatrix}.$$

Poté má Laplacián v souřadnicích $[s, r]$ (podrobně rozepsáno v [20]) tvar

$$\Delta_{\mathbf{x}} = \nabla_{(x)} \cdot \nabla_{(x)} = \frac{1}{\det \mathbb{J}} \partial_s \left(\frac{1}{\det \mathbb{J}} \right) \partial_s + \frac{1}{\det \mathbb{J}} \partial_r (\det \mathbb{J}) \partial_r + \frac{1}{(\det \mathbb{J})^2} \partial_s^2 + \partial_r^2. \quad (2.15)$$

Pomocí vztahů (2.13) a (2.14) získáme, že

$$\mathbf{n} = \mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{n} = \mathbb{J}^{-1} \begin{pmatrix} r \mathbf{n} \cdot \partial_s \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \partial_s \mathbf{q} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} = \mathbb{J}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{J}^{-1} \nabla_{(s,r)} r = \mathbb{J}^{-1} \mathbb{J} \nabla_{(x)} r = \nabla_{(x)} r.$$

Z (2.15) a předchozí identity můžeme (střední) křivost křivky Γ vyjádřit jako

$$\kappa = \nabla_{(x)} \cdot \mathbf{n} = \Delta_{(x)} r = \frac{1}{\det \mathbb{J}} \partial_r (\det \mathbb{J})$$

a Laplacián (2.15) tedy můžeme ještě přepsat do tvaru

$$\Delta_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\det \mathbb{J}} \partial_s \left(\frac{1}{\det \mathbb{J}} \right) \partial_s + \kappa \partial_r + \frac{1}{(\det \mathbb{J})^2} \partial_s^2 + \partial_r^2. \quad (2.16)$$

Dříve zavedený systém souřadnic ještě upravíme pomocí

$$r = \xi z$$

na

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}(t, s; \xi) + \xi z \mathbf{n}(t, s; \xi)$$

a (2.12) můžeme přepsat na

$$s = s(t, \mathbf{x}; \xi), \quad z = z(t, \mathbf{x}; \xi) = \frac{1}{\xi} r(t, \mathbf{x}; \xi).$$

Fázové pole \bar{p} v nových souřadnicích si zavedeme pomocí výrazu

$$\bar{p}(t, s(t, \mathbf{x}; \xi), z(t, \mathbf{x}; \xi); \xi) = p(t, \mathbf{x}; \xi). \quad (2.17)$$

Normálovou složku rychlosti v_N můžeme vyjádřit pomocí vztahu

$$v_N = -\partial_t r = -\xi \partial_t z.$$

³Pro \mathbb{A} regulární platí $\mathbb{A}^{-1} = (\det \mathbb{A})^{-1} \mathbb{A}^{\text{adj}}$, kde \mathbb{A}^{adj} je adjugovaná matice k matici \mathbb{A} .

Následně derivací (2.17) podle t obdržíme

$$\partial_t p(t, \mathbf{x}; \xi) = \partial_t \bar{p} + \partial_z \bar{p} \partial_t z + \partial_s \bar{p} \partial_t s = \partial_t \bar{p} - \frac{v_n}{\xi} \partial_z \bar{p} + \partial_s \bar{p} \partial_t s.$$

Nyní již můžeme s využitím odvozených identit transformovat do nových souřadnic i Allenovu–Cahnovu rovnici (2.7)

$$\xi^2 (\partial_t \bar{p} + \partial_s \bar{p} \partial_t s) - \xi v_n \partial_z \bar{p} = \frac{\xi^2}{\det \mathbb{J}} \partial_s \left(\frac{1}{\det \mathbb{J}} \right) \partial_s \bar{p} + \xi \kappa \partial_z \bar{p} + \frac{\xi^2}{(\det \mathbb{J})^2} \partial_s^2 \bar{p} + \partial_z^2 \bar{p} + f(\bar{p}, \nabla \bar{p}; \xi). \quad (2.18)$$

Opět provedeme asymptotický rozvoj vzhledem k parametru ξ a to u funkcí $\bar{p}, r, q, \mathbf{n}, v_N$ a κ . Máme tedy

$$\bar{p}(t, z, s; \xi) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{p}_i(t, z, s) \xi^i, \quad r(t, \mathbf{x}; \xi) \sim \sum_{i=1}^{+\infty} r_i(t, \mathbf{x}) \xi^i, \quad q \sim q_0 + q_1 \xi + q_2 \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3),$$

$$\mathbf{n} \sim \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_1 \xi + \mathcal{O}(\xi^2), \quad v_N \sim v_{N,0} + v_{N,1} \xi + \mathcal{O}(\xi^2), \quad \kappa \sim \kappa_0 + \kappa_1 \xi + \mathcal{O}(\xi^2).$$

Funkci $f = f(\bar{p}, \nabla \bar{p}; \xi)$ znovu rozvedeme do Taylorovy řady stejným způsobem, jako u vnějšího rozvoje. Vše dosadíme do transformované Allenovy–Cahnovy rovnice (2.18), porovnáme opět stejné mocniny ξ a získáme

$$0 = \partial_z^2 \bar{p}_0 + f_0(\bar{p}_0) = \partial_z^2 \bar{p}_0 + \bar{p}_0 (1 - \bar{p}_0) \left(\bar{p}_0 - \frac{1}{2} \right) \quad \text{pro } \xi^0, \quad (2.19)$$

$$-v_{N,0} \partial_z \bar{p}_0 = \kappa_0 \partial_z \bar{p}_0 + \partial_z^2 \bar{p}_1 + F |\partial_z \bar{p}_0| + \partial_{\bar{p}} f_0(\bar{p}_0) \bar{p}_1 \quad \text{pro } \xi^1. \quad (2.20)$$

U (2.20) jsme využili faktu⁴, že

$$|\nabla p_0| = \frac{1}{\xi} |\partial_z \bar{p}_0|,$$

pokud \bar{p}_0 nezávisí na s . Tato nezávislost vyplyne z následujícího.

Důsledek vztahu (2.19)

První ze vztahů vynásobíme $\partial_z \bar{p}_0$ a integrujeme podle z . Získáme

$$\frac{1}{2} (\partial_z \bar{p}_0)^2 - w_0(\bar{p}_0) = 0, \quad (2.21)$$

kde funkce $w_0 = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^2$ se nazývá dvouminimový potenciál a platí pro ní

$$\partial_p w_0(p) = -f_0(p) = -p(1-p) \left(p - \frac{1}{2} \right).$$

Úpravou vztahu (2.21) za předpokladu klesající \bar{p}_0 ve směru z na rozhraní Γ obdržíme

$$\partial_z \bar{p}_0 = -\sqrt{2w_0(\bar{p}_0)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{1}{4} - \left(\bar{p}_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \quad (2.22)$$

⁴Aplikací transformovaného operátoru nabla získáme vztah $|\nabla_{(\mathbf{x})} p(t, \mathbf{x}; \xi)|^2 = \det(\mathbb{J})^{-2} (\partial_s \bar{p})^2 + \xi^{-2} (\partial_z \bar{p})^2$.

a pomocí substituce $\bar{p}_0 = q + \frac{1}{2}$ převedeme na

$$\partial_z q = -\sqrt{2w_0(\bar{p}_0)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(q^2 - \frac{1}{4} \right).$$

Dále vztah upravíme na

$$\frac{\partial_z q}{1 - (2q)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Předchozí diferenciální rovnice je separovaná a můžeme ji za pomoci substituce $2q = \tanh(\tilde{q})$ integrovat na

$$-\frac{\sqrt{2}}{8} z = \frac{1}{2} \arg \tanh(2\bar{p}_0 - 1) + C.$$

Protože předpokládáme $\bar{p}_0(0) = \frac{1}{2}$, můžeme nakonec \bar{p}_0 vyjádřit jako

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{2} \left(\tanh \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} z \right) + 1 \right). \quad (2.23)$$

Důsledek vztahu (2.20)

Druhý vztah upravíme na

$$\left(\partial_z^2 + \partial_{\bar{p}} f_0(\bar{p}_0) \right) \bar{p}_1 = \partial_z \bar{p}_0 (-v_{N,0} - \kappa_0) - F |\partial_z \bar{p}_0|.$$

Fredholmova alternativa říká, že tato rovnice je řešitelná, pokud

$$\partial_z \bar{p}_0 (-v_{N,0} - \kappa_0) - F |\partial_z \bar{p}_0| \in \left[\ker \left(\partial_z^2 + \partial_{\bar{p}} f_0(\bar{p}_0) \right) \right]^\perp.$$

Pokud zderivujeme (2.19) podle z zjistíme, že

$$\partial_z \bar{p}_0 \in \ker \left(\partial_z^2 + \partial_{\bar{p}} f_0(\bar{p}_0) \right).$$

Z těchto dvou poznatků plyne, že

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_z \bar{p}_0 \left[\partial_z \bar{p}_0 (-v_{N,0} - \kappa_0) - F |\partial_z \bar{p}_0| \right] dz = 0. \quad (2.24)$$

Jednu část tohoto výrazu můžeme pomocí (2.22) vyjádřit jako

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_z \bar{p}_0)^2 dz = - \int_{\mathbb{R}} -\sqrt{2w_0(\bar{p}_0)} \partial_z \bar{p}_0 dz \quad \underbrace{=}_{\text{substituce } \bar{p} = \bar{p}_0(z)} \int_0^1 \sqrt{2w_0(\bar{p})} d\bar{p} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a}{8}}.$$

Jelikož je $\bar{p}_0(z)$ klesající na celém \mathbb{R} , platí

$$F \int_{\mathbb{R}} |\partial_z \bar{p}_0| \partial_z \bar{p}_0 dz = -F \int_{\mathbb{R}} (\partial_z \bar{p}_0)^2 dz = -F \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a}{8}}$$

a výraz (2.24) můžeme ve finále přepsat na

$$v_{N,0} = -\kappa_0 + F.$$

2.4 Segmentační model vycházející z Allenovy–Cahnovy rovnice

Nahrazením difuzního členu Allenovy–Cahnovy rovnice (2.5) rozepsaným výrazem

$$\nabla \cdot [g_{\lambda_1}^0 \nabla u] = g_{\lambda_1}^0 \Delta u + \nabla g_{\lambda_1}^0 \cdot \nabla u,$$

vynásobením zbylých členů hranovým detektorem g_{λ_2} , změnou parametru λ_1 na λ_2 v advekčním členu a použitím $P \geq 0$ k vážení tohoto advekčního členu získáme segmentační model (inspirovaný segmentačním modelem z [8])

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u & = & g_{\lambda_1}^0 \Delta u + P \nabla g_{\lambda_2}^0 \cdot \nabla u + g_{\lambda_2}^0 \left(\frac{1}{\xi^2} f_0(u) + \tilde{F} |\nabla u| \right) \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x, y) & = & u_0(x, y) \quad \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, x, y) & = & 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{array} \quad (2.25)$$

kde $\tilde{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ a

$$g_{\lambda}^0(x, y) = \frac{1}{1 + \lambda(|\nabla f(I_0)|^2)}.$$

Funkce I_0 je segmentovaný obrázek a $f(I_0)$ značí jeho předzpracování. Počáteční podmínka

$$u_0: \Omega \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

zadáva počáteční segmentační křivku jako

$$\Gamma(0) = \left\{ [x, y] \in \Omega \mid u_0(x, y) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Stejným způsobem je zadán vývoj segmentační křivky $\Gamma(t)$ pomocí řešení $u(t, x, y)$ vztahem

$$\Gamma(t) = \left\{ [x, y] \in \Omega \mid u_0(t, x, y) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Parametrem P u advekčního členu⁵ řídíme její „přilnavost“ k hranám obrázku v jejich blízkosti. Ve větší vzdálenosti od těchto hran je vývoj $\Gamma(t)$ spíše řízen skrze silový člen $g_{\lambda_2}^0 \tilde{F} |\nabla u|$.

Protože chceme dále tento model využít k segmentaci série obrazových dat z magnetické rezonance (popsaných v první kapitole), tak dále podrobněji rozebereme jeho nastavení s ohledem na vlastnosti těchto dat.

2.4.1 Silový člen, počáteční podmínky a zastavovací kritérium

Mějme sérii snímků zmíněnou výše seřazenou lexikograficky podle řezů a časů (viz Obrázky 1.4 a 1.5). Člen \tilde{F} v (2.25) nyní budeme brát závislý na obrazových datech $f(I_0)$ ⁶ a to způsobem

$$\tilde{F} = \begin{cases} -F \frac{thr - f(I_0)}{thr} & \text{pro } f(I_0) < thr, \\ 2f(I_0) & \text{pro } f(I_0) \geq thr, \end{cases} \quad (2.26)$$

⁵ Jeho vliv na segmentaci je podrobněji popsán v [33].

⁶ O nich předpokládáme obor hodnot roven $\langle 0, 1 \rangle$. Toto můžeme vhodným předzpracováním vždy zaručit.

kde $F > 0$ a $thr \in (0, 1)$. Tato volba vyplývá z toho, že vnitřek srdeční komory je na snímcích světlejší (bližší 1) a její hranice spíše tmavší (bližší 0). První počáteční křivku volíme ručně jako

$$u_0(x, y) = \frac{\operatorname{sgn}\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2\right) + 1}{2}. \quad (2.27)$$

Protože očekáváme, že se vývoj $\Gamma(t)$ bude postupně na hranách srdeční komory zpomalovat, volíme pro $C > 0$ zastavovací kritérium jako

$$\partial_t V(t) = \partial_t \int_{\Omega} u(t, x, y) dx dy < C. \quad (2.28)$$

Při numerických výpočtech budeme tento vztah odhadovat diskrétně. Po segmentaci prvního snímku nalezneme geometrický střed vnitřku finální segmentační křivky. Ten se pak použije pro střed $[x_0, y_0]$ počáteční segmentační křivky (2.27) dalšího snímku. Poloměr r se volí menší než vzdálenost geometrického středu $[x_0, y_0]$ od nejbližšího okraje segmentované oblasti.

2.5 Gradientní toky

Mnoho evolučních parciálních diferenciálních rovnic lze vyjádřit jako tzv. gradientní tok funkcionálu [21, 34] a zároveň velké množství problémů ve zpracování obrazu je možné formulovat jako optimalizační úlohu [3, 19]. Abychom mohli gradientní tok funkcionálu vůbec definovat, musíme si nejdříve uvést potřebné pojmy variačního počtu⁷ [21, 40]. Následně si některé již výše uvedené parciální diferenciální rovnice jako gradientní toky odvodíme. Nakonec si představíme gradientní toky podle upraveného Sobolevova skalárního součinu⁸, které mají vůči gradientním tokům podle standardního skalárního součinu v L^2 jistě lepší vlastnosti.

2.5.1 Variační počet

Mějme X lineární normovaný prostor a funkcionál $\mathcal{F} : \operatorname{dom}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\operatorname{dom}(\mathcal{F}) \subset X$. Dále mějme $M \subset \operatorname{dom}(\mathcal{F})$ otevřenou množinu a necht' $u \in M$ a $z \in X$. Definujme pomocnou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$f(t) = \mathcal{F}[u + tz].$$

Tu nyní můžeme využít k definici derivace funkcionálu.

Definice 2.5.1. Pokud existuje limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[u + tz] - \mathcal{F}[u]}{t},$$

tak ji nazýváme *derivací funkcionálu \mathcal{F} v bodě u vzhledem k vektoru z* a značíme ji

$$d\mathcal{F}[u, z] = f'(0)$$

Pokud v daném bodě u existuje $d\mathcal{F}[u, z]$ pro všechna $z \in X$ a zobrazení $d\mathcal{F}[u] : X \rightarrow \mathbb{R}$ dané vztahem

$$d\mathcal{F}[u](z) = d\mathcal{F}[u, z]$$

je lineární a spojité, tak se toto zobrazení nazývá *Gâteauxova derivace*.

⁷Diferenciální počet na funkcionálech.

⁸Vzniklá metoda minimalizace funkcionálu je v literatuře známá jako *metoda Sobolevových gradientů* [34, 44].

Stejně jako pro reálné funkce reálné proměnné platí následující nutná podmínka pro existenci extrému.

Věta 2.5.1. Pro X lineární normovaný prostor mějme funkcionál $\mathcal{F} : (X) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaný na otevřené množině $M \subset X$ a necht' \mathcal{F} má v $u \in M$ lokální extrém. Potom $\forall z \in X$, pro která $d\mathcal{F}[u, z]$ existuje, je $d\mathcal{F}[u, z] = 0$.

Tato věta nám stejně jako na \mathbb{R} dává motivaci hledat extrémy funkcí jakožto body, které nulují derivaci. Tedy jako stacionární body.

Definice 2.5.2. Necht' X je lineární prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ a necht' funkcionál $\mathcal{F} : (X) \rightarrow \mathbb{R}$ má Gâteauxovu derivaci v bodě $u \in X$. Pokud existuje jednoznačně dané $g \in X$ takové, že pro všechna $z \in X$ platí

$$\langle g, z \rangle_S = d\mathcal{F}[u](z),$$

tak ho nazýváme *gradientem funkcionálu \mathcal{F} v bodě u vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$* a značíme ho $\nabla_S \mathcal{F}[u]$.

Skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ definuje pro $z \in X$ normu $\|\cdot\|_S$ vztahem

$$\|\cdot\|_S = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_S}.$$

Mějme nyní $z \in X$, $\|z\|_S \neq 0$. Potom za předpokladu $\nabla_S \mathcal{F}[u] \neq 0$ plyne z definice gradientu $\nabla_S \mathcal{F}[u]$ a Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti, že

$$\frac{|d\mathcal{F}[u](z)|}{\|z\|_S} = \frac{|\langle \nabla_S \mathcal{F}[u], z \rangle_S|}{\|z\|_S} \leq \|\nabla_S \mathcal{F}[u]\|_S,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $z = C\nabla_S \mathcal{F}[u]$ pro $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zároveň platí

$$\frac{d\mathcal{F}[u](C\nabla_S \mathcal{F}[u])}{\|C\nabla_S \mathcal{F}[u]\|_S} = \frac{\langle \nabla_S \mathcal{F}[u], C\nabla_S \mathcal{F}[u] \rangle_S}{\|C\nabla_S \mathcal{F}[u]\|_S} = \text{sgn}(C)\|\nabla_S \mathcal{F}[u]\|_S.$$

Tedy kladné násobky vektoru $\nabla_S \mathcal{F}[u]$ maximalizují normovanou Gâteauxovu derivaci v bodě u a záporné násobky jí minimalizují. Nyní již přistoupíme k definici gradientního toku.

Definice 2.5.3. Pro $u_0 \in X$ jako *gradientní tok funkcionálu \mathcal{F} vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$* označujeme diferenciální rovnici

$$\partial_t u(t) = \pm \nabla_S \mathcal{F}[u(t)] \tag{2.29}$$

s počáteční podmínkou

$$u|_{t=0} = u_0.$$

V závislosti na znaménku na pravé straně (2.29) mluvíme buď o *gradientním sestupu* (znaménko -), nebo o *gradientním výstupu* (znaménko +).

Pro funkci $u = u(t)$ splňující (2.29) se znaménkem - máme

$$\frac{d\mathcal{F}[u(t)]}{dt} = d\mathcal{F}[u(t)](\partial_t u(t)) = d\mathcal{F}[u(t)](-\nabla_S \mathcal{F}[u(t)]) = -\|\nabla_S \mathcal{F}[u(t)]\|_S^2 \leq 0,$$

z čehož plyne, že $\mathcal{F}[u(t)]$ je vůči parametru t ostře klesající funkce. Získáváme tak jednoparametrickou množinu prvků z X , které postupně s rostoucím t snižují hodnotu funkcionálu \mathcal{F} .

Příklad:

Mějme nyní funkcionál

$$\mathcal{F}[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

definovaný na vhodných funkcích $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, kde Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Za vhodných podmínek nyní určíme gradient $\nabla_{L^2} \mathcal{F}[u]$ daný standardním skalárním součinem v $L^2(\Omega)$ definovaným jako

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Definujme si pomocnou funkci

$$f(\tau) = \mathcal{F}[u + tz] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x) + t\nabla z(x)|^2 dx.$$

Její derivace je

$$f'(\tau) = \int_{\Omega} (\nabla u(x) + t\nabla z(x)) \cdot \nabla z(x) dx.$$

Gâteauxova derivace funkcionálu \mathcal{F} má pak tvar

$$d\mathcal{F}[u](z) = f'(0) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla z(x) dx.$$

Pokud funkce z vymizí na hranici $\partial\Omega$ dostáváme za pomoci Greenovy formule

$$d\mathcal{F}[u](z) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla z(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u(x))z(x) dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x)z(x) dx = \langle -\Delta u, z \rangle_{L^2(\Omega)},$$

a tedy

$$\nabla_{L^2} \mathcal{F}[u] = -\Delta u.$$

Příslušný gradientní sestup je pak difuzní rovnice

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{na} \quad \mathbb{R}_0^+ \times \Omega$$

s počáteční podmínkou

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{na} \quad \Omega.$$

Abychom mohli jednotlivé kroky odvození gradientu ospravedlnit, je třeba funkce u brát z vhodného prostoru.

2.5.2 Sobolevovy prostory

Pro funkce $\phi \in C_0^{(\infty)}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, zavedeme značení

$$D^\alpha \phi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

kde $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{N}_0^n$ a $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Tohoto značení využijeme v následující definici [21].

Definice 2.5.4. Řekneme, že $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ má slabou parciální derivaci podle x^α právě tehdy, když existuje $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ takové, že pro všechna $\phi \in C_0^{(\infty)}(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx.$$

Pak značíme $D^\alpha u = v$.

Pokud takto definovaná slabá derivace existuje, tak je určena jako prvek $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ jednoznačně [21]. Dále lze pomocí integrace per partes snadno ukázat, že derivace funkcí z $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ rovnost z předchozí definice splňují.

Definice 2.5.5. Pro $k \in \mathbb{N}_0$ je Sobolevův prostor $H^k(\Omega)$ definován následovně

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ pro všechna } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ taková, že } |\alpha| \leq k \right\}.$$

Pro $u, v \in H^2(\Omega)$ pak zavádíme skalární součin a příslušnou indukovanou normu jako

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx, \quad \|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^k(\Omega)}}.$$

Dále Sobolevův prostor $H_0^k(\Omega)$ definujeme jako uzávěr množiny $C_0^{(\infty)}(\Omega) \cap H^k(\Omega)$.

Prostory $H^k(\Omega)$ a $H_0^k(\Omega)$ s daným skalárním součinem jsou Hilbertovy. Pokud hranice $\partial\Omega$ je lipschitzovská, tak existuje právě jeden omezený lineární operátor [40]

$$T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

takový, že

$$Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ pokud } u \in C^{(\infty)}(\bar{\Omega})$$

a pro $u \in H^1(\Omega)$ platí, že

$$u \in H_0^1(\Omega) \text{ právě tehdy, když } Tu = 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Pro $v \in H_0^1(\Omega)$ a $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ pak platí za využití Greenovy formule vztah

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx.$$

2.5.3 Sobolevovy gradienty

Pro $\alpha > 0$ a $u, v \in H_0^1(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, můžeme definovat skalární součin tvaru [34, 12]

$$\langle u, v \rangle_{H^{1,\alpha}(\Omega)} = (1 - \alpha) \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \alpha \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \alpha \sum_{i=1}^n \langle \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Pro něj máme následující nerovnosti.

1. Pro všechna $0 < \alpha \leq 1$ platí

$$(1 - \alpha) \langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)} + \alpha \langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} \leq (1 - \alpha) \langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} + \alpha \langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)},$$

a proto platí i

$$\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

2. Pro všechna $\alpha \geq 1$ platí

$$(1 - \alpha)\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)} + \alpha\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} \geq (1 - \alpha)\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} + \alpha\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)},$$

a proto platí i

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2 \leq \alpha\|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Norma indukovaná skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1,\alpha}}$ je tedy ekvivalentní se Sobolevovou normou $\|\cdot\|_{H^1}$. Proto gradient $\nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u]$ definovaný pro všechna $z \in H_0^1(\Omega)$ vztahem

$$\langle \nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u], z \rangle_{H^{1,\alpha}} = d\mathcal{F}[u](z)$$

je nazýván *Sobolevův gradient* [12, 44, 34].

Nechť nyní Sobolevův gradient $\nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u]$ existuje a $\nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u] \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Potom můžeme pro všechna $z \in H_0^1(\Omega)$ psát

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}[u](z) &= \langle \nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u], z \rangle_{H^{1,\alpha}} \\ &= \langle \nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u], z \rangle_{L^2} + \alpha \sum_{i=1}^n \langle \partial_{x_i}\nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u], \partial_{x_i}z \rangle_{L^2} \\ &= \langle \nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u], z \rangle_{L^2} + \alpha \int_{\Omega} \nabla\nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u](x) \cdot \nabla z(x) dx \\ &= \langle \nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u], z \rangle_{L^2} - \alpha \int_{\Omega} \Delta\nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u](x)z(x) dx \\ &= \langle (1 - \alpha\Delta)\nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u], z \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Tím získáváme vztah

$$\nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u] = (1 - \alpha\Delta)^{-1}\nabla_{L^2}\mathcal{F}[u]. \quad (2.30)$$

Sobolevův gradient $\nabla_{H^{1,\alpha}}\mathcal{F}[u]$ tedy získáme jako řešení γ úlohy

$$\boxed{\begin{array}{l} \gamma - \alpha\Delta\gamma = \nabla_{L^2}\mathcal{F}[u] \quad \text{na } \Omega, \\ \gamma = 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{array}} \quad (2.31)$$

Pokud tedy známe $L^2(\Omega)$ gradient funkcionálu \mathcal{F} , můžeme ten Sobolevův získat pomocí (2.31). Na některé evoluční parciální diferenciální rovnice uvedené v sekcích výše (a nejen ty) lze nahlížet jako na $L^2(\Omega)$ gradientní toky vhodných funkcionálů. Pro ně pak můžeme sestavit gradientní toky podle Sobolevova skalárního součinu.

Difuzní rovnice (2.1)

Mějme nyní opět funkcionál tvaru

$$\mathcal{F}[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (2.32)$$

Pro $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ a $z \in H_0^1(\Omega)$ pak můžeme díky vlastnostem funkcí z $H_0^1(\Omega)$ psát

$$d\mathcal{F}[u](z) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla z(x) dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x)z(x) dx = \langle -\Delta u, z \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Jako gradientní tok (sestup) funkcionálu \mathcal{F} vzhledem k L^2 skalárnímu součinu tedy opět máme difuzní rovnici

$$\begin{array}{l} \partial_t u = \Delta u \quad \text{na } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{na } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{na } (0, +\infty) \times \partial\Omega. \end{array}$$

Nulová Dirichletova okrajová podmínka je dána vymizením funkcí z $H_0^1(\Omega)$ na hranici. Je známo [48, 21, 3], že pro všechna $t > 0$ náleží $u(t, \cdot)$ do $C^{(\infty)}(\Omega)$. Tato vysoká regularita řešení činí ze zpětné difuzní rovnice (gradientní výstup pro funkcionál \mathcal{F}) špatně podmíněnou úlohu [3].

Gradientní tok funkcionálu \mathcal{F} vzhledem k Sobolevovu skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1,\alpha}}$ má díky vztahu (2.30) tvar

$$\begin{array}{l} \partial_t u = \nu(1 - \alpha\Delta)^{-1}(-\Delta u) \quad \text{na } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{na } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{na } (0, +\infty) \times \partial\Omega, \end{array} \quad (2.33)$$

kde pro $\nu = -1$ máme gradientní sestup a pro $\nu = 1$ máme gradientní výstup. Lze ukázat [12], že pro obě hodnoty $\nu = \pm 1$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (respektive $L^2(\Omega)$) a pro všechna $\alpha > 0$ má úloha (2.33) jednoznačné řešení $u = u(t, x)$, pro které pro všechna $t \geq 0$ platí, že $u(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$ (respektive $L^2(\Omega)$). V práci [12] autoři představili model zaostření obrazu založený na (2.33) pro $\nu = 1$. Gradientní tok (2.33) budeme stejně jako v [12] označovat jako *Sobolevova difuze*.

Peronova–Malikova rovnice (2.2)

Pro $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ a $z \in H_0^1(\Omega)$ můžeme pro funkcionál

$$\mathcal{F}[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} G(|\nabla u(x)|^2) dx$$

psát

$$d\mathcal{F}[u](z) = \int_{\Omega} G'(|\nabla u(x)|^2) \nabla u(x) \cdot \nabla z(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (G'(|\nabla u(x)|^2) \nabla u(x)) z(x) dx = \langle -\nabla \cdot (G'(|\nabla u(x)|^2) \nabla u(x)), z \rangle_{L^2}.$$

Pak má L^2 gradient pro funkcionál \mathcal{F} tvar

$$\nabla_{L^2} \mathcal{F}[u] = -\nabla \cdot (G'(|\nabla u|^2) \nabla u).$$

Příslušný gradientní tok (sestup) je pak úloha

$$\begin{array}{l} \partial_t u = \nabla \cdot (G'(|\nabla u|^2) \nabla u) \quad \text{na } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{na } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{na } (0, +\infty) \times \partial\Omega, \end{array}$$

což je Peronova–Malikova rovnice [36]. Díky (2.30) získáme gradientní tok vzhledem k Sobolevovu skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1,\alpha}}$ jako

$$\begin{array}{l} \partial_t u = (1 - \alpha\Delta)^{-1} \nabla \cdot (G'(|\nabla u|^2) \nabla u) \quad \text{na } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{na } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{na } (0, +\infty) \times \partial\Omega. \end{array}$$

Funkci G lze pro $\lambda > 0$ volit jako

$$G(x) = \frac{\ln(1 + \lambda x)}{\lambda},$$

a pak

$$G'(x) = \frac{1}{1 + \lambda x}$$

je již výše uvedený hranový detektor (2.3).

Allenova–Cahnova rovnice (2.5)

Mějme nyní pro $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ a $z \in H_0^1(\Omega)$ Ginzburgův-Landauův funkcionál [46] tvaru

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} g(x) |\nabla u(x)|^2 + g(x) \frac{F_0(u)}{\xi^2} dx, \quad (2.34)$$

kde $\xi > 0$ a

$$F_0(u) = \frac{1}{4} \left(\left(u - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right)^2$$

je dvouminimový potenciál. Pro tento funkcionál můžeme psát

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}[u](z) &= \int_{\Omega} g(x) \nabla u(x) \cdot \nabla z(x) dx + \int_{\Omega} \frac{g(x)}{\xi^2} F_0'(u(x)) z(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} z(x) \nabla \cdot (g(x) \nabla u(x)) dx + \int_{\Omega} \frac{g(x)}{\xi^2} F_0'(u(x)) z(x) dx \\ &= \langle -\nabla \cdot (g \nabla u) + \frac{g}{\xi^2} F_0'(u), z \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Jako L^2 gradient tohoto funkcionálu máme

$$\nabla_{L^2} \mathcal{F}[u] = -\nabla \cdot (g \nabla u) - \frac{g}{\xi^2} f_0(u),$$

kde

$$F_0'(u) = f_0(u) = u(1 - u)(u - 0,5)$$

a tedy L^2 gradientním tokem (sestupem) funkcionálu \mathcal{F} je

$\partial_t u$	$=$	$\nabla \cdot (g \nabla u) + \frac{g}{\xi^2} f_0(u)$	na	$(0, +\infty) \times \Omega,$
$u _{t=0}$	$=$	u_0	na	$\Omega,$
u	$=$	0	na	$(0, +\infty) \times \partial\Omega,$

což je Allenova–Cahnova rovnice s nulovou Dirichletovou podmínkou a počáteční podmínkou u_0 . Opět užitím vztahu (2.30) obdržíme gradientní tok vzhledem k Sobolevovu skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1,\alpha}}$ jako

$\partial_t u$	$=$	$\nu(1 - \alpha \Delta)^{-1} \left(-\nabla \cdot (g \nabla u) - \frac{g}{\xi^2} f_0(u) \right)$	na	$(0, +\infty) \times \Omega,$
$u _{t=0}$	$=$	u_0	na	$\Omega,$
u	$=$	0	na	$(0, +\infty) \times \partial\Omega.$

(2.35)

Diferenciální rovnici v úloze (2.35) budeme pro jednoduchost označovat jako *Sobolevova Allenova–Cahnova rovnice*. V poslední kapitole si uvedeme numerická řešení této úlohy a podíváme se na jejich chování pro různé nastavení parametrů včetně volby $\nu = 1$, která v případě L^2 gradientního toku ($\alpha = 0$) odpovídá špatně podmíněnému gradientnímu výstupu.

Kapitola 3

Numerická schémata

V této kapitole se zaměříme na numerické řešení některých úloh zmíněných v kapitole předchozí pomocí metody konečných diferencí. Konkrétně uvedeme numerická schéma pro aproximativní řešení Allenovy–Cahnovy rovnice, její modifikace určené pro segmentaci, Sobolevovy difuze a Sobolevovy Allenovy–Cahnovy rovnice. V předchozí práci [43] jsme se obdobným způsobem zabývali numerickým řešením difuzní rovnice, Peronovy–Malikovy rovnice a vrstevnicové rovnice.

Metoda konečných diferencí (též metoda sítí) je numerická metoda používaná k aproximaci řešení diferenciálních rovnic. Spočívá v rozdělení definičního oboru na konečnou síť, na níž se pak derivace v řešené rovnici aproximují diferenčními náhradami odvozenými zpravidla pomocí Taylorova rozvoje. Získaná soustava rovnic lze řešit různými numerickými metodami. Metoda přímek spočívá v diskretizaci definičního oboru kromě jedné dimenze odpovídající zpravidla proměnné t . Tímto postupem obdržíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, které můžeme řešit pomocí zvolené Rungeovy–Kuttovy metody. Pro detailní popis zmíněných technik lze nahlédnout do [42] a [47]. V rámci zpracování obrazu byla metoda konečných diferencí použita například v pracích [8] a [15].

Úlohy difuzního charakteru mohou být řešeny také metodou konečných prvků [37, 27] nebo metodou konečných objemů [22, 5].

3.1 Diskretizace a diferenční náhrady

Nyní si uvedeme diferenční náhrady konkrétních diferenciálních výrazů, které budeme dále využívat při sestavování numerických schémat. Pro naše potřeby předpokládáme čtvercovou oblast

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1).$$

Volme $m, N_\tau \in \mathbb{N}$ a označme

$$h = \frac{1}{m}, \quad \tau = \frac{1}{N_\tau}.$$

Potom můžeme provést diskretizaci $(0, T) \times \bar{\Omega}$ jako

$$\bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_h = \{[k\tau, ih, jh] \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \{0, \dots, N_\tau\}; i, j \in \{0, \dots, m\}\},$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\tau &= \{k\tau \in \mathbb{R} \mid k \in \{0, \dots, N_\tau\}\}, \\ \bar{\omega}_h &= \{[ih, jh] \in \mathbb{R}^2 \mid i, j \in \{0, \dots, m\}\}, \\ \omega_h &= \{[ih, jh] \in \mathbb{R}^2 \mid i, j \in \{1, \dots, m-1\}\}, \end{aligned}$$

$$\partial\omega_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h.$$

Libovolnou funkci $\varphi : \langle 0, T \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ pak můžeme na tuto síť zúžit a označit

$$\varphi_{i,j}^k := \varphi(k\tau, ih, jh).$$

Při tomto označení platí následující náhrady derivací¹ při dostatečné hladkosti funkce φ

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_{i,j}^k &= \frac{\varphi_{i,j}^{k+1} - \varphi_{i,j}^k}{h} + O(\tau), \\ \partial_x \varphi_{i,j}^k &= \frac{\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k}{2h} + O(h^2), \quad \partial_y \varphi_{i,j}^k = \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{2h} + O(h^2), \\ \partial_{xx} \varphi_{i,j}^k &= \frac{\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k}{h^2} + O(h^2), \quad \partial_{yy} \varphi_{i,j}^k = \frac{\varphi_{i,j+1}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i,j-1}^k}{h^2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Konečné diference si pak můžeme označit jako

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^k &= \frac{\varphi_{i,j}^{k+1} - \varphi_{i,j}^k}{h}, \\ \varphi_{x_{i,j}}^k &= \frac{\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k}{2h}, \quad \varphi_{y_{i,j}}^k = \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{2h}, \\ \varphi_{xx_{i,j}}^k &= \frac{\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k}{h^2}, \quad \varphi_{yy_{i,j}}^k = \frac{\varphi_{i,j+1}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i,j-1}^k}{h^2}. \end{aligned}$$

Nyní již máme vše připravené pro vytvoření numerických schémat.

3.2 Allenova–Cahnova rovnice

Diferenciální rovnici v (2.5) vydělíme ξ a označíme si její pravou stranu jako

$$Au = \partial_{xx}u + \partial_{yy}u + \frac{1}{\xi^2}u(1-u) \left(u - \frac{1}{2} \right) + F \sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2}.$$

Zúžíme u na síť $\bar{\omega}_h$, derivace nahradíme výše označenými diferenciemi a získáme aproximaci tohoto diferenciálního výrazu jako

$$A_h u_{i,j}(t) = u_{xx_{i,j}}(t) + u_{yy_{i,j}}(t) + \frac{1}{\xi^2} u_{i,j}(t) (1 - u_{i,j}(t)) \left(u_{i,j}(t) - \frac{1}{2} \right) + F \sqrt{(u_{x_{i,j}}(t))^2 + (u_{y_{i,j}}(t))^2}.$$

¹Jejich odvození z Taylorovy věty jsme provedli v předchozí práci [43].

Metoda přímek

Následnou diskretizací počáteční podmínky i okrajové podmínky (tu nahradíme diferencemi 1. řádu) úlohy (2.5) obdržíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
 \frac{du_{i,j}}{dt}(t) &= A_h u_{i,j}(t) \quad \text{na } \omega_h, \\
 u_{i,j}(0) &= u_{0i,j} \quad \text{na } \omega_h, \\
 u_{0,j}(t) &= u_{1,j}(t) \quad \text{pro } j \in \{0, \dots, m\}, \\
 u_{m,j}(t) &= u_{m-1,j}(t) \quad \text{pro } j \in \{0, \dots, m\}, \\
 u_{i,0}(t) &= u_{i,1}(t) \quad \text{pro } i \in \{0, \dots, m\}, \\
 u_{i,m}(t) &= u_{i,m-1}(t) \quad \text{pro } i \in \{0, \dots, m\},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

kteřou můžeme řešit pomocí libovolné Rungeovy-Kuttovy metody. Při volbě té nejjednodušší, Eulerovy², obdržíme explicitní schéma konečných diferencí

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^k &= u_{i,j}^k + \tau A_h u_{i,j}^k \quad \text{na } \bar{\omega}_\tau \times \omega_h, \\
 u_{i,j}^0 &= u_{0i,j} \quad \text{na } \omega_h, \\
 u_{0,j}^k &= u_{1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, m\}, \\
 u_{m,j}^k &= u_{m-1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, m\}, \\
 u_{i,0}^k &= u_{i,1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, m\}, \\
 u_{i,m}^k &= u_{i,m-1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, m\}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.3 Segmentační model

Nyní budeme postupovat stejně jako v předchozím případě. V diferenciální rovnici v (2.25) si označíme diferenciální výraz na pravé straně jako

$$Bu = g_{\lambda_1}^0 (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u) + P(\nabla g_{\lambda_2}^0 \cdot \nabla u) + \frac{g_{\lambda_2}^0}{\xi^2} u(1-u) \left(u - \frac{1}{2} \right) + g_{\lambda_2}^0 \tilde{F} \sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2},$$

kde

$$g_{\lambda}^0 = \frac{1}{1 + \lambda[(\partial_x f(I_0))^2 + (\partial_y f(I_0))^2]}.$$

Opět při zúžení na síť $\bar{\omega}_h$ a nahrazením všech derivací příslušnými konečnými diferencemi získáme aproximaci diferenciálního výrazu Bu jako

$$B_h u_{i,j}(t) = G_{\lambda_{1i,j}}^0 (u_{xx_{i,j}}(t) + u_{yy_{i,j}}(t)) + P(C_{i,j}(t)) + \frac{G_{\lambda_{2i,j}}^0}{\xi^2} f_0(u_{i,j}(t)) + G_{\lambda_{2i,j}}^0 \tilde{F}_{i,j} \sqrt{(u_{x_{i,j}}(t))^2 + (u_{y_{i,j}}(t))^2},$$

kde

$$G_{\lambda}^0 = \frac{1}{1 + \lambda[(f(I_0)_x)^2 + (f(I_0)_y)^2]}$$

²Zůžeme i na síť $\bar{\omega}$, a derivaci podle t nahradíme konečnou diferencí u_t .

a

$$C_{i,j}(t) = \left(G_{\lambda_2}^0\right)_{x_{i,j}} u_{x_{i,j}}(t) + \left(G_{\lambda_2}^0\right)_{y_{i,j}} u_{y_{i,j}}(t).$$

Metoda přímek

Opět diskretizací počáteční podmínky i okrajové podmínky úlohy (2.25) obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{du_{i,j}}{dt}(t) &= B_h u_{i,j}(t) \quad \text{na } \omega_h, \\ u_{i,j}(0) &= u_{0,i,j} \quad \text{na } \omega_h, \\ u_{0,j}(t) &= u_{1,j}(t) \quad \text{pro } j \in \{0, \dots, m\}, \\ u_{m,j}(t) &= u_{m-1,j}(t) \quad \text{pro } j \in \{0, \dots, m\}, \\ u_{i,0}(t) &= u_{i,1}(t) \quad \text{pro } i \in \{0, \dots, m\}, \\ u_{i,m}(t) &= u_{i,m-1}(t) \quad \text{pro } i \in \{0, \dots, m\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

a stejně jako v předchozím případě volbou Eulerovy metody dojdeme k diferencnímu schématu

$$\begin{aligned} u_{i,j}^k &= u_{i,j}^k + \tau B_h u_{i,j}^k \quad \text{na } \bar{\omega}_\tau \times \omega_h, \\ u_{i,j}^0 &= u_{0,i,j} \quad \text{na } \omega_h, \\ u_{0,j}^k &= u_{1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, m\}, \\ u_{m,j}^k &= u_{m-1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, m\}, \\ u_{i,0}^k &= u_{i,1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, m\}, \\ u_{i,m}^k &= u_{i,m-1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, m\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.4 Sobolevovy gradienty

Pro numerické řešení gradientních toků podle Sobolevova gradientu (2.33) a (2.35) budeme muset nejdříve umět numericky určit Sobolevův gradient $\nabla_{H^{1,\alpha}} \mathcal{F}[u]$ daný úlohou (2.31). Budeme tedy numericky řešit úlohu typu

$$\begin{aligned} \gamma(x, y) - \alpha \left(\partial_{xx} \gamma(x, y) + \partial_{yy} \gamma(x, y) \right) &= \nabla_{L^2} \mathcal{F}[u](x, y) \quad \text{na } \Omega, \\ \gamma(x, y) &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Zúžením úlohy (3.5) na síť $\bar{\omega}_h$, nahrazením derivací výše uvedenými diferencemi (i v diferenciálním výrazu $\nabla_{L^2} \mathcal{F}[u]$) získáme diferencní úlohu

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j} - \alpha \left(\gamma_{xx_{i,j}} + \gamma_{yy_{i,j}} \right) &= f_{i,j} \quad \text{na } \omega_h, \\ \gamma_{i,j} &= 0 \quad \text{na } \partial\omega_h, \end{aligned} \tag{3.6}$$

kde $f_{i,j}$ je aproximace diferenciálního výrazu $\nabla_{L^2} \mathcal{F}[u]$ a $\gamma_{i,j}$ je pak aproximativní řešení (3.5). Jedná se o soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé $\gamma_{i,j}$, kterou můžeme pro matici $A_h \in \mathbb{R}^{(m-1)^2, (m-1)^2}$ zapsat jako

$$A_h \tilde{\gamma} = \tilde{f}, \tag{3.7}$$

kde při označení

$$l(i, j) = (i - 1)(m - 1) + j \quad \text{na} \quad \omega_h$$

je

$$\tilde{\gamma}_{l(i,j)} = \gamma_{i,j}, \quad \tilde{f}_{l(i,j)} = f_{i,j}.$$

Abychom matici A_h mohli explicitně vyjádřit, musíme v (3.6) dosadit za diferenční náhrady a osamostatnit jednotlivé neznámé. Máme tedy

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j} - \alpha(\gamma_{xx_{i,j}} + \gamma_{yy_{i,j}}) &= f_{i,j}, \\ \gamma_{i,j} - \alpha\left(\frac{\gamma_{i+1,j} - 2\gamma_{i,j} + \gamma_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\gamma_{i,j+1} - 2\gamma_{i,j} + \gamma_{i,j-1}}{h^2}\right) &= f_{i,j}, \\ \gamma_{i,j}\left(1 + \frac{4\alpha}{h^2}\right) + \gamma_{i,j-1}\left(-\frac{\alpha}{h^2}\right) + \gamma_{i,j+1}\left(-\frac{\alpha}{h^2}\right) + \gamma_{i-1,j}\left(-\frac{\alpha}{h^2}\right) + \gamma_{i+1,j}\left(-\frac{\alpha}{h^2}\right) &= f_{i,j}. \end{aligned}$$

Matrice soustavy A_h je tedy blokově tridiagonální matice tvaru

$$A_h = \begin{pmatrix} B_h & C_h & & \\ C_h & B_h & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & C_h \\ & & C_h & B_h \end{pmatrix},$$

kde

$$B_h = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4\alpha}{h^2} & -\frac{\alpha}{h^2} & & \\ -\frac{\alpha}{h^2} & 1 + \frac{4\alpha}{h^2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha}{h^2} \\ -\frac{\alpha}{h^2} & & -\frac{\alpha}{h^2} & 1 + \frac{4\alpha}{h^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1, m-1}, \quad C_h = -\frac{\alpha}{h^2} \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{h^2} & & & \\ & -\frac{\alpha}{h^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{\alpha}{h^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1, m-1}.$$

Soustavu (3.7) s řídkou blokově tridiagonální symetrickou maticí A můžeme řešit iteračně pomocí metody sdružených gradientů [41].

3.4.1 Difuzní rovnice

Pro numerické řešení úlohy (2.33) si nyní jako aproximaci L^2 gradientu

$$\nabla_{L^2} \mathcal{F}[u](t, x, y) = -\partial_{xx} u(t, x, y) - \partial_{yy} u(t, x, y)$$

funkcionálu (2.32) na síti $\bar{\omega}_\tau \times \omega_h$ vezmeme

$$f_{i,j}^k = -u_{xx_{i,j}}^k - u_{yy_{i,j}}^k.$$

Jako aproximaci Sobolevova gradientu $\nabla_{H^{1,\alpha}} \mathcal{F}[u](t, x, y)$ na síti $\bar{\omega}_\tau \times \omega_h$ budeme brát řešení $\gamma_{i,j}^k$ úlohy (3.7) s pravou stranou $f_{i,j}^k = -u_{xx_{i,j}}^k - u_{yy_{i,j}}^k$. Následným nahrazením derivace na levé straně (2.33) konečnou diferencí $u_{i,j}^k$ a diskretizací okrajové a počáteční podmínky obdržíme schéma

$$\boxed{\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} &= u_{i,j}^k + \tau \nu \gamma_{i,j}^k & \text{na } \bar{\omega}_\tau \times \omega_h, \\ u_{i,j}^0 &= u_{0,i,j} & \text{na } \omega_h, \\ u_{i,j}^k &= 0 & \text{na } \bar{\omega}_\tau \times \partial\omega_h. \end{aligned}} \quad (3.8)$$

V každém kroku tohoto schématu budeme $\gamma_{i,j}^k$ počítat aproximativně pomocí metody sdružených gradientů.

3.4.2 Allenova–Cahnova rovnice

Obdobně jako v předchozím případě vezmeme aproximaci pravé strany úlohy (2.35) (kde pro naše účely bereme $g(x) = 1$) na síti $\bar{\omega}_\tau \times \omega_h$ jako řešení $\gamma_{i,j}^k$ úlohy (3.7) kde za pravou stranu budeme brát

$$f_{i,j}^k = -u_{xx_{i,j}}^k - u_{yy_{i,j}}^k - \frac{1}{\xi^2} u_{i,j}^k (1 - u_{i,j}^k) (u_{i,j}^k - 0.5),$$

což je aproximace L^2 gradientu

$$\nabla_{L^2} \mathcal{F}[u](t, x, y) = -\partial_{xx} u(t, x, y) - \partial_{yy} u(t, x, y) - \frac{1}{\xi^2} u(t, x, y) (1 - u(t, x, y)) (u(t, x, y) - 0.5)$$

funkcionálu (2.34) na síti $\bar{\omega}_\tau \times \omega_h$. Znovu náhradou derivace na levé straně rovnice (2.35) za konečnou diferenci $u_{i,j}^k$ a diskretizací okrajové a počáteční podmínky se dostáváme ke schématu

$$\begin{cases} u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \tau \nu \gamma_{i,j}^k & \text{na } \bar{\omega}_\tau \times \omega_h, \\ u_{i,j}^0 = u_{0,i,j} & \text{na } \omega_h, \\ u_{i,j}^k = 0 & \text{na } \bar{\omega}_\tau \times \partial\omega_h. \end{cases} \quad (3.9)$$

Opět v každém kroku tohoto schématu budeme $\gamma_{i,j}^k$ počítat aproximativně pomocí metody sdružených gradientů.

Kapitola 4

Výpočetní výsledky

V této kapitole otestujeme odvozená numerická schémata z předchozí kapitoly na konkrétních datech pomocí vlastní implementace v jazyce Python. Nejdříve demonstrujeme souvislost Allenovy–Cahnovy rovnice s pohybem podle střední křivosti. Dále aplikujeme automatický segmentační model vycházející z Allenovy–Cahnovy rovnice na sérii snímků z magnetické rezonance srdce, určíme vývoj objemu srdeční komory a z něho následně i ejekční frakci (1.3). Následně budou na testovacích datech demonstrovány vlastnosti gradientních toků podle Sobolevova gradientu.

Snímky z magnetické rezonance srdce, které byly použity v této kapitole, byly poskytnuty Institutem klinické a experimentální medicíny (IKEM) v Praze.

4.1 Allenova–Cahnova rovnice

Zde si ukážeme řešení úlohy

$$\begin{array}{lll} \partial_t u & = & \Delta u + \frac{1}{\xi^2} u(1-u)(u-0.5) + F|\nabla u| \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x, y) & = & I_0(x, y) \quad \text{na } \Omega, \\ \partial_n u & = & 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{array} \quad (4.1)$$

pomocí implementace diferenčního schématu (3.2). Jako počáteční podmínku I_0 bereme testovací obrazová data. Na obrázku 4.1 můžeme pozorovat, že působením Allenovy–Cahnovy rovnice dochází k odstranění drobných rytin a rozdělení obrazu na dvě oblasti s hodnotou u rovno 1 (černá) a 0 (bílá) mezi nimiž je tenká přechodová vrstva. Svoji vrstevnicí s hodnotou 0.5 zadává řešení u na této přechodové vrstvě uzavřené křivky, které samy sebe neprotínají. Ty, jak můžeme na obrázku 4.1 vidět, se postupně stahují na konvexní a v konečném čase vymizí v bodě. Toto jsou přesně vlastnosti pohybu podle střední křivosti popsané v [25] a [23].

Na obrázku 4.2 můžeme pozorovat prudké odstranění šumu počátečního obrazu I_0 . Následně vidíme i výše popsanou vlastnost Allenovy–Cahnovy rovnice a pohybu podle střední křivosti. Na obrázku 4.3 je zase řešení $u(t, x, y)$ zobrazeno pro jednotlivá t jako graf. Je zde více zřetelné rozdělení na podoblasti s hodnotami 1 a 0.



(a) I_0 (počáteční podmínka)



(b) $t = 7.8 \times 10^{-6}$



(c) $t = 1.62 \times 10^{-5}$



(d) $t = 8.04 \times 10^{-5}$



(e) $t = 1.602 \times 10^{-4}$



(f) $t = 2.4 \times 10^{-4}$



(g) $t = 3.204 \times 10^{-4}$

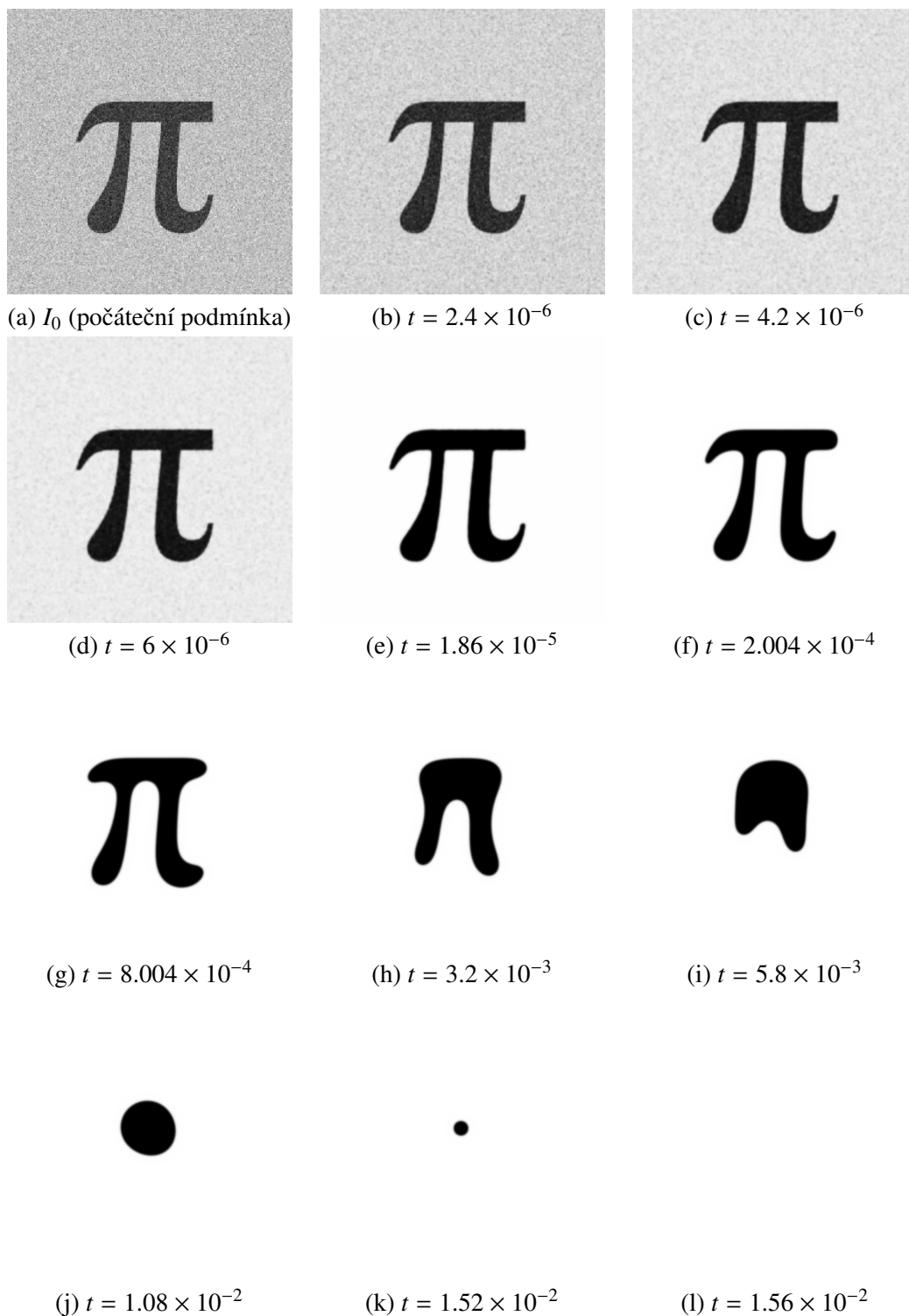


(h) $t = 4.002 \times 10^{-4}$

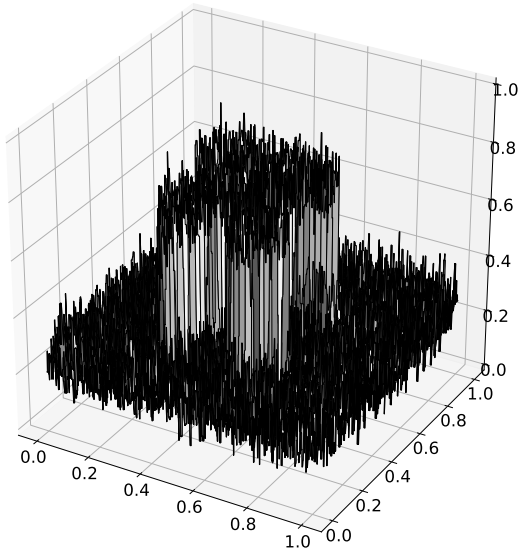


(i) $t = 4.8 \times 10^{-4}$

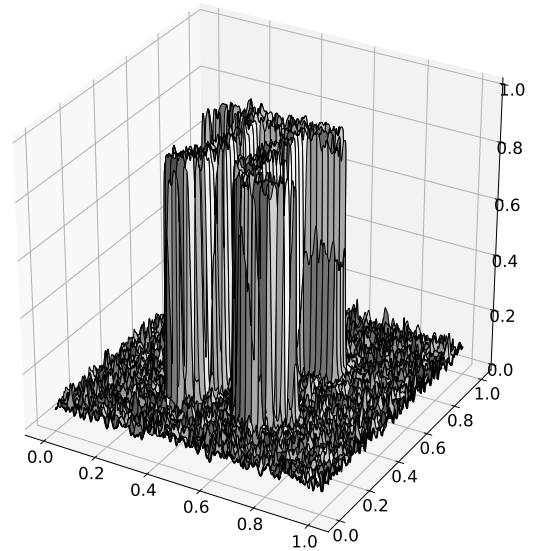
Obrázek 4.1: Řešení rovnice (4.1) pro parametry $h = \frac{1}{600}$, $\tau = 6 \times 10^{-7}$, $\xi = \frac{1}{800}$, $F = 0$ a počáteční podmínku vlevo nahoře. Na jednotlivých obrázcích (b)-(i) vidíme průběh řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedená t . Funkce $u(t, \cdot, \cdot)$ je na jednotlivých obrázcích reprezentována jako bitmapa – obor hodnot je aproximován diskretním prostorem odstínů šedi.



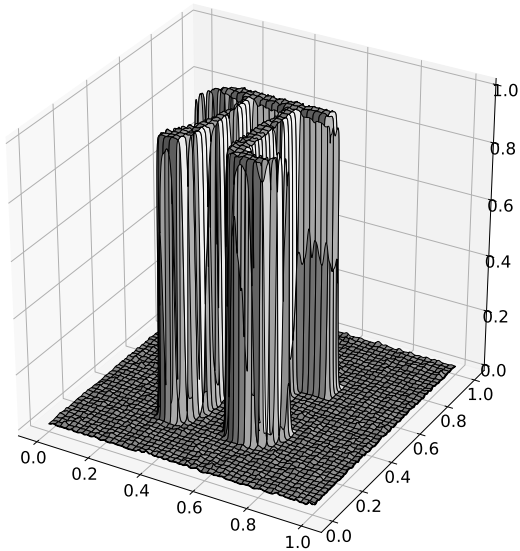
Obrázek 4.2: Řešení rovnice (4.1) pro parametry $h = \frac{1}{600}$, $\tau = 6 \times 10^{-7}$, $\xi = \frac{1}{800}$, $F = 0$ a počáteční podmínku vlevo nahoře. Na jednotlivých obrázcích (b)-(l) vidíme průběh řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedené t . Funkce $u(t, \cdot, \cdot)$ je na jednotlivých obrázcích reprezentována jako bitmapa – obor hodnot je aproximován diskrétním prostorem odstínů šedi. Od (a) do (e) můžeme pozorovat prudké odstranění šumu. Od (e) do (l) vidíme postupné stahování původního útvaru na konvexní a jeho stažení v konečném čase do bodu.



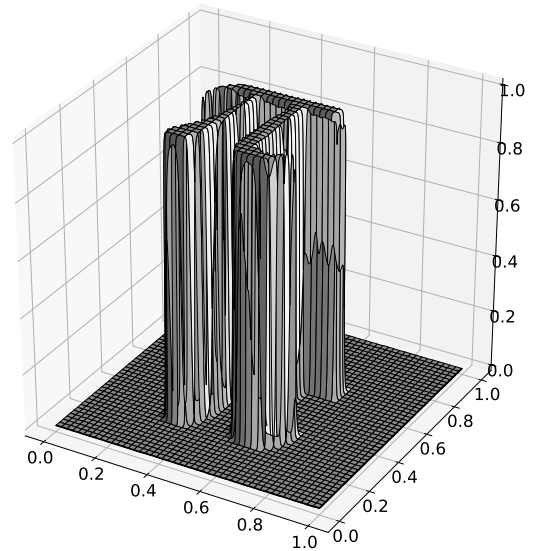
(a) I_0 (počáteční podmínka)



(b) $t = 6 \times 10^{-6}$



(c) $t = 1.26 \times 10^{-5}$



(d) $t = 1.86 \times 10^{-5}$

Obrázek 4.3: Řešení rovnice (4.1) pro parametry $h = \frac{1}{600}$, $\tau = 6 \times 10^{-7}$, $\xi = \frac{1}{800}$, $F = 0$ a počáteční podmínku vlevo nahoře. Na jednotlivých obrázcích (b)-(d) vidíme průběh řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedené t . Funkce $u(t, \cdot, \cdot)$ je na jednotlivých obrázcích reprezentována jako graf. Na prvním z nich je vidět vysoká hustota zašumění (více patrnější než v bitmapové reprezentaci). Od (a) do (d) můžeme pozorovat prudké odstranění šumu a navýšení kontrastu. Na posledním obrázku je vidět graf skládající se z oblastí s hodnotami 1, hodnotami 0 a z přechodové vrstvy (úměrné parametru ξ).

4.2 Segmentační model

Nyní aplikujeme segmentační model

$$\begin{cases} \partial_t u & = g_{\lambda_1}^0 \Delta u + P \nabla g_{\lambda_2}^0 \cdot \nabla u + g_{\lambda_2}^0 \left(\frac{1}{\xi^2} f_0(u) + \tilde{F} |\nabla u| \right) & \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x, y) & = u_0(x, y) & \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, x, y) & = 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

na sérii snímků z magnetické rezonance srdce skládající se z 8 řezů a 32 časových okamžiků (celkem 256 snímků) pomocí diferenčního schématu (3.4). Člen \tilde{F} volíme jako (2.26) a počáteční křivku u prvního snímku nastavujeme ručně ve tvaru (2.27). Zastavovací kritérium (2.28) splňujeme diskrétně jako

$$\frac{1}{\tau} \sum_{i,j} |u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k| h^2 < C.$$

Volbu následujících počátečních křivek provádíme automaticky tak, jak bylo popsáno v druhé kapitole. Pro všech 256 snímků byly shodně vybrány parametry

$$\tau = 2 \times 10^{-6}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.002, F = 200, P = 15, thr = 0,4, h = \frac{1}{198}, C = 0.1 \text{ a } \xi = 1.5h.$$

Volba $\lambda_1 = 0$ vyplynula z chování znázorněného na obrázku 4.4. Nenulový parametr λ_1 způsoboval skrz difuzní člen oscilaci u hran srdeční komory, čímž docházelo k rozšíření segmentační oblasti mimo komoru. Tento problém šel potlačit vyšším vyhlazením vstupního obrázku. To ale snižovalo lokalizaci, a proto jsme přistoupili k zvolení různých parametrů λ v hranových detektorech u jiných členů rovnice.

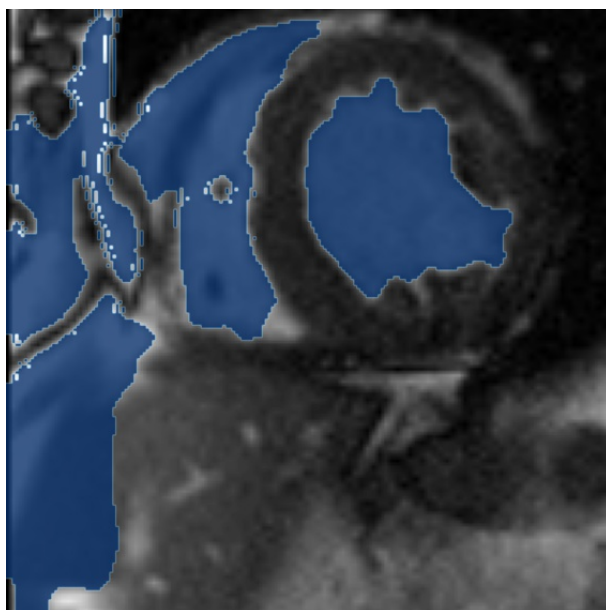
Vstupní obrázek I_0 byl vždy předzpracován pomocí Peronovy–Malikovy rovnice (2.2). K jejímu řešení jsme použili implementaci vytvořenou v rámci práce [43], kde jsme algoritmicky volili parametr λ v každém kroku k jako

$$\lambda = \min \{ \lambda_{ini} \alpha^k, \lambda_{max} \}.$$

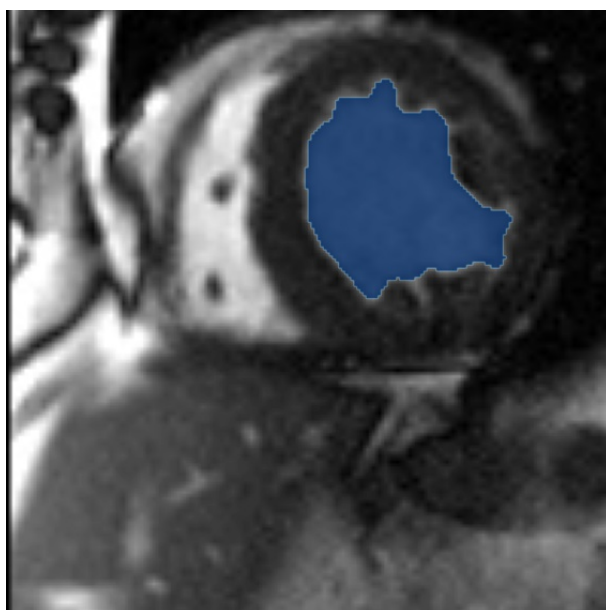
Pro všechny snímky jsme pro předzpracování Peronovou–Malikovou rovnicí volili veškeré parametry stejné a to

$$T = 3 \times 10^{-5}, \tau = 6 \times 10^{-6}, \lambda_{ini} = 0.02, \alpha = 1.1, \lambda_{max} = 1, \sigma = 0.005 \text{ a } h = \frac{1}{198}.$$

Na obrázku 4.5 můžeme vidět vývoj ručně volené počáteční segmentační oblasti (křivky) u prvního snímku v sérii. Zastavovací kritérium zde dobře zafungovalo. U obrázku (4.6) pozorujeme to samé, akorát zde už byla počáteční křivka volena automaticky. Její přesah do černé oblasti díky volbě \tilde{F} nezpůsobil potíže. Na obrázku 4.7 můžeme vidět finální segmentace řezu 06 v různých časech srdečního cyklu. Ze segmentace celé série jsme pak určili vývoj objemu levé komory během srdečního cyklu (viz graf na obrázku 4.8) a z něho EDV a ESV. Z těchto veličin jsme pak pro danou sérii snímků určili ejekční frakci dle vzorce (1.3) jako $EF = 29.3 \%$. Na obrázcích 4.9 a 4.10 pak můžeme vidět segmentace všech řezů v časech 04 a 13 srdečního cyklu odpovídající popořadě EDV a ESV.

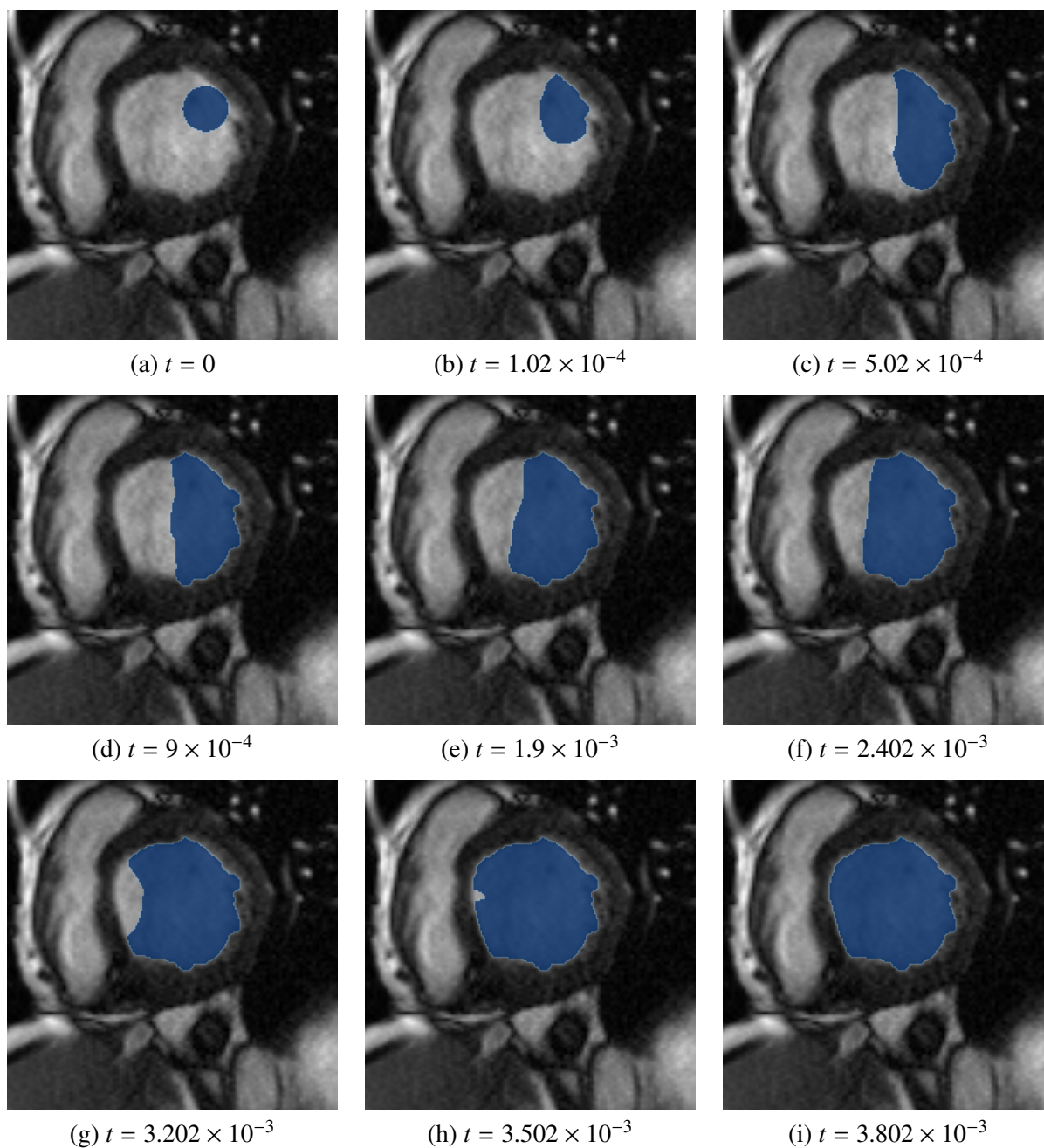


(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.004$

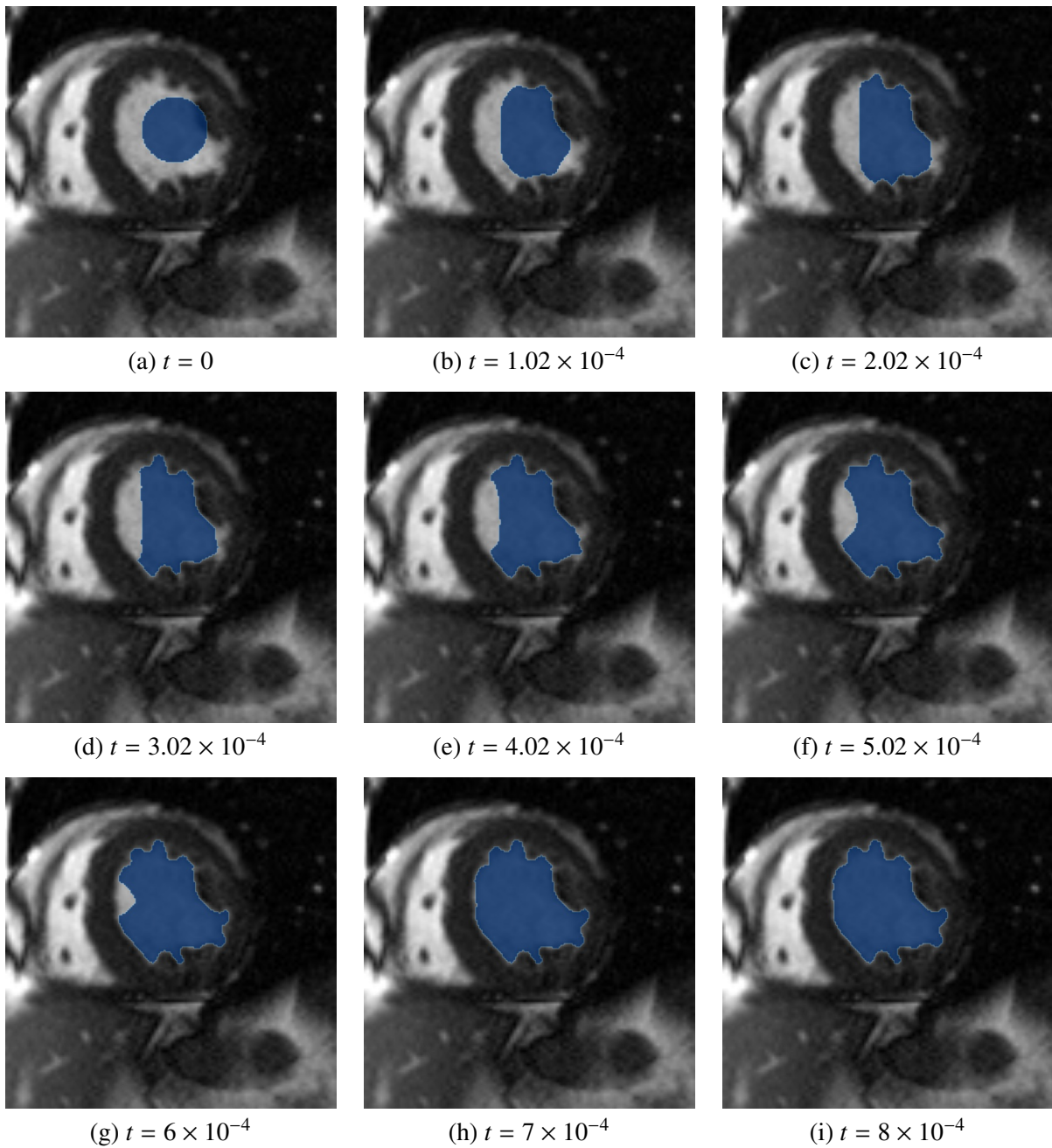


(b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.004$

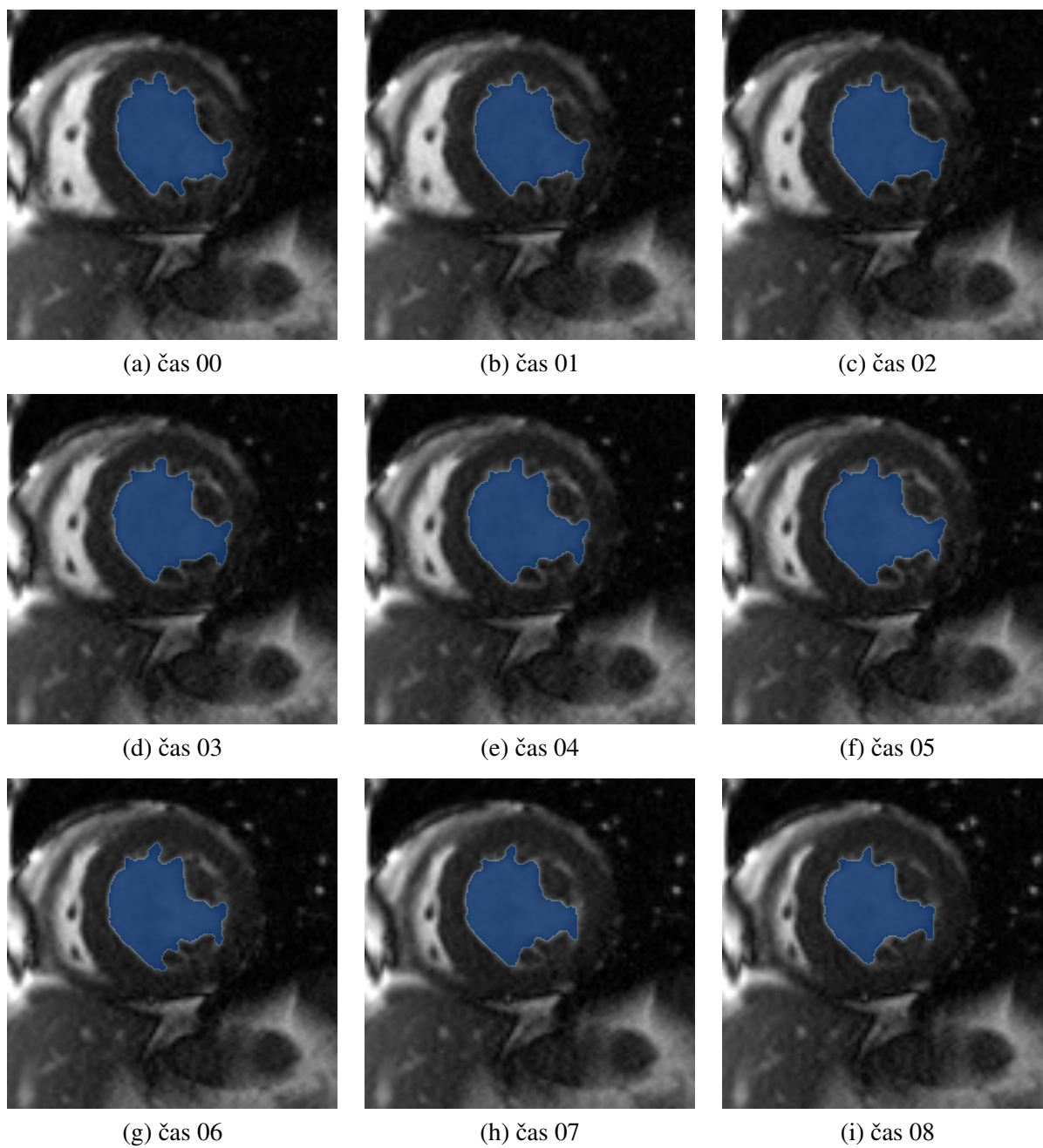
Obrázek 4.4: Vliv volby parametru λ_1 na segmentaci. Ostatní nastavení parametrů byla pro oba snímky zvolena stejně.



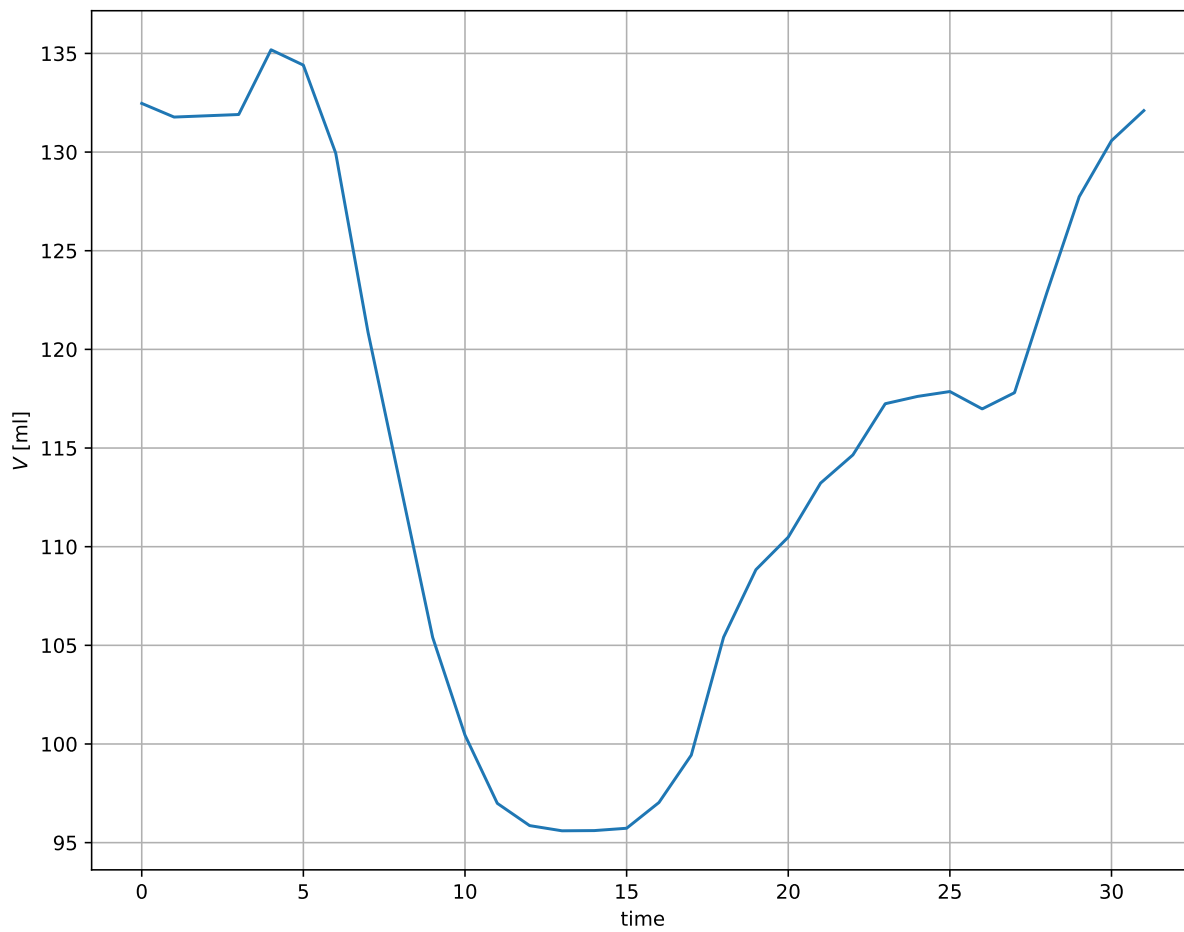
Obrázek 4.5: Na snímcích (a)-(i) můžeme vidět vývoj segmentační křivky daný parametrem t u řezu 02 v čase 00 srdečního cyklu. Pro $t = 3.802 \times 10^{-3}$ došlo ke splnění zastavovacího kritéria.



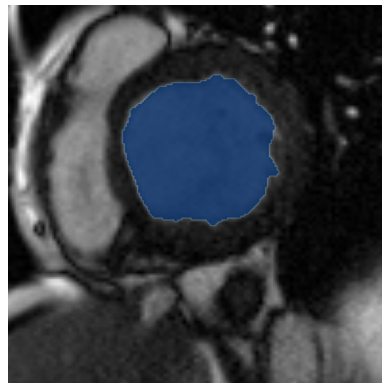
Obrázek 4.6: Na snímcích (a)-(i) můžeme vidět vývoj segmentační křivky daný parametrem t u řezu 06 v čase 00 srdečního cyklu. Pro $t = 8 \times 10^{-4}$ došlo ke splnění zastavovacího kritéria.



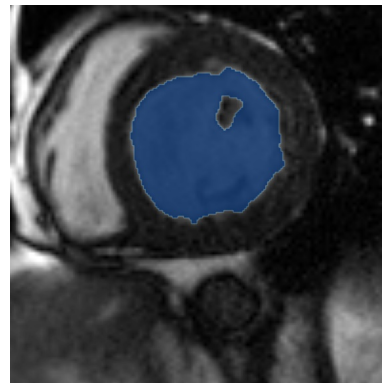
Obrázek 4.7: Na snímcích (a)-(i) můžeme vidět segmentace řezu 06 v různých okamžicích srdečního cyklu.



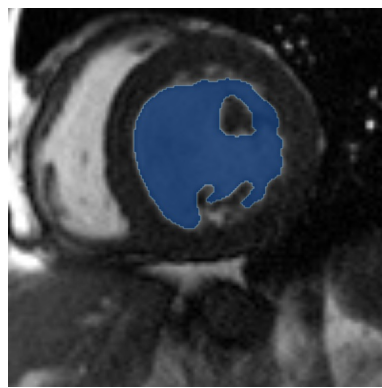
Obrázek 4.8: Vývoj objemu levé srdeční komory určený ze segmentací 256 snímků. Ejekční frakce byla stanovena na $EF = 29.3\%$.



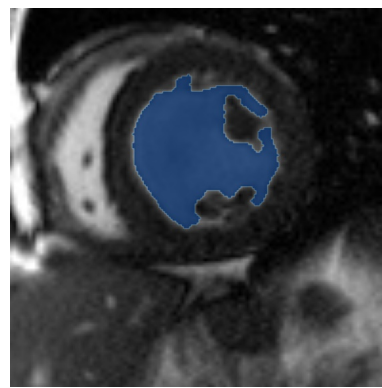
(a) řez 02



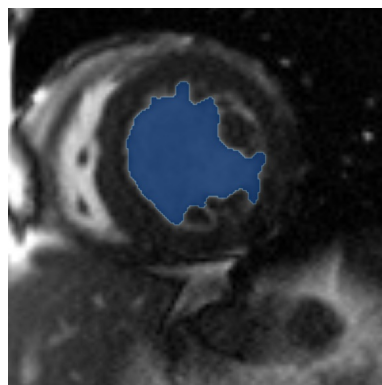
(b) řez 03



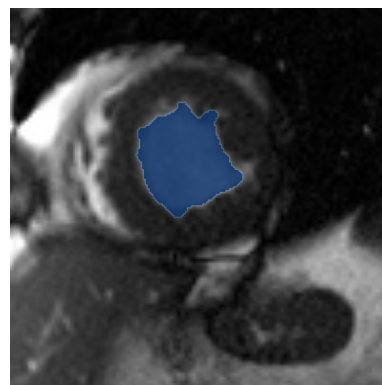
(c) řez 04



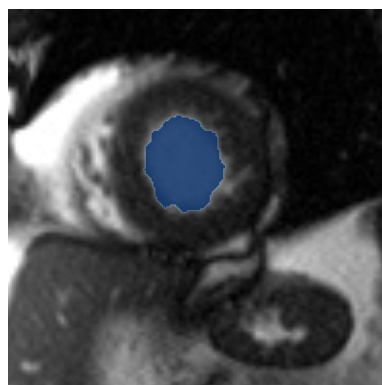
(d) řez 05



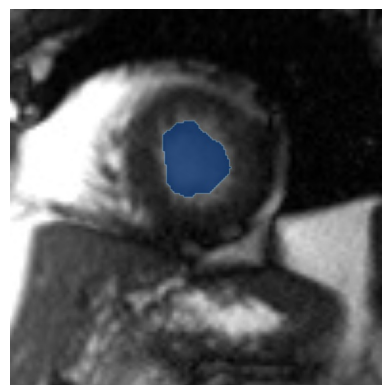
(e) řez 06



(f) řez 07

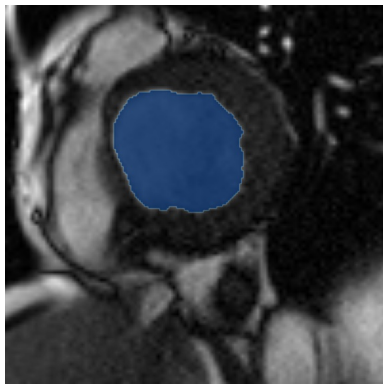


(g) řez 08

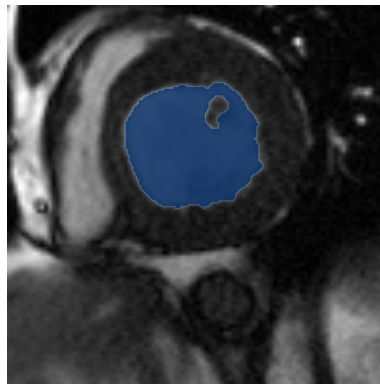


(h) řez 09

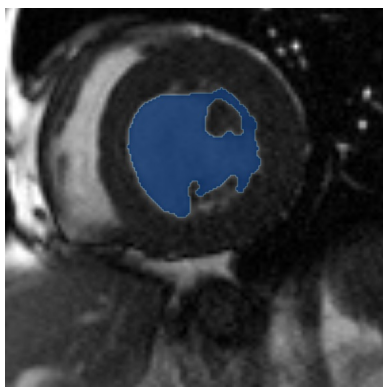
Obrázek 4.9: Segmentovaná levá srdeční komora v čase 04 srdečního cyklu odpovídající EDV.



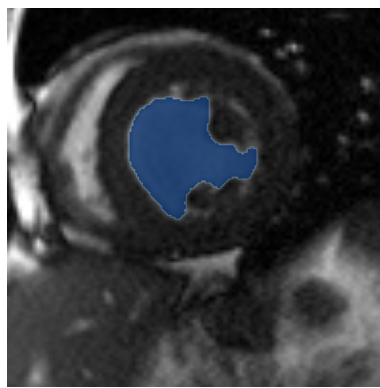
(a) řez 02



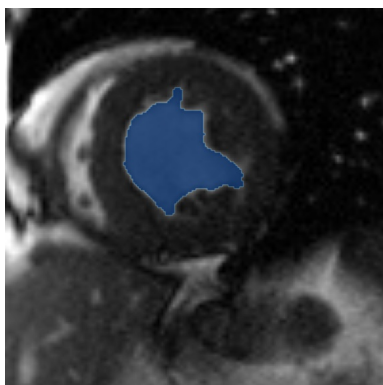
(b) řez 03



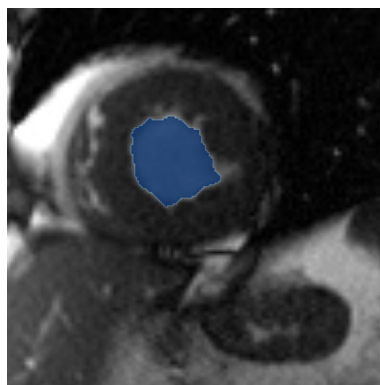
(c) řez 04



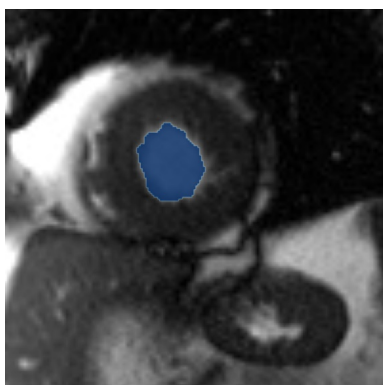
(d) řez 05



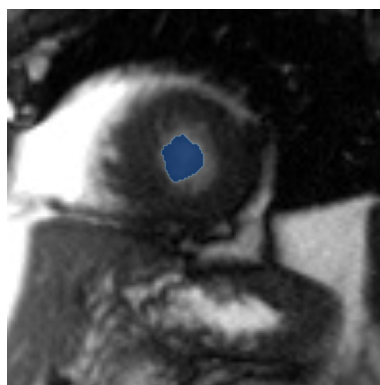
(e) řez 06



(f) řez 07



(g) řez 08



(h) řez 09

Obrázek 4.10: Segmentovaná levá srdeční komora v čase 13 srdečního cyklu odpovídající ESV.

4.3 Sobolevova difuze

Nyní si ukážeme numerické řešení úlohy

$$\begin{array}{rcl}
 \partial_t u & = & \nu(1 - \alpha\Delta)^{-1}(-\Delta u) \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \\
 u|_{t=0} & = & I_0 \quad \text{na } \Omega, \\
 u_{\partial\Omega} & = & 0 \quad \text{na } (0, T),
 \end{array} \tag{4.3}$$

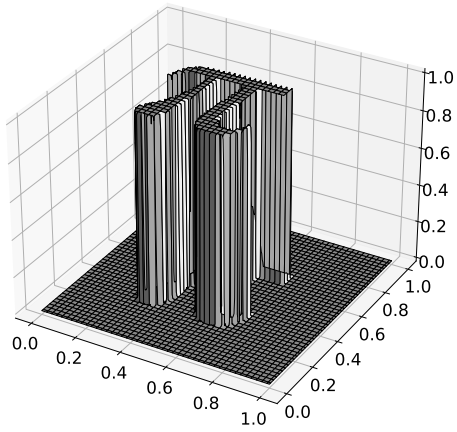
za pomoci implementace výše uvedeného schématu (3.8). Při použití metody sdružených gradientů řešíme iteračně lineární soustavu $Ax = b$. V každém kroku tohoto algoritmu máme odhad řešení \tilde{x} . Pro něj je dáno reziduum jako $r = b - A\tilde{x} = A(x - \tilde{x})$. Pro $\varepsilon_{cg} > 0$ budeme metodu sdružených zastavovat při splnění kritéria

$$\frac{\|r\|_2}{\|b\|_2} < \varepsilon_{cg}. \tag{4.4}$$

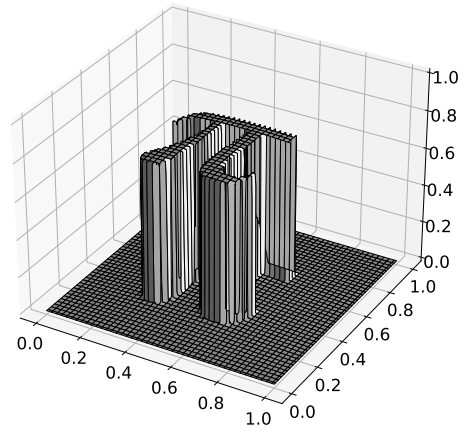
Na obrázcích 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 jsou pro danou počáteční podmínku I_0 , $\nu = -1$ a uvedené nastavení zbylých parametrů zobrazeny vývoje řešení $u(t, x, y)$ pro postupně se zmenšující hodnoty $\alpha = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$. Na obrázcích 4.15 a 4.16 jsou zobrazeny řezy zmíněných řešení. Při vyšších hodnotách α je v $u(t, x, y)$ možné pozorovat určité zachování neregularity počáteční podmínky I_0 . Naopak pro nižší hodnoty α se rovnice (4.3) chová více jako difuzní rovnice a nespojitosti jsou více rozmazány.

Na obrázcích 4.17, 4.18 můžeme vidět chování řešení rovnice (4.3) s uvedeným nastavením parametrů pro $\nu = 1$ ¹. Počáteční podmínky I_0 zde byly voleny jako řešení rovnice (4.3) se stejnými parametry, ale pro $\nu = -1$ a počáteční podmínky z obrázků 4.12, 4.13. Tyto počáteční podmínky z obrázků 4.12, 4.13 se podařilo v obou případech přibližně reprodukovat. Na základě této vlastnosti rovnice (4.3) pro $\nu = 1$ byl v práci [12] navržen model zaostření obrazu. Na obrázcích 4.19 a 4.20 můžeme vidět příklady tohoto zaostření obrazu přímo pomocí rovnice (4.3).

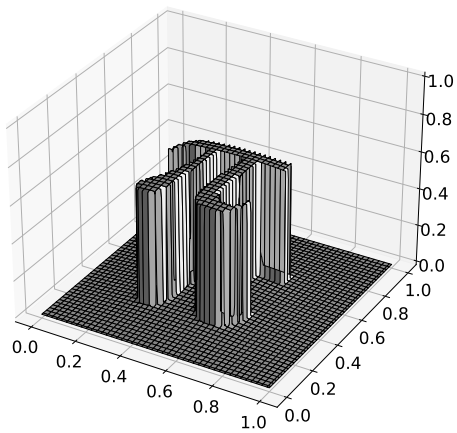
¹V řeči gradientních toků jde tedy o gradientní výstup. Ten je v případě L^2 gradientu, jak již bylo řečeno dříve, špatně podmíněná úloha.



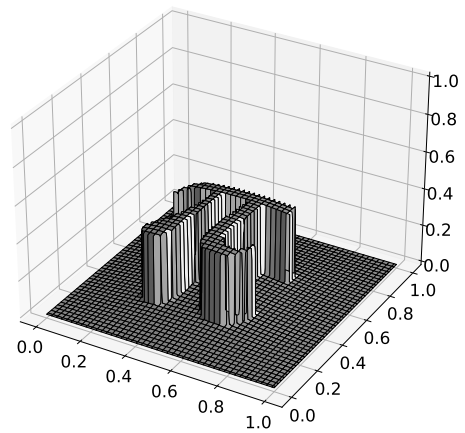
(a) I_0 (počáteční podmínka)



(b) $t = 3 \times 10^{-2}$

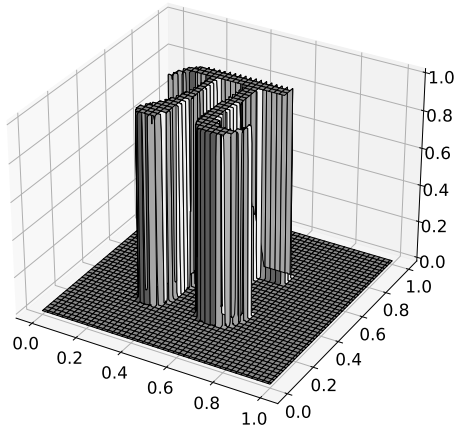


(c) $t = 5 \times 10^{-2}$

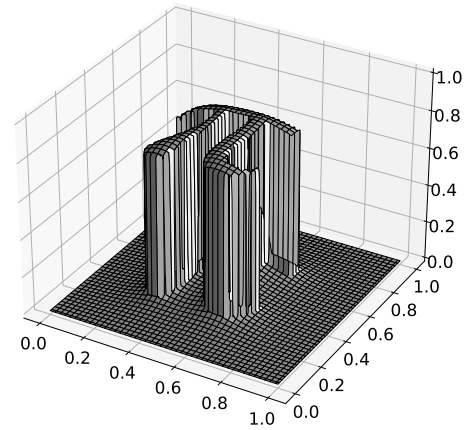


(d) $t = 1 \times 10^{-1}$

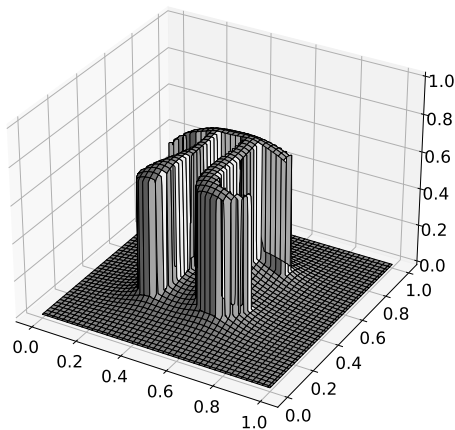
Obrázek 4.11: Řešení rovnice (4.3) pro parametry $h = \frac{1}{400}$, $\tau = 2.5 \times 10^{-4}$, $\alpha = 0.1$, $\nu = -1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ a počáteční podmínka na obrázku (a). Na jednotlivých obrázcích (b)-(d) vidíme průběh řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedená t .



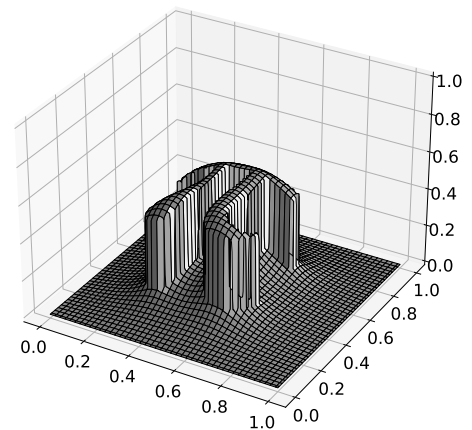
(a) I_0 (počáteční podmínka)



(b) $t = 3 \times 10^{-3}$

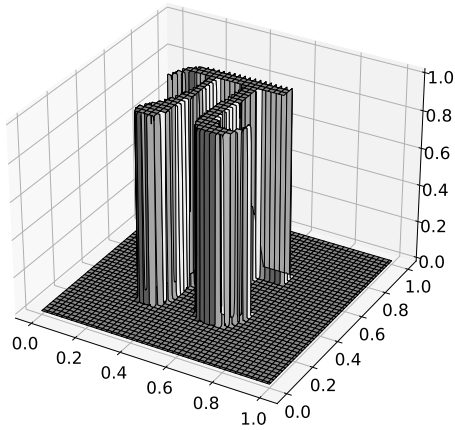


(c) $t = 5 \times 10^{-3}$

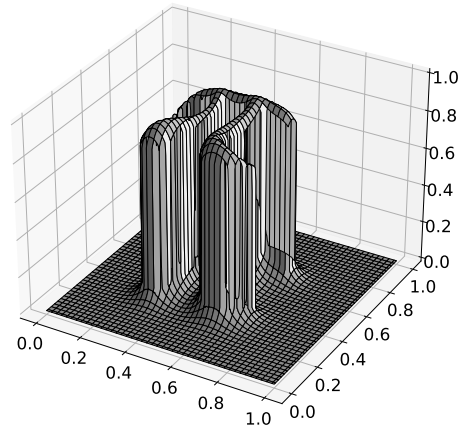


(d) $t = 1 \times 10^{-2}$

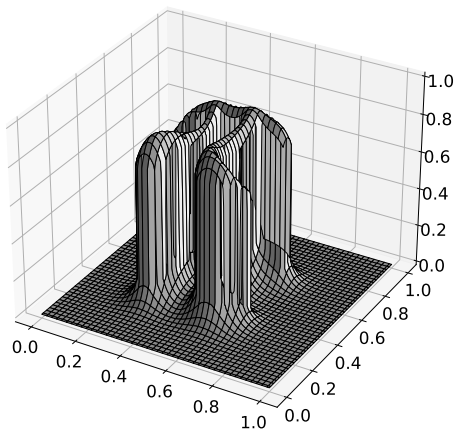
Obrázek 4.12: Řešení rovnice (4.3) pro parametry $h = \frac{1}{400}$, $\tau = 2.5 \times 10^{-4}$, $\alpha = 0.01$, $\nu = -1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ a počáteční podmínka na obrázku (a). Na jednotlivých obrázcích (b)-(d) vidíme průběh řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedená t .



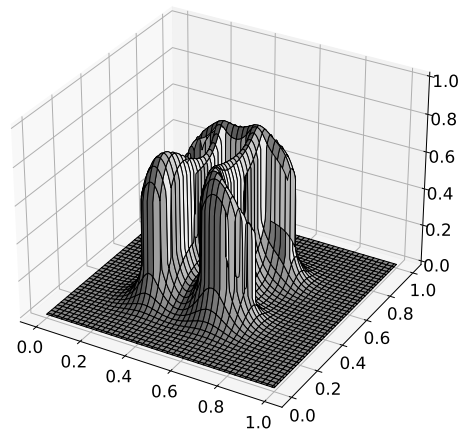
(a) I_0 (počáteční podmínka)



(b) $t = 3 \times 10^{-4}$

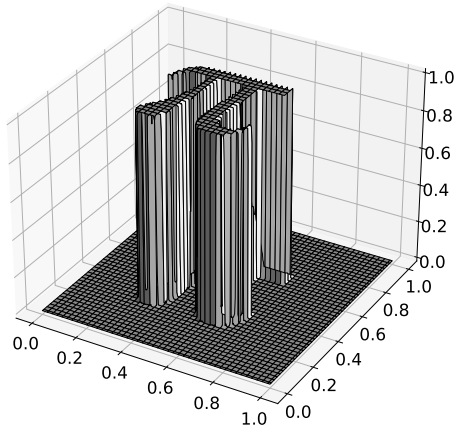


(c) $t = 5 \times 10^{-4}$

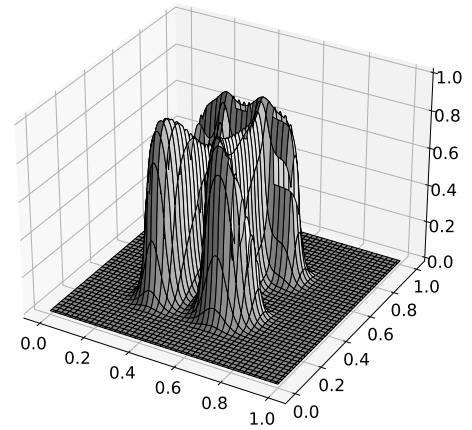


(d) $t = 1 \times 10^{-3}$

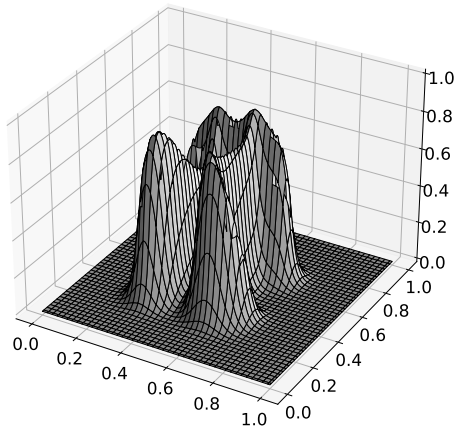
Obrázek 4.13: Řešení rovnice (4.3) pro parametry $h = \frac{1}{400}$, $\tau = 2.5 \times 10^{-5}$, $\alpha = 0.001$, $\nu = -1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ a počáteční podmínku na obrázku (a). Na jednotlivých obrázcích (b)-(d) vidíme průběh řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedená t .



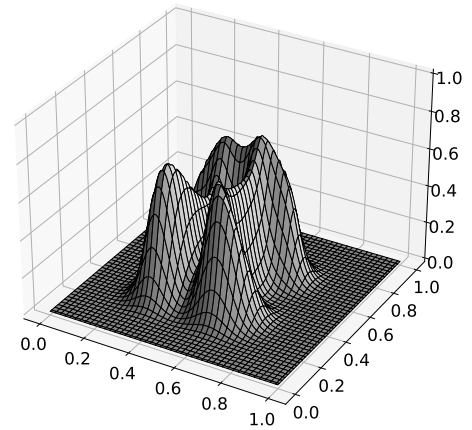
(a) I_0 (počáteční podmínka)



(b) $t = 3 \times 10^{-4}$

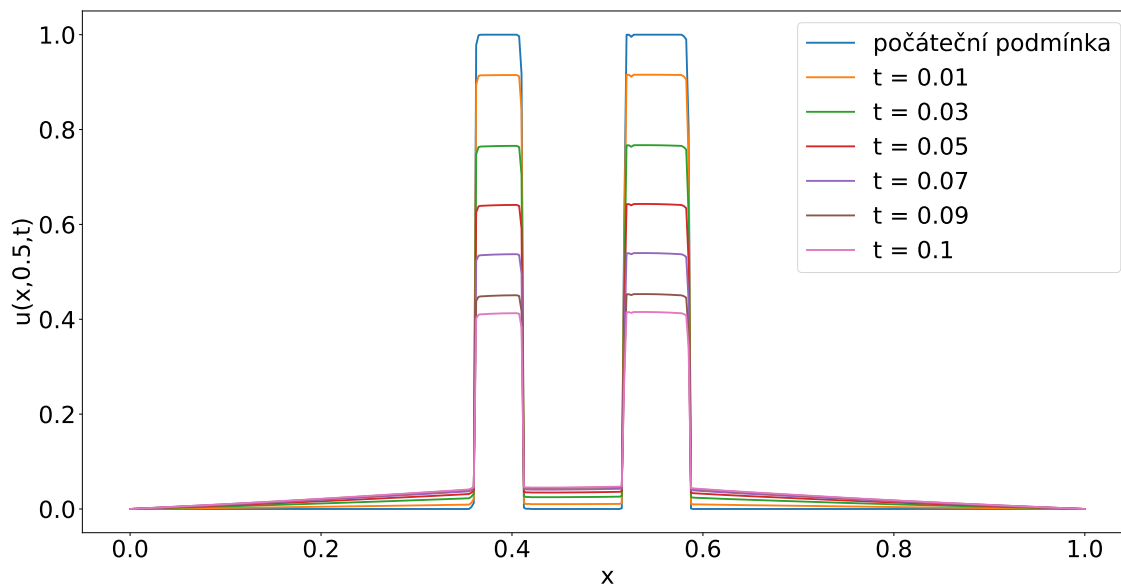


(c) $t = 5 \times 10^{-4}$

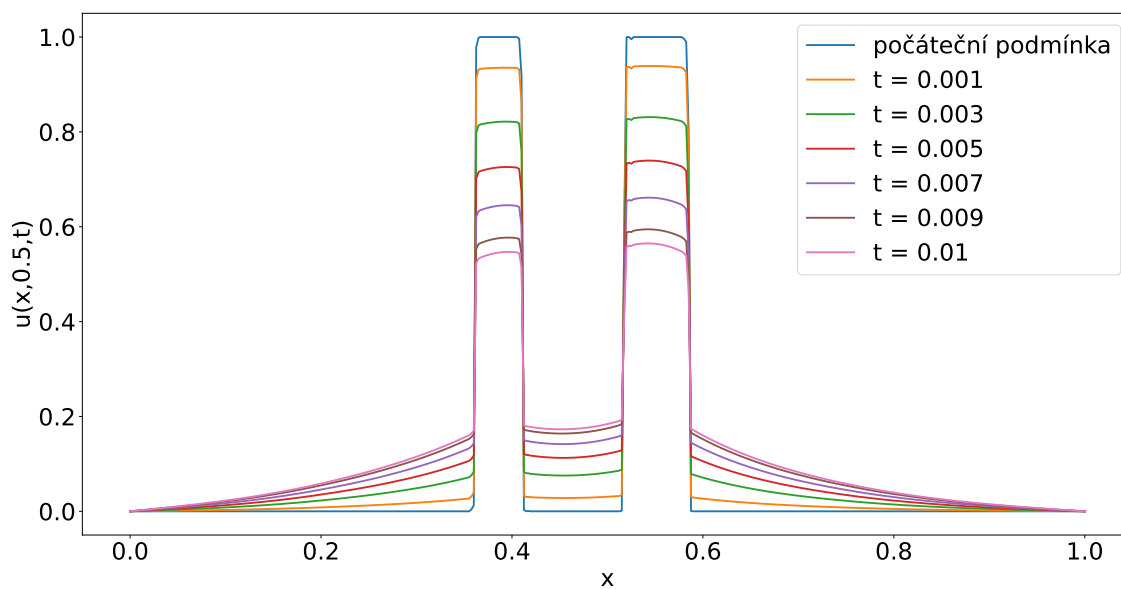


(d) $t = 1 \times 10^{-3}$

Obrázek 4.14: Řešení rovnice (4.3) pro parametry $h = \frac{1}{400}$, $\tau = 2.5 \times 10^{-5}$, $\alpha = 0.0001$, $\nu = -1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ a počáteční podmínku na obrázku (a). Na jednotlivých obrázcích (b)-(d) vidíme průběh řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedená t .

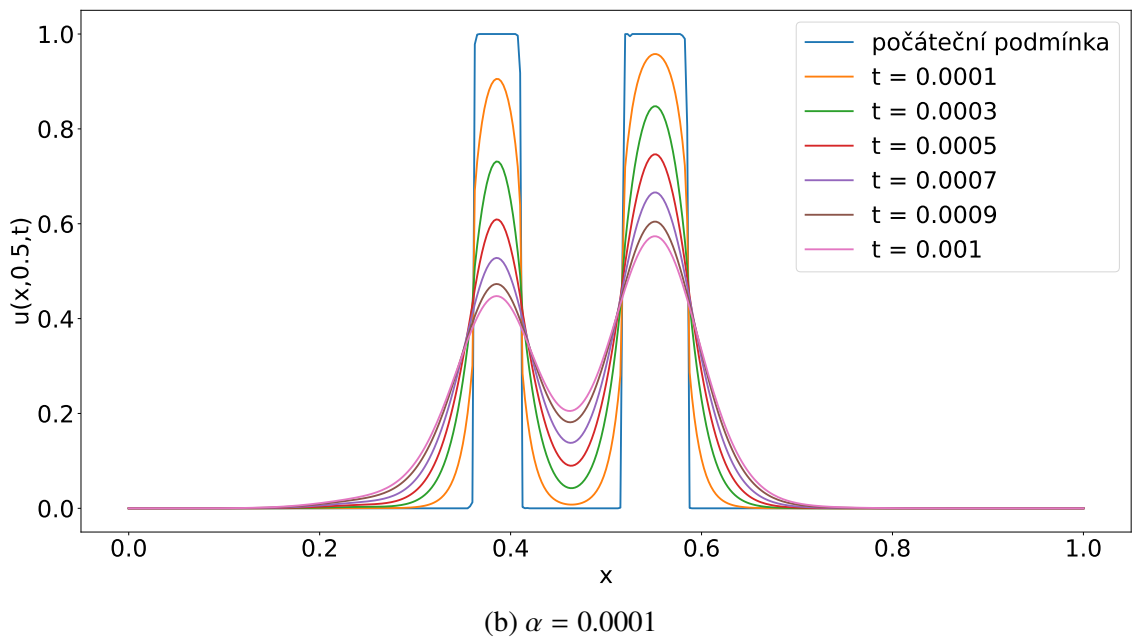
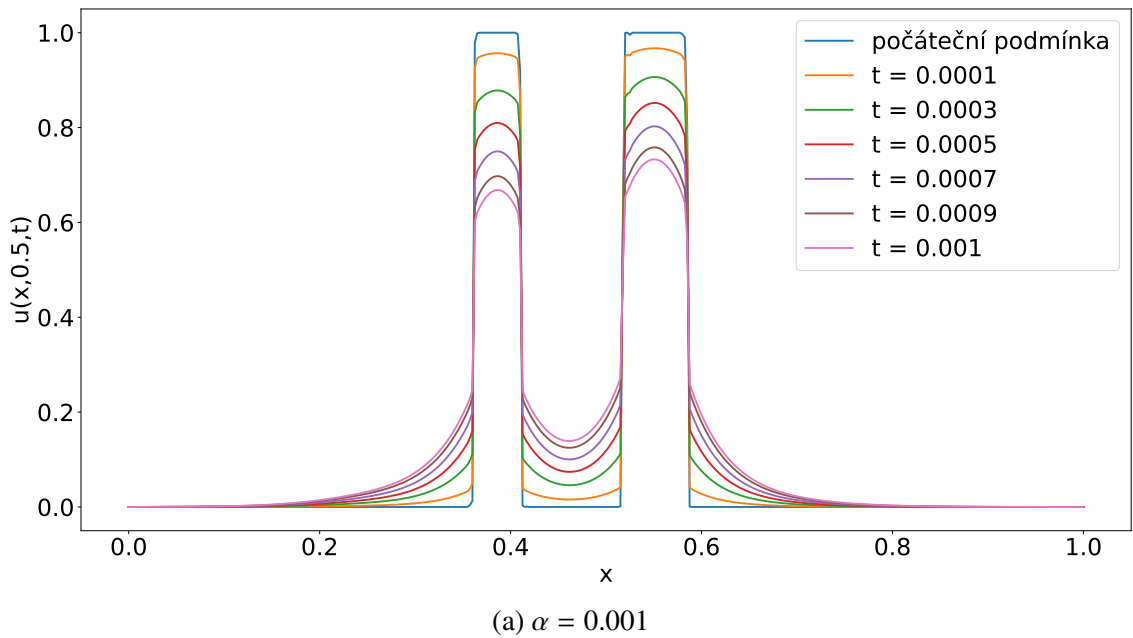


(a) $\alpha = 0.1$,

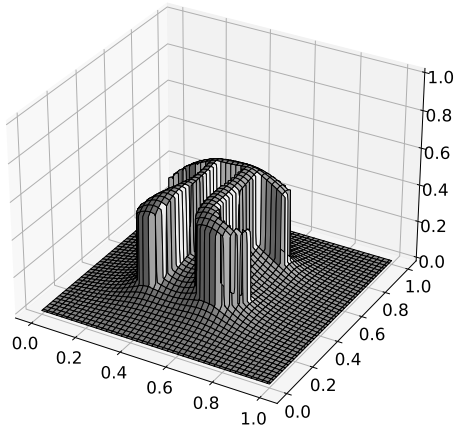


(b) $\alpha = 0.01$

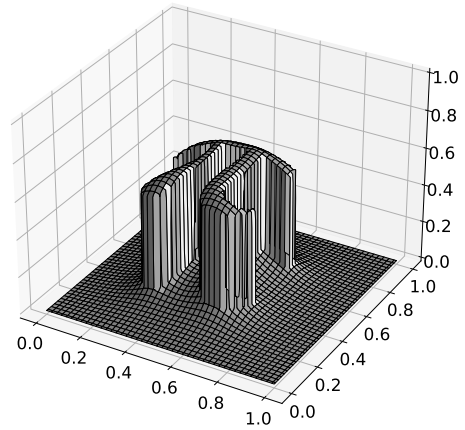
Obrázek 4.15: Řezy řešení rovnice (4.3) v $y = 0.5$ pro parametry $h = \frac{1}{400}$, $\tau = 2.5 \times 10^{-4}$, $\nu = -1$ a $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ pro uvedená α a t .



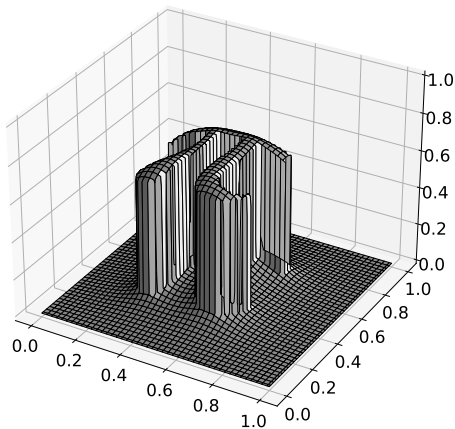
Obrázek 4.16: Řezy řešení rovnice (4.3) v $y = 0.5$ pro parametry $h = \frac{1}{400}$, $\tau = 2.5 \times 10^{-4}$, $\nu = -1$ a $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ pro uvedená α a t .



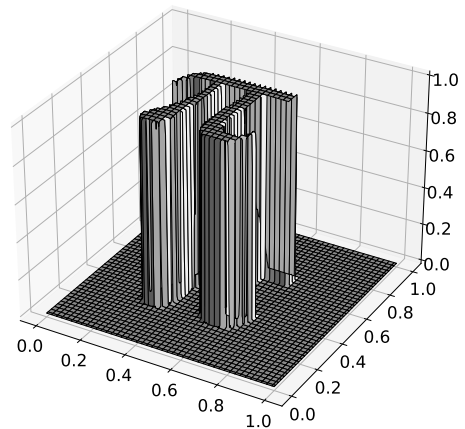
(a) I_0 (počáteční podmínka)



(b) $t = 3 \times 10^{-3}$

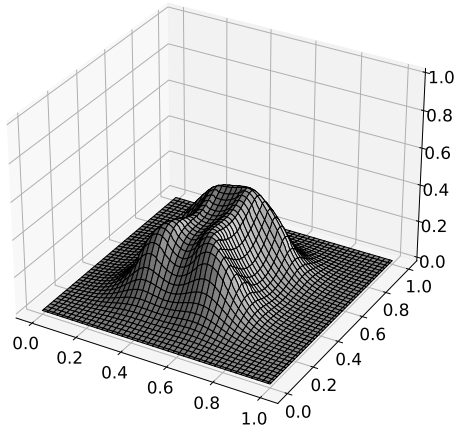


(c) $t = 5 \times 10^{-3}$

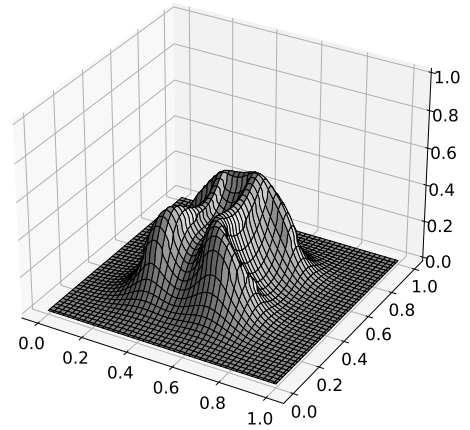


(d) $t = 1 \times 10^{-2}$

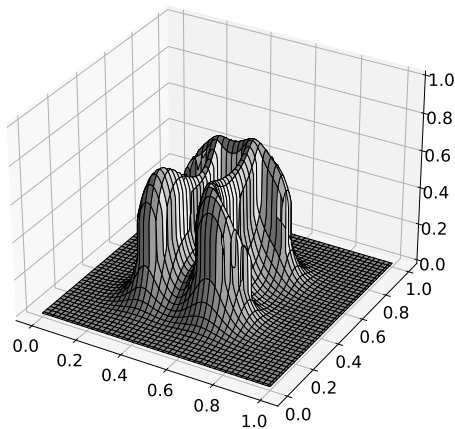
Obrázek 4.17: Řešení rovnice (4.3) pro parametry $h = \frac{1}{400}$, $\tau = 2.5 \times 10^{-4}$, $\alpha = 0.01$, $\nu = 1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ a počáteční podmínka na obrázku (a). Počáteční podmínka I_0 je zde volena jako řešení rovnice (4.3) pro $t = 1 \times 10^{-2}$, $\nu = -1$ (gradientní sestup) a ostatní parametry stejné jako výše. Na jednotlivých obrázcích (b)-(d) vidíme průběh řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedená t . Otočením znaménka ν se podařilo reprodukovat počáteční podmínku z obrázku 4.12.



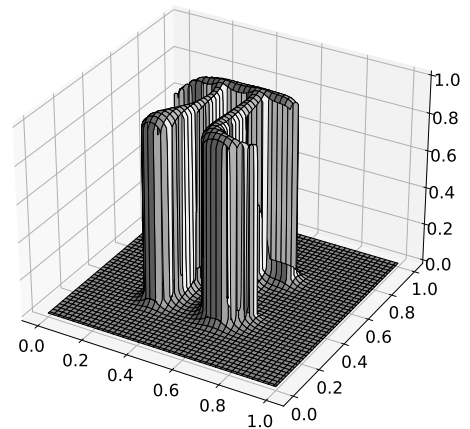
(a) I_0 (počáteční podmínka)



(b) $t = 1.5 \times 10^{-3}$



(c) $t = 3.5 \times 10^{-3}$



(d) $t = 5 \times 10^{-3}$

Obrázek 4.18: Řešení rovnice (4.3) pro parametry $h = \frac{1}{400}$, $\tau = 2.5 \times 10^{-5}$, $\alpha = 0.001$, $\nu = 1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ a počáteční podmínku na obrázku (a). Počáteční podmínka I_0 je zde volena jako řešení rovnice (4.3) pro $t = 5 \times 10^{-3}$, $\nu = -1$ (gradientní sestup) a ostatní parametry stejné jako výše. Na jednotlivých obrázcích (b)-(d) vidíme průběh řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedené t . Otočením znaménka ν se podařilo přibližně reprodukovat počáteční podmínku z obrázku 4.13.



(a) původní obrázek



(b) I_0 (počáteční podmínka, rozmazaný obrázek (a))



(c) $t = 1.4 \times 10^{-5}$



(d) $t = 2 \times 10^{-5}$

Obrázek 4.19: Řešení rovnice (4.3) pro parametry $h = \frac{1}{600}$, $\tau = \frac{10}{6} \times 10^{-6}$, $\alpha = 1 \times 10^{-6}$, $\nu = 1$, $\varepsilon_{cg} = 0.0001$ a počáteční podmínka na obrázku (b). Počáteční podmínka I_0 byla volena jako obrázek (a) rozmazaný pomocí rovnice vedení tepla ($\alpha = 0$, $\nu = -1$, $t = 1 \times 10^{-5}$). Na obrázcích (c) a (d) vidíme řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedené t . Funkce $u(t, \cdot, \cdot)$ je na jednotlivých obrázcích reprezentována jako bitmapa – obor hodnot je aproximován diskrétním prostorem odstínů šedi.



(a) původní obrázek



(b) I_0 (počáteční podmínka, rozmazaný obrázek (a))



(c) $t = 1.4 \times 10^{-4}$



(d) $t = 2 \times 10^{-4}$

Obrázek 4.20: Řešení rovnice (4.3) pro parametry $h = \frac{1}{600}$, $\tau = \frac{10}{6} \times 10^{-6}$, $\alpha = 0.0001$, $\nu = 1$, $\varepsilon_{cg} = 0.0001$ a počáteční podmínku na obrázku (b). Počáteční podmínka I_0 byla volena jako obrázek (a) rozmazaný pomocí rovnice vedení tepla ($\alpha = 0$, $\nu = -1$, $t = 1 \times 10^{-5}$). Na obrázcích (c) a (d) vidíme řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ pro uvedená t . Funkce $u(t, \cdot, \cdot)$ je na jednotlivých obrázcích reprezentována jako bitmapa – obor hodnot je aproximován diskrétním prostorem odstínů šedi.

4.4 Sobolevova Allenova–Cahnova rovnice

Nakonec si v této práci ukážeme chování numerických řešení úlohy

$$\begin{array}{l} \partial_t u = \nu(1 - \alpha\Delta)^{-1} \left(-\Delta u - \frac{1}{\xi^2} f_0(u) \right) \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{na } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{na } (0, T), \end{array} \quad (4.5)$$

pomocí implementace schématu (3.9). Konkrétně tato řešení budeme zkoumat na vrstevnici

$$\Gamma(t) = \left\{ [x, y] \in \Omega \mid u(t, x, y) = \frac{1}{2} \right\}$$

pro počáteční křivky dané pomocí počáteční podmínky u_0 jako

$$\Gamma_0 = \left\{ [x, y] \in \Omega \mid u_0(x, y) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Zastavovací kritérium pro metodu sdružených gradientů zde bylo opět voleno jako (4.4).

Pro počáteční podmínku u_0 danou předpisem

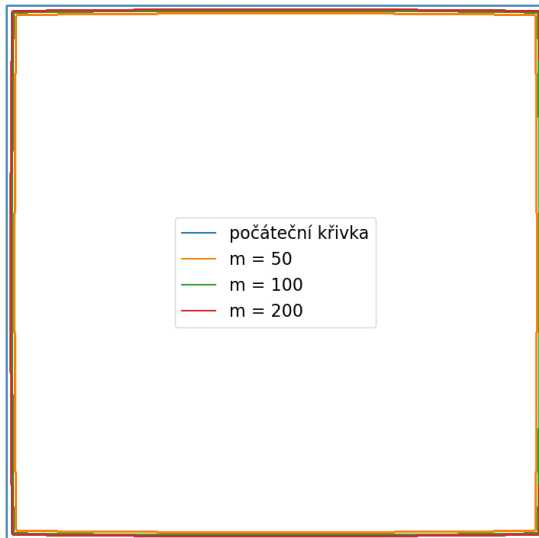
$$u_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } f(x - 0.5, y - 0.5) > 1, \\ f(x - 0.5, y - 0.5) & \text{pro } 0 < f(x - 0.5, y - 0.5) < 1, \\ 0 & \text{pro } f(x - 0.5, y - 0.5) < 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

kde

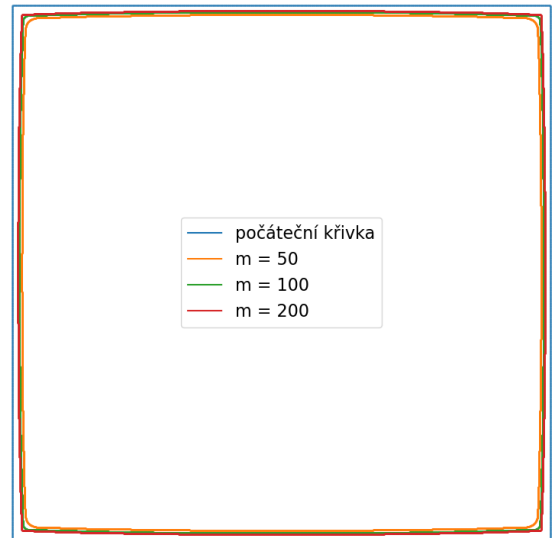
$$f(x, y) = 4(0.9 - |x + y| - |x - y|),$$

můžeme na obrázcích 4.21, 4.22, 4.23, 4.24 a 4.25 pozorovat chování vrstevnic $\Gamma(t)$ pro postupně se zmenšující hodnoty $\alpha = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ a zjemňující se výpočetní síť. Pro vyšší hodnoty α můžeme obdobně jako u Sobolevovy difuze pozorovat jisté zachování neregularity počáteční křivky. Pro nižší hodnoty tohoto parametru se zase vývoj řešení více blíží pohybu podle střední křivosti – křivky $\Gamma(t)$ jsou více hladké i pro malá t . Toto je nejvíce patrné na obrázku 4.25(a).

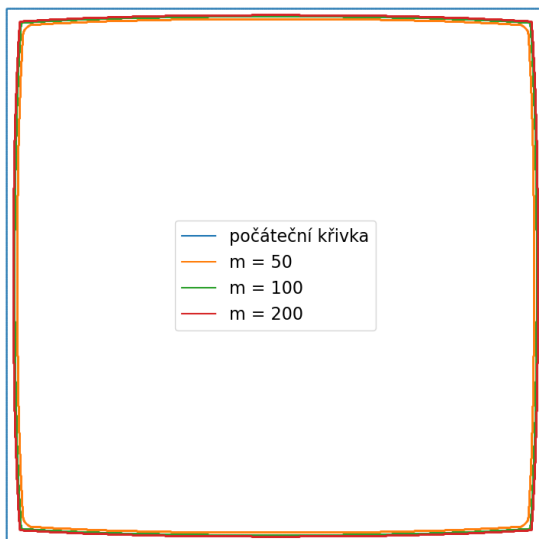
Na obrázcích (4.26) a (4.27) můžeme vidět pro dané parametry řešení u úlohy (4.5) ve zpětném směru ($\nu = 1$). Pro něj byla počáteční podmínka u_0 volena jako řešení úlohy (4.5) v dopředném směru ($\nu = -1$). Tímto způsobem se podařilo reprodukovat počáteční podmínku úlohy v dopředném směru jako řešení úlohy ve zpětném směru. Na obrázku 4.28 jsou tyto výsledky pro větší množství hodnot t znázorněny pomocí vrstevnic (křivek) $\Gamma(t)$ příslušejících řešením $u(t, \cdot, \cdot)$.



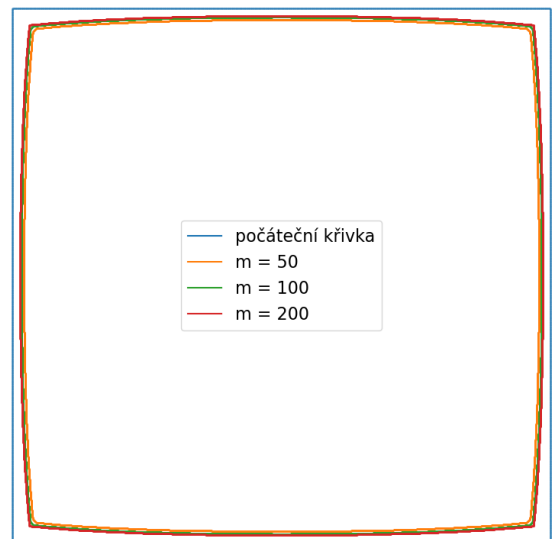
(a) $t = 0.1$



(b) $t = 0.2$

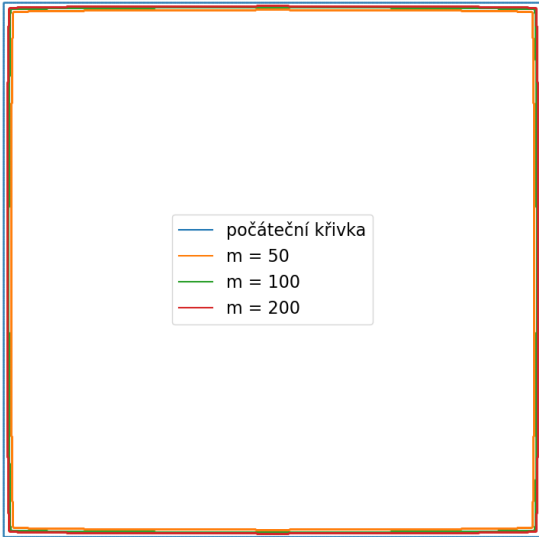


(c) $t = 0.3$

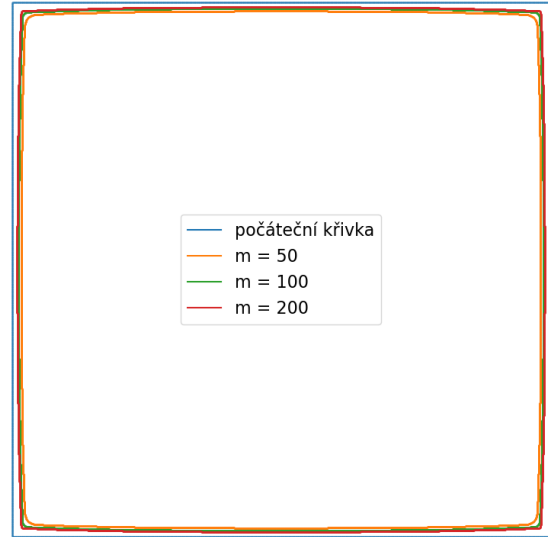


(d) $t = 0.4$

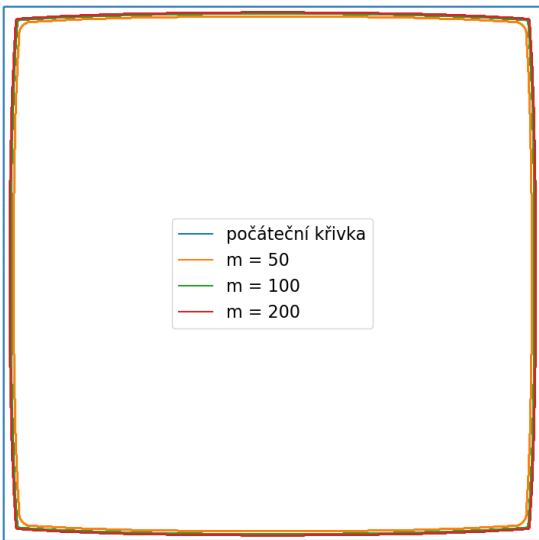
Obrázek 4.21: Na obrázcích (a) až (d) jsou pro uvedená t a parametry $h = \frac{1}{m}$, $\tau = 0.1h$, $\xi = 0.04$, $\alpha = 1$, $\nu = -1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ zobrazeny vrstevnice $\Gamma(t)$ řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ rovnice (4.5) pro různé jemnosti sítě dané parametrem m . Počáteční křivka Γ_0 je zde dána počáteční podmínkou (4.6).



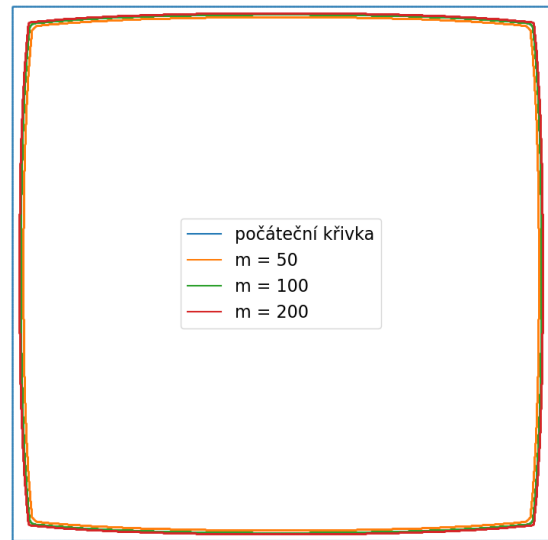
(a) $t = 0.01$



(b) $t = 0.02$

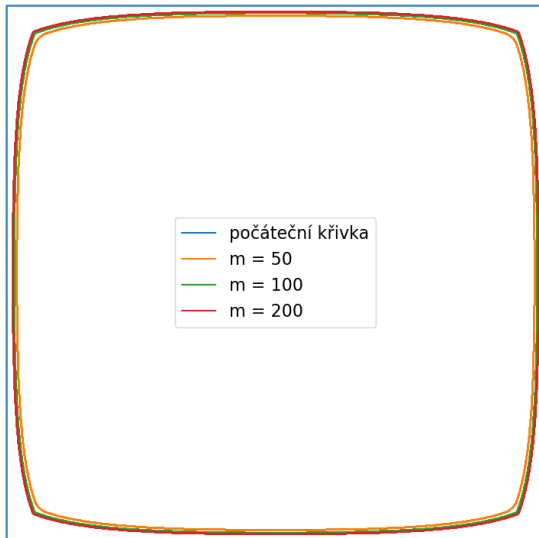


(c) $t = 0.03$

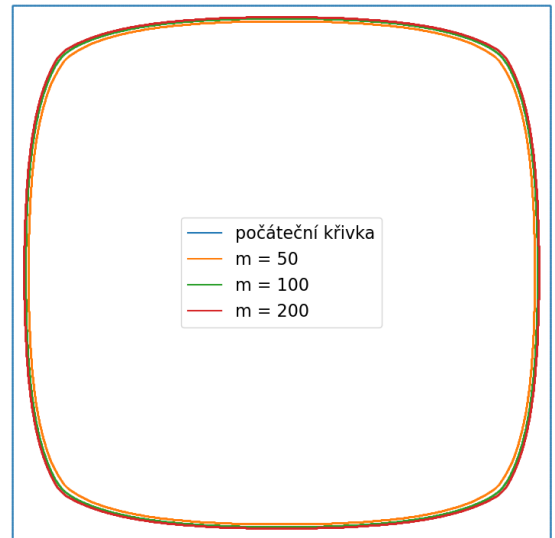


(d) $t = 0.04$

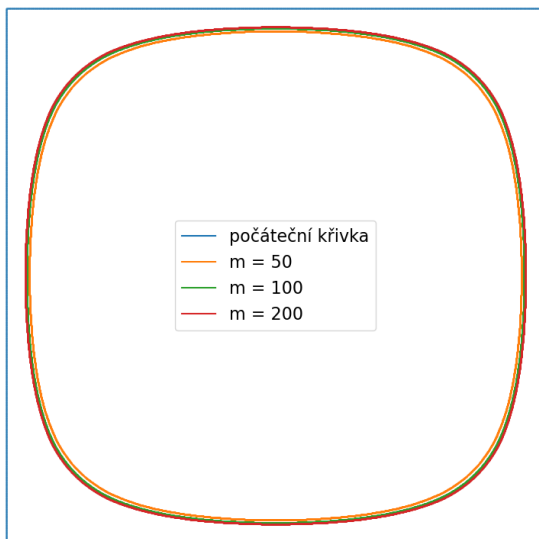
Obrázek 4.22: Na obrázcích (a) až (d) jsou pro uvedená t a parametry $h = \frac{1}{m}$, $\tau = 0.1h$, $\xi = 0.04$, $\alpha = 0.1$, $\nu = -1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ zobrazeny vrstevnice $\Gamma(t)$ řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ rovnice (4.5) pro různé jemnosti sítě dané parametrem m . Počáteční křivka Γ_0 je zde dána počáteční podmínkou (4.6).



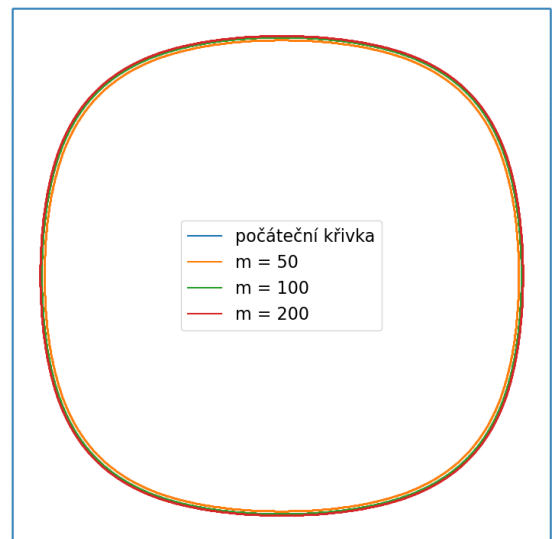
(a) $t = 0.01$



(b) $t = 0.02$

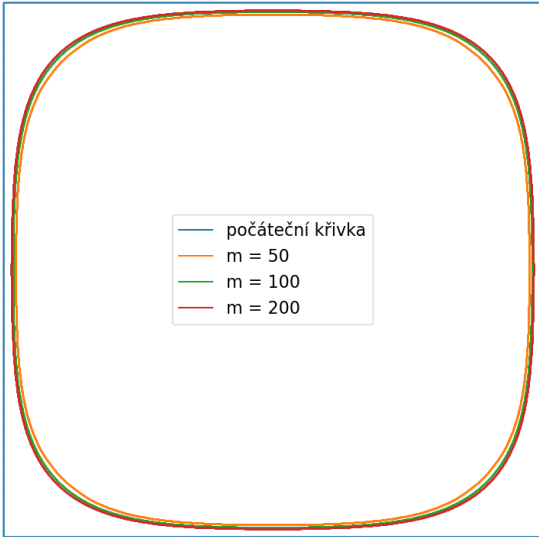


(c) $t = 0.03$

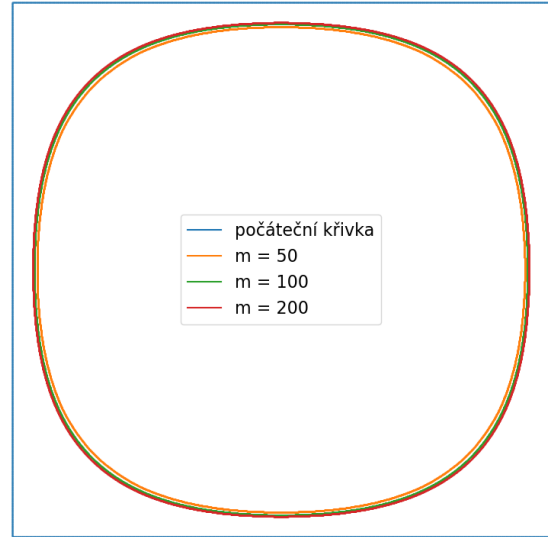


(d) $t = 0.04$

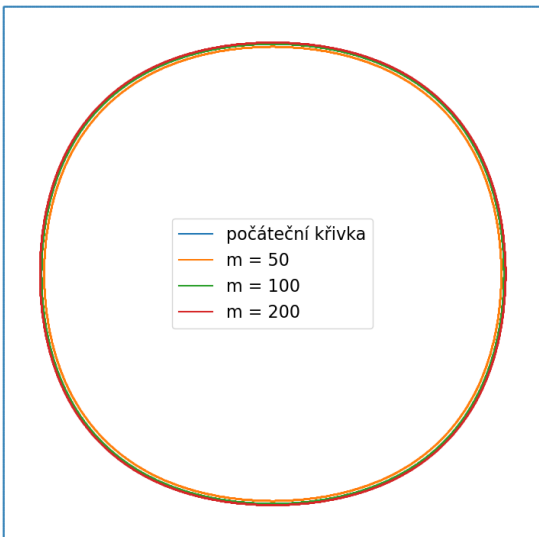
Obrázek 4.23: Na obrázcích (a) až (d) jsou pro uvedená t a parametry $h = \frac{1}{m}$, $\tau = 0.1h$, $\xi = 0.04$, $\alpha = 0.01$, $\nu = -1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ zobrazeny vrstevnice $\Gamma(t)$ řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ rovnice (4.5) pro různé jemnosti sítě dané parametrem m . Počáteční křivka Γ_0 je zde dána počáteční podmínkou (4.6).



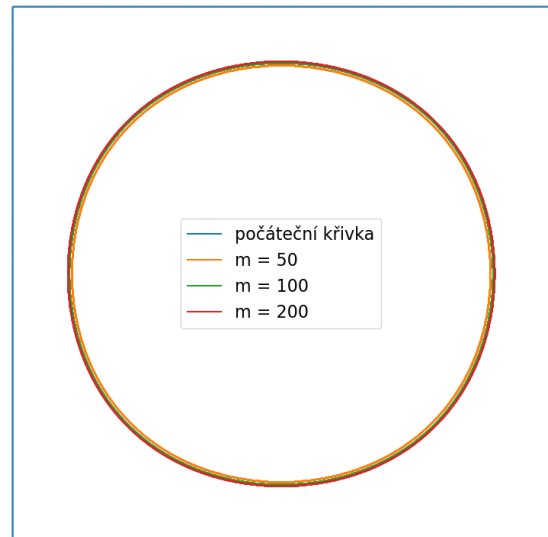
(a) $t = 0.01$



(b) $t = 0.02$

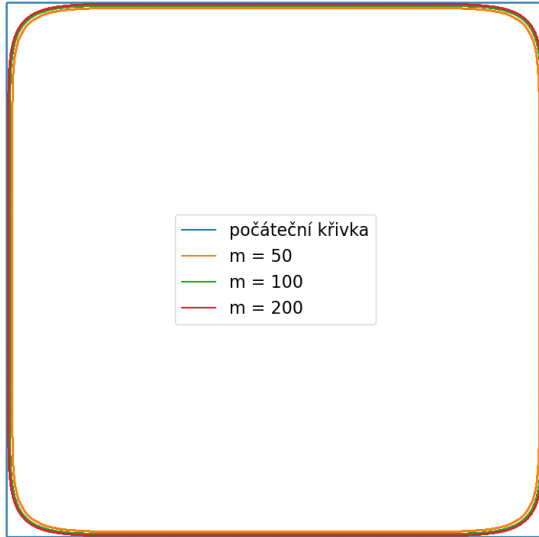


(c) $t = 0.03$

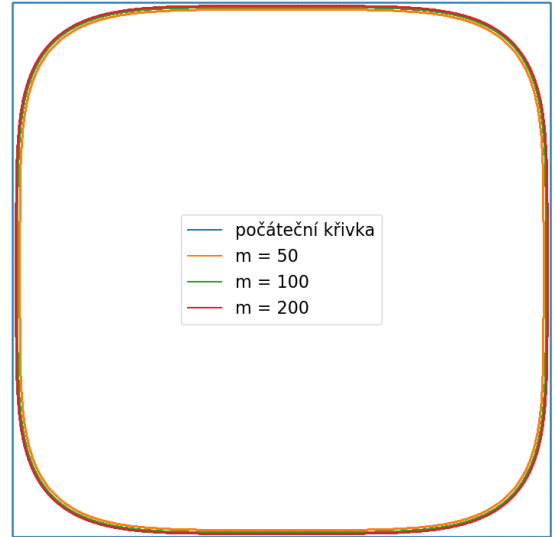


(d) $t = 0.04$

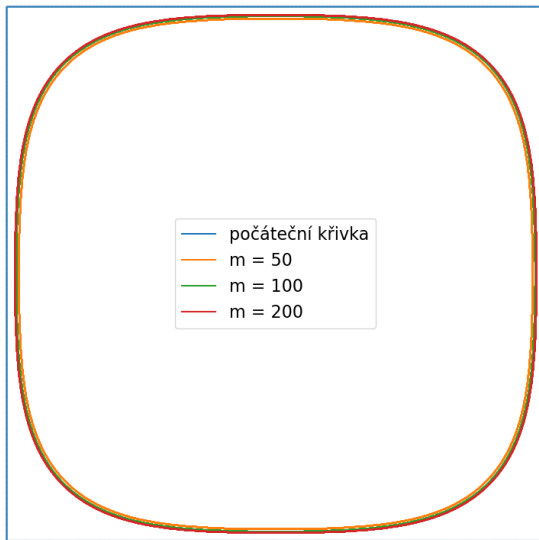
Obrázek 4.24: Na obrázcích (a) až (d) jsou pro uvedená t a parametry $h = \frac{1}{m}$, $\tau = 0.1h$, $\xi = 0.04$, $\alpha = 0.001$, $\nu = -1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ zobrazeny vrstevnice $\Gamma(t)$ řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ rovnice (4.5) pro různé jemnosti sítě dané parametrem m . Počáteční křivka Γ_0 je zde dána počáteční podmínkou (4.6).



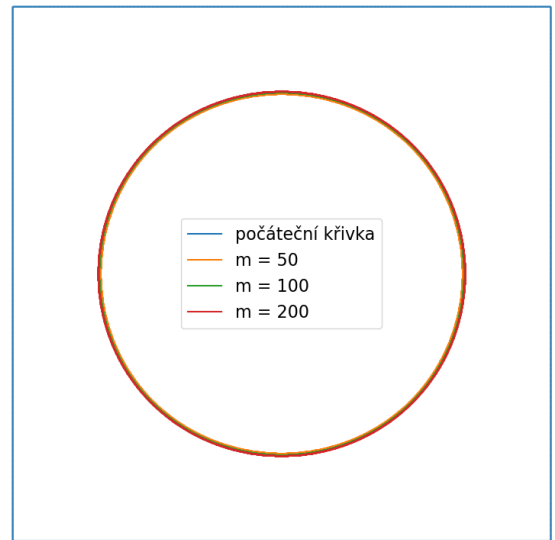
(a) $t = 0.001$



(b) $t = 0.005$

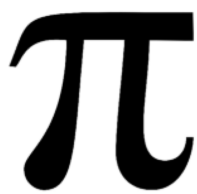


(c) $t = 0.01$



(d) $t = 0.05$

Obrázek 4.25: Na obrázcích (a) až (d) jsou pro uvedená t a parametry $h = \frac{1}{m}$, $\tau = 1 \times 10^{-4}h$, $\xi = 0.04$, $\alpha = 0.0001$, $\nu = -1$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-4}$ zobrazeny vrstevnice $\Gamma(t)$ řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ rovnice (4.5) pro různé jemnosti sítě dané parametrem m . Počáteční křivka Γ_0 je zde dána počáteční podmínkou (4.6).



(a) u_0



(b) $t = 0.001, \nu = -1$



(c) $t = 0.002, \nu = -1$



(d) u_0

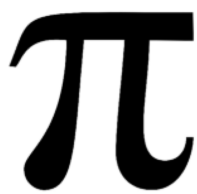


(e) $t = 0.001, \nu = 1$



(f) $t = 0.002, \nu = 1$

Obrázek 4.26: Řešení rovnice (4.5) pro parametry $h = \frac{1}{300}$, $\tau = \frac{10}{3} \times 10^{-6}$, $\xi = 0.01$, $\alpha = 0.001$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-6}$ a příslušné uvedené počáteční podmínky u_0 . Na obrázcích (b) a (c) jsou pro počáteční podmínku na obrázku (a) uvedeny řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ v dopředném směru ($\nu = -1$). Na obrázcích (e) a (f) jsou zase pro počáteční podmínku na obrázku (d) uvedeny řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ ve zpětném směru ($\nu = 1$), přičemž tato počáteční podmínka na obrázku (d) je shodná s řešením na obrázku (c). Tímto otočením znaménka v rovnici (4.5) se podařilo na obrázku (f) reprodukovat původní počáteční podmínku u_0 z obrázku (a). Funkce $u(t, \cdot, \cdot)$ je na jednotlivých obrázcích reprezentována jako bitmapa – obor hodnot je aproximován diskretním prostorem odstínů šedi.



(a) u_0



(b) $t = 0.0005, \nu = -1$



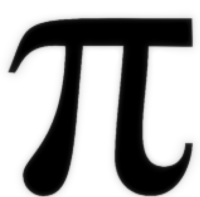
(c) $t = 0.001, \nu = -1$



(d) u_0

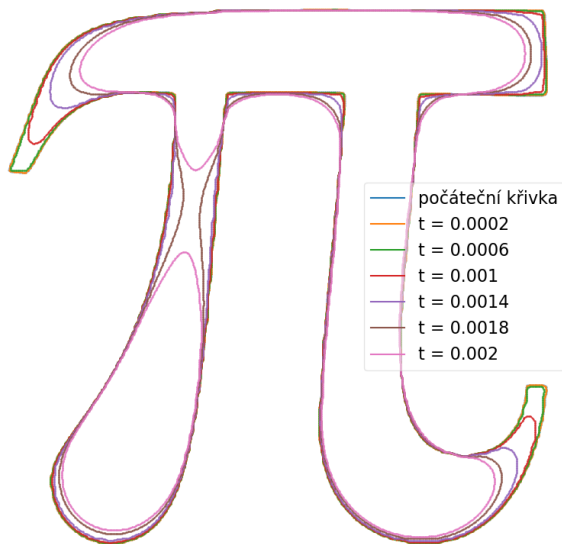


(e) $t = 0.0005, \nu = 1$

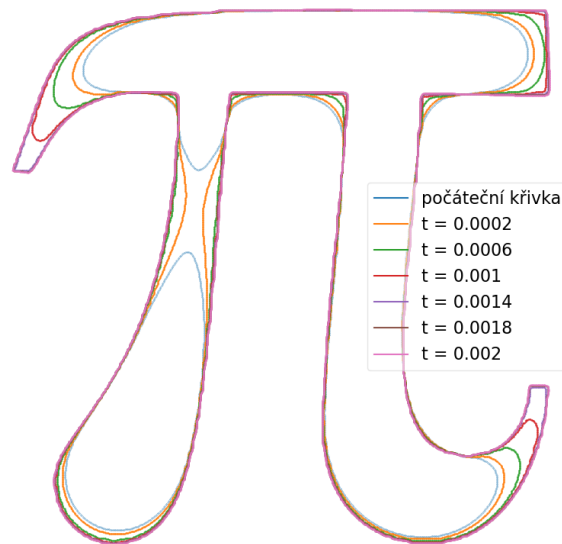


(f) $t = 0.001, \nu = 1$

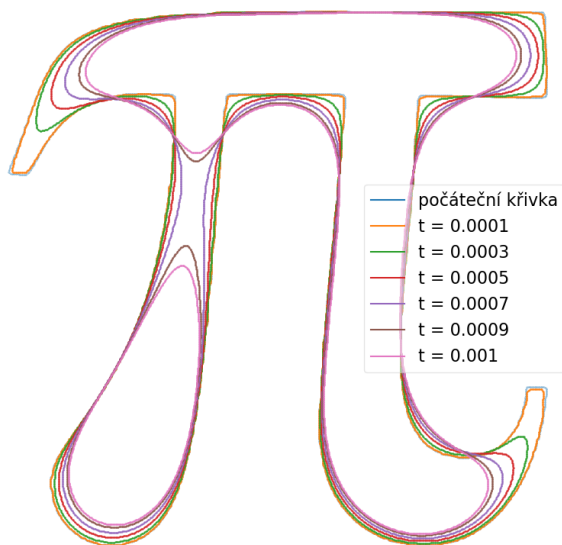
Obrázek 4.27: Řešení rovnice (4.5) pro parametry $h = \frac{1}{300}$, $\tau = \frac{10}{3} \times 10^{-6}$, $\xi = 0.01$, $\alpha = 0.0001$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-6}$ a příslušné uvedené počáteční podmínky u_0 . Na obrázcích (b) a (c) jsou pro počáteční podmínku na obrázku (a) uvedeny řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ v dopředném směru ($\nu = -1$). Na obrázcích (e) a (f) jsou zase pro počáteční podmínku na obrázku (d) uvedeny řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ ve zpětném směru ($\nu = 1$), přičemž tato počáteční podmínka na obrázku (d) je shodná s řešením na obrázku (c). Tímto otočením znaménka v rovnici (4.5) se podařilo na obrázku (f) reprodukovat původní počáteční podmínku u_0 z obrázku (a). Funkce $u(t, \cdot, \cdot)$ je na jednotlivých obrázcích reprezentována jako bitmapa – obor hodnot je aproximován diskrétním prostorem odstínů šedi.



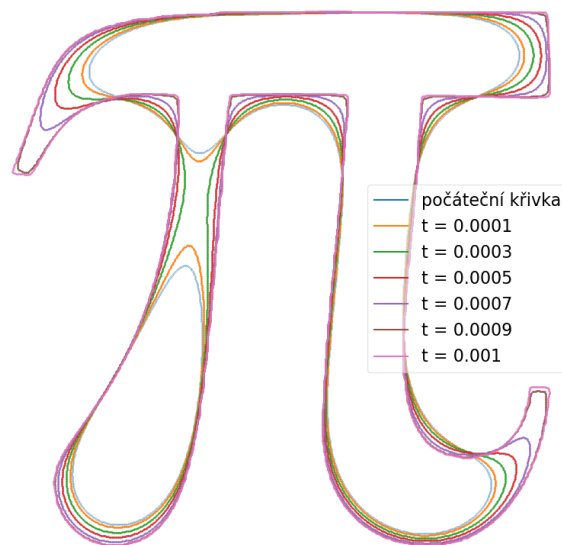
(a) $\alpha = 0.001, \nu = -1$



(b) $\alpha = 0.001, \nu = 1$



(c) $\alpha = 0.0001, \nu = -1$



(d) $\alpha = 0.0001, \nu = 1$

Obrázek 4.28: Na obrázcích (a) až (d) jsou pro parametry $h = \frac{1}{300}$, $\tau = \frac{10}{3} \times 10^{-6}$, $\xi = 0.01$, $\varepsilon_{cg} = 1 \times 10^{-6}$ zobrazeny vrstevnice $\Gamma(t)$ řešení $u(t, \cdot, \cdot)$ rovnice (4.5). Situace na obrázcích (a), (b) odpovídají pro příslušná ν řešením na obrázku 4.26 a situace na obrázcích (c), (d) zase odpovídají pro příslušná ν řešením na obrázku 4.27.

Závěr

Účelem této práce bylo získat povědomí o nových znalostech v oblasti zpracování digitálního obrazu s důrazem na difuzní procesy, prozkoumat souvislost Allenovy–Cahnovy rovnice s gradientními toky, seznámit se s trendy zkoumající tzv. Sobolevovy gradienty, použít metody pokročilé matematické analýzy pro prozkoumání vlastností Allenovy–Cahnovy rovnice a na základě získaných znalostí použít numerické řešení Allenovy–Cahnovy rovnice pro rozvoj algoritmů pro geometrické zpracování obrazu s aplikací na obrazová data získaná z medicínské praxe.

První kapitole jsme věnovali stručnému přehledu o postupech při zpracování digitálního obrazu a názvosloví týkající se dat z magnetické rezonance srdce. V další kapitole jsme nejdříve uvedli lineární parciální diferenciální rovnici difuze, jež je (v různých variacích) nejvíce používaný model ve zpracování obrazu. Dále jsme se věnovali regularizované verzi Peronovy–Malikovy rovnice, která může sloužit jako hrany zachovávající filtr šumu. Následně jsme se zaměřili na Allenovu–Cahnovu rovnici. Pomocí asymptotické analýzy jsme ukázali některé její vlastnosti včetně souvislosti s pohybem křivek podle (střední) křivosti. Dále jsme uvedli segmentační model vycházející ze zmíněné rovnice a volbu jeho parametrů s ohledem na konkrétní obrazová data z magnetické rezonance. Následně jsme za pomoci pojmů z variačního počtu uvedli definici gradientního toku a Sobolevova gradientu. Ukázali jsme, že některé uvedené evoluční diferenciální rovnice jsou gradientními toky podle standardního gradientu v L^2 příslušných funkcionalů a pro dané funkcionaly jsme uvedli i gradientní toky podle definovaného Sobolevova gradientu.

Ve třetí kapitole jsme pomocí konečných diferencí odvodili numerická schémata pro aproximativní řešení Allenovy–Cahnovy rovnice, její modifikace určené k segmentaci obrazu a gradientních toků podle Sobolevova gradientu. V poslední kapitole jsme tato diferenční schémata aplikovali na testovací i reálná data. Nejprve jsme pomocí aplikace Allenovy–Cahnovy rovnice na testovací data demonstrovali její vlastnosti. Následně jsme aplikovali zmíněný segmentační model na sérii snímků z magnetické rezonance v automatickém režimu tak, jak bylo popsáno v druhé kapitole. Všech 256 snímků se nám tímto způsobem povedlo segmentovat. Výsledné informace o segmentovaných oblastech pak byly využity k určení vývoje objemu levé srdeční komory během srdečního cyklu. Následně byly určeny EDV, ESV a z nich ejekční frakce. Nakonec byly prozkoumány vlastnosti Sobolevovy difuze (2.33) a Sobolevovy Allenovy–Cahnovy rovnice (2.35) aplikací na testovací a obrazová data.

Literatura

- [1] C. C. AGGARWAL, *Neural Networks and Deep Learning*, Springer, New York, 2018.
- [2] L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P.-L. LIONS, J. M. MOREL, *Axioms and fundamental equations of image processing*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 123 (1993), pp. 199–257.
- [3] G. AUBERT, P. KORNPORST, *Mathematical Problems in Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, Springer, New York, 2002.
- [4] J. H. AVENDI M.R, KHERADVAR A, *Automatic segmentation of the right ventricle from cardiac mri using a learning-based approach*, Magn Reson Med., 78(6) (2017), pp. 2439–2448.
- [5] M. BALAŽOVJECH, P. FROLKOVIČ, R. FROLKOVIČ, K. MIKULA, *Semi-implicit second order accurate finite volume method for advection-diffusion level set equation*, in Finite Volumes for Complex Applications VII-Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems, J. Fuhrmann, M. Ohlberger, C. Rohde, eds., vol. 78, Cham, 06 2014, Springer International Publishing, pp. 479–487.
- [6] M. BENEŠ, *Phase-field model of microstructure growth in solidification of pure substances*, disertační práce, FJFI ČVUT v Praze, 1997.
- [7] ———, *Diffuse-interface treatment of the anisotropic mean-curvature flow*, Applications of Mathematics, 48 (6) (2003), pp. 437–453.
- [8] M. BENEŠ, V. CHALUPECKÝ, K. MIKULA, *Geometrical image segmentation by the Allen–Cahn equation*, Applied Numerical Mathematics, 51 (2004), pp. 187–205.
- [9] M. BENEŠ, M. KIMURA, P. PAUŠ, D. ŠEVČOVIČ, T. TSUJIKAWA, S. YAZAKI, *Application of a curvature adjusted method in image segmentation*, Bulletin of the Institute of Mathematics. Academia Sinica. New Series, 3 (2008), pp. 509–523.
- [10] A. C. BOVIK, *The Essential Guide to Image Processing*, Academic Press, London, 2009.
- [11] G. CAGINALP, *An Analysis of a Phase Field Model of a Free Boundary*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 92 (1986), pp. 205–245.
- [12] J. CALDER, A. MANSOURI, A. YEZZI, *Image sharpening via sobolev gradient flows*, SIAM Journal on Imaging Sciences, 3 (2010), pp. 981–1014.
- [13] F. CATTÉ, P.-L. LIONS, J. M. MOREL, T. COLL, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 29 (1992), pp. 182–193.
- [14] R. CHABINIOK, *Cardiac MRI Data Segmentation Using the Partial Differential Equation of Allen–Cahn Type*, diplomová práce, Mathematical Institute of Charles University, Prague, 2007.

- [15] R. CHABINIOK, R. MÁČA, M. BENEŠ, J. TINTĚRA, *Segmentation of MRI data by means of nonlinear diffusion*, *Kybernetika*, 49 (2013), pp. 301–318.
- [16] V. CHALUPECKÝ, *Image processing by means of partial differential equations of allen-cahn type*, diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze, 2001.
- [17] J. DAUGMAN, *Complete discrete 2-d gabor transforms by neural networks for image analysis and compression*, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36 (1988), pp. 1169–1179.
- [18] DAVUD, *File:Anatomie roviny cz eng.svg - Wikimedia Commons — commons.wikimedia.org*. Dostupný pod licencí Creative Commons na WWW:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Anatomie_roviny_cz_eng.svg, 2013. [cit. 2023-05-14].
- [19] M. DROSKE, *On variational problems and gradient flows in image Processing*, disertační práce, University of Duisburg-Essen, 2005.
- [20] P. DVOŘÁK, *Matematické modelování mikrostruktur při fázových přechodech*, diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze, 2010.
- [21] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.
- [22] R. EYMARD, A. HANDLOVIČOVÁ, K. MIKULA, *Non-diffusive numerical scheme for regularized mean curvature flow level set equation in image processing*, vol. 2, 11 2010, pp. 748 – 753.
- [23] M. GAGE, R. S. HAMILTON, *The heat equation shrinking convex plane curves*, *Journal of Differential Geometry*, 23 (1986), pp. 69 – 96.
- [24] R. C. GONZALEZ, R. E. WOODS, *Digital Image Processing*, Pearson; 4th edition, New York, 2018.
- [25] M. A. GRAYSON, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, *J. Differential Geometry*, 26 (1987), pp. 285–314.
- [26] A. C. GUYTON, E. H. HALL, *Textbook of medical physiology*, Saunders, Philadelphia, 2005.
- [27] A. HANDLOVIČOVÁ, K. MIKULA, A. SARTI, *Numerical solution of parabolic equations related to level set formulation of mean curvature flow*, *Computing and Visualization in Science*, 1 (1998), pp. 179–182.
- [28] M. KOLÁŘ, *Motion of Curves with the Application to Dislocation Dynamics*, disertační práce, FJFI ČVUT v Praze, 2018.
- [29] A. KRIZHEVSKY, I. SUTSKEVER, G. E. HINTON, *Imagenet classification with deep convolutional neural networks*, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 25 (2012).
- [30] P. A. LAGERSTROM, *Matched Asymptotic Expansions*, Springer Verlag, New York, 1988.
- [31] R. MALLADI, J. A. SETHIAN, *Image processing via level set curvature flow*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 92 (1995), pp. 7046–7050.
- [32] K. MIKULA, M. KOLLÁR, A. A. OŽVAT, M. AMBROZ, L. ČAHOJOVÁ, I. JAROLÍMEK, J. ŠIBÍK, M. ŠIBÍKOVÁ, *Natural numerical networks for natura 2000 habitats classification by satellite images*, *Applied Mathematical Modelling*, 116 (2023), pp. 209–235.

- [33] R. MÁČA, *Metody degenerované difuze při počítačovém zpracování obrazu a jejich aplikace*, diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze, 2010.
- [34] J. W. NEUBERGER, *Sobolev gradients and differential equations*, Springer, New York, 2010.
- [35] J. R. PARKER, *Algorithms for Image Processing and Computer Vision*, Wiley; 2nd edition, Indiana, 2010.
- [36] P. PERONA, J. MALIK, *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12 (1990), pp. 629–639.
- [37] T. PREUSSER, M. RUMPF, *An adaptive finite element method for large scale image processing*, Journal of Visual Communication and Image Representation, 11 (2000), pp. 183–195.
- [38] C. QING, H. LIU, Y. QIAN, S. ZHOU, J. WANG, Y.-H. YANG, *A novel hybrid level set model for non-rigid object contour tracking*, IEEE Transactions on Image Processing, 31 (2021), p. 2022.
- [39] M. RAI, P. RIVAS, *A review of convolutional neural networks and gabor filters in object recognition*, 2020 International Conference on Computational Science and Computational Intelligence (CSCI), (2020), pp. 1560–1567.
- [40] K. REKTORYS, *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, Academia, Praha, 1999.
- [41] Y. SAAD, *Iterative methods for sparse linear systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003.
- [42] A. A. SAMARSKIJ, *Theory of Difference Schemes*, Marcel Dekker Inc., New York, 2001.
- [43] A. SCHICK, *Pokročilé geometrické metody zpracování obrazu*, bakalářská práce, FJFI ČVUT v Praze, 2022.
- [44] G. SUNDARAMOORTHY, A. YEZZI, A. MENNUCCI, *Sobolev active contours*, International Journal of Computer Vision, 73 (2005), pp. 345–366.
- [45] D. SUNDARARAJAN, *Digital Image Processing: A Signal Processing and Algorithmic Approach*, Springer, Singapore, 2017.
- [46] J. E. TAYLOR, J. W. CAHN, *Linking anisotropic sharp and diffuse surface motion laws via gradient flows*, Journal of Statistical Physics, 77 (1994), p. 183–197.
- [47] E. VITÁSEK, *Numerické metody*, SNTL, Praha, 1987.
- [48] V. S. VLADIMIROV, *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker Inc., New York, 1971.
- [49] J. WEICKERT, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, ECMI Series. Teubner, Stuttgart, 1998.