Antipalindromy

Ľubomíra Dvořáková*, David Ryzák†

Abstrakt

Každý zná jistě palindromy: slova, která se čtou stejně zepředu i pozpátku (např. krk, rotor, nepotopen). Palindromy v přirozených bázích, tj. čísla, která mají palindromický zápis v nějaké přirozené bázi, jsou dobře matematicky prostudované. Palindromy hrají také důležitou roli v matematické disciplíně zvané kombinatorika na slovech. Právě tato disciplína nás inspirovala ke studiu antipalindromů.

V článku představíme poznatky o antipalindromech v přirozených bázích a porovnáme je s palindromy. Zejména vypíchneme překvapivý výsledek týkající se dělitelnosti a prvočísel mezi antipalindromy v přirozených bázích.

1 Palindromy pod lupou

Nikoho jistě nepřekvapí, že v přirozených jazycích obzvlášť dlouhé palindromy nenajdeme. Nejdelšími palindromickými slovy v češtině jsou příčestí typu 'nepochopen', 'nepotopen', 'nezasazen', 'nezařazen'. V angličtině je nejdelším palindromickým slovem 'tattarrattat'. Jeho vítězství ovšem není zcela zasloužené, protože nejde o běžné slovo, nýbrž o fantazii Jamese Joyce, který ve svém románu Odysseus [4] použil tento neologismus k označení energického poklepání na dveře:

"I was just beginning to yawn with nerves thinking he was trying to make a fool of me when I knew his tattarrattat at the door."

Zajímavější jsou pak palindromické věty. Palindromy z nich vzniknou, pokud zapomeneme na mezery mezi slovy, případně i na diakritiku. V češtině patří mezi nejznámější palindromické věty:

"Bažantu padá za záda putna žab."
"Jelenovi pivo nelej."
"Kobyla má malý bok."

Ale zajímavé jsou i palindromy číselné, zvlášť když se k nim váže nějaké alespoň částečně doložené vysvětlení. Například s položením základního kamene

*Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze
†Gymnázium Trutnov

Karlova mostu je spojován palindrom ze samých lichých cifer 135797531. Muzeum Karlova mostu jej použilo jako své logo. Podle historika astronomie Zdeňka Horského mohl být základní kámen položen 9. července 1357 v 5:31. V tu chvíli prý byla příznivá konstelace Slunce a Saturnu. Palindrom je tedy sestaven z údajů: rok - den - měsíc - hodina - minuty.

Obrázek 1: Logo Muzea Karlova mostu

2 Motivace z kombinatoriky na slovech

Pojmy z kombinatoriky na slovech jsou intuitivní, proto potřebné definice uvádíme jen v poznámce pod čarou. [1] Zajímavější než v přirozených jazycích je situace týkající se palindromů v nekonečných slovech. Pro naše účely stačí uvažovat konečná a nekonečná slova sestávající ze dvou symbolů, např. z nul a jedniček. Říkáme jim binární slova. Tam už najednou můžeme nacházet palindromy libovolné délky. Ovšem žádná anarchie nevládne ani tady. Nekonečné slovo může totiž obsahovat v libovolném faktoru délky n maximálně n různých neprázdných palindromů [2].

Definice 1 ([2])**.** *Nekonečné slovo* $\mathbf{u}$ *nazýváme* bohatým na palindromy, *pokud v každém svém faktoru délky $n \in \mathbb{N}$ obsahuje právě n neprázdných palindromů.*

Příklad 1. *Nejznámějším slovem bohatým na palindromy je jedno ze dvou nejslavnějších slov kombinatoriky na slovech – Fibonacciho slovo. Vyrobíme je tzv. přepisovacími pravidly:* $0 \to 01$ *a* $1 \to 0$. *Začneme nulou a pořád dál budeme aplikovat přepisovací pravidla:*

$$\begin{array}{l} 0 \\ 01 \\ 010 \\ 01001 \\ 01001010 \\ 0100101001001 \\ \ldots \end{array}$$

Takto vyrábíme delší a delší prefixy Fibonacciho slova.

[1] *Binárním slovem* w nazýváme konečnou posloupnost dvou symbolů, např. 0 a 1. Jeho *délkou* rozumíme počet symbolů, které obsahuje. Pod *nekonečným binárním slovem* $\mathbf{u}$ rozumíme nekonečnou posloupnost 0 a 1, tj. $\mathbf{u} = u_0u_1u_2\ldots$, kde $u_i \in \{0,1\}$. Konečné slovo w nazveme *faktorem* konečného či nekonečného slova u, pokud existuje slovo v a slovo t (konečné či nekonečné) tak, že $u = vwt$. Je-li v prázdné slovo, nazveme w *prefixem* slova u.

Vezměme libovolný faktor Fibonacciho slova, např. 001010 *(délka je* 6*), a ověřme, že obsahuje* 6 *neprázdných palindromů. To skutečně platí, neboť všechny jeho palindromické faktory jsou* 0, 1, 00, 010, 101 *a* 01010.

Zaveďme nyní dvě zobrazení: zrcadlení R (reflection) a výměnu E (exchange). Konečnému slovu přiřadí opět konečné slovo stejné délky. Zrcadlení čte slovo pozpátku a výměna čte slovo pozpátku a zároveň nulu přepíše na jedničku a naopak. Uveďme si jejich působení na příkladě slova $w = 00110101$. Dostaneme $R(w) = 10101100$ a $E(w) = 01010011$. Nyní se dá palindrom definovat jako pevný bod zrcadlení, tedy jako slovo w splňující $R(w) = w$. Například 0010100 je palindrom, protože $R(0010100) = 0010100$. Podobně slovo w nazveme antipalindromem, pokud $E(w) = w$ (název převzat z [3], také se používá název pseudopalindrom). Například 0010101011 je antipalindrom, protože E přečte slovo pozpátku jako 1101010100 a poté vymění nuly a jedničky, dostaneme tak 0010101011.

Příklad 2. *Nejznámějším příkladem nekonečného slova, které v každém faktoru obsahuje maximální možný počet palindromů a antipalindromů, je druhé ze dvou nejslavnějších slov kombinatoriky na slovech – Thueovo-Morseovo slovo [5]. Toto binární nekonečné slovo vyrobíme opět přepisovacími pravidly:* $0 \to 01$ *a* $1 \to 10$. *Začneme nulou a pořád dál budeme aplikovat přepisovací pravidla:*

0
01
0110
01101001
0110100110010110
01101001100101101001011001101001
...

Takto vyrábíme delší a delší prefixy Thueova-Morseova slova.
Na palindromy Thueovo-Morseovo slovo bohaté není. Například faktor 011010011 *délky* 9 *obsahuje pouze* 8 *neprázdných palindromů* 0, 1, 00, 11, 010, 101, 0110, 1001. *Naopak Fibonacciho slovo není bohaté na palindromy a antipalindromy zároveň.*

Motivací ke studiu antipalindromů je nám fakt, že v kombinatorice na slovech je jedno ze dvou nejslavnějších nekonečných slov bohaté právě na palindromy a antipalindromy zároveň (viz příklad 2). Právě toto zjištění probudilo v oblasti kombinatoriky na slovech v posledních letech velký zájem o studium antipalindromů. Pod pokličku kombinatoriky na slovech můžete nahlédnout v článku [1], mimo jiné se v něm dozvíte, proč si právě Fibonacciho slovo a Thueovo-Morseovo slovo získala takovou slávu.

3 Antipalindromy

Začneme formální definicí palindromu a antipalindromu v přirozené bázi a uvedením základních vlastností.

Definice 2. *Nechť $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Uvažujme přirozené číslo m, jehož zápis v bázi b má tvar*

$$m = i_n b^n + \cdots + i_1 b + i_0,$$

kde $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ a $i_n \neq 0$. Potom m nazveme

1. palindromem *v bázi b, pokud cifry splňují podmínku:*

$$i_j = i_{n-j} \quad \textit{pro každé } j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

2. antipalindromem *v bázi b, pokud cifry splňují podmínku:*

$$i_j = b - 1 - i_{n-j} \quad \textit{pro každé } j \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Příklad 3. *Uvažujme nyní různé báze b a podívejme se, jak vypadají antipalindromy v těchto bázích:*

- *V bázi $b = 10$ je antipalindromem např.* 395406.
- *V bázi $b = 3$ je antipalindromem např.* $1581 = (2011120)_3$.
- *V bázi $b = 2$ je antipalindromem např.* $52 = (110100)_2$.

Věta 1. *Antipalindrom může mít lichý počet cifer pouze v liché bázi b. Navíc prostřední cifra má pak hodnotu $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Označme cifry uvažovaného antipalindromu $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{2n}$. Uspořádejme cifry do dvojic a sečtěme: $i_0 + i_{2n}, i_1 + i_{2n-1}, \ldots, i_{n-1} + i_{n+1}$. Z definice antipalindromu má každá tato dvojice součet $b - 1$. Zůstane nám však cifra i_n, kterou musíme takto spárovat samu se sebou, a tudíž $2i_n = b - 1$.
Z toho vyplývá, že prostřední cifra i_n je celé číslo jen pro b liché. Navíc platí $i_n = \frac{b-1}{2}$. □

Věta 2. *Antipalindrom může být zároveň palindromem, jen když báze b je lichá a všechny cifry jsou rovny $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Mějme antipalindrom s ciframi $i_0, i_1, \ldots, i_n$. Aby byl palindromem musí platit $i_j = i_{n-j}$ pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Z definice antipalindromu zároveň plyne, že $i_j + i_{n-j} = b - 1$. Dostáváme tedy $i_j = \frac{b-1}{2}$ pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, a báze b je tudíž nutně lichá. □

3.1 Dělitelnost

V této kapitole připomeneme známý výsledek týkající se dělitelnosti palindromů. Představíme nové výsledky pro dělitelnost antipalindromů. Z těchto poznatků poté odvodíme, jak je to s výskytem prvočísel mezi palindromy a antipalindromy.

3.1.1 Dělitelnost palindromů

Věta 3. *Palindrom se sudým počtem cifer v bázi b je dělitelný $b+1$.*

Důkaz. Uvažujme palindrom $m = i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \cdots + i_1 b + i_0$ pro lichá n. Můžeme spárovat jednotlivé dvojice $i_{n-j} b^{n-j} + i_j b^j = i_j(b^{n-j} + b^j)$, protože definice palindromu říká, že $i_{n-j} = i_j$. Díky sudému počtu cifer můžeme tímto způsobem spárovat všechny dvojice $i_{n-j} b^{n-j}$ a $i_j b^j$ pro $j \in \{0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$. Dokažme, že pro palindrom upravený spárováním koeficientů platí:

$$m = i_0(b^n + 1) + i_1(b^{n-1} + b) + \cdots + i_k(b^{n-k} + b^k) \equiv 0 \pmod{b+1},$$

kde $k = \frac{n-1}{2}$. Všechny členy kongruence můžeme zapsat i jako $i_j b^j (b^{n-2j} + 1)$ pro $j \in \{0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$, a protože vždy $2j < n$, tak v každém členu kongruence najdeme člen $b^{n-2j} + 1$, kde $n - 2j \geq 1$. Zbývá tedy ukázat, že $(b^\ell + 1) \equiv 0 \pmod{b+1}$ pro lichá přirozená čísla ℓ, a to plyne ze známého vzorce pro rozklad:

$$(b^\ell + 1) = (b+1)(b^{\ell-1} - b^{\ell-2} + \ldots - b + 1) \equiv 0 \pmod{b+1}.$$

Tímto je dokázáno, že palindromy se sudým počtem cifer jsou dělitelné $b+1$. □

3.1.2 Dělitelnost antipalindromů

V desítkové soustavě známe tvrzení, které říká, že přirozené číslo je dělitelné 9, právě když jeho ciferný součet je dělitelný 9. Zobecněme nyní toto tvrzení pro soustavy s libovolným přirozeným základem b.

Lemma 1. *Nechť m je přirozené číslo a jeho zápis v bázi b je roven $i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \ldots + i_1 b + i_0$. Potom m je dělitelné $b-1$, právě když jeho ciferný součet v bázi b je dělitelný $b-1$, tj.* $(i_n + i_{n-1} + \cdots + i_1 + i_0) \equiv 0 \pmod{b-1}$.

Důkaz. Jelikož $b^k - 1 = (b-1)(b^{k-1} + b^{k-2} + \ldots + b + 1)$, dostáváme kongruenci $b^k \equiv 1 \pmod{b-1}$ pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Z vlastností kongruencí pak plyne, že $i_k b^k \equiv i_k \pmod{b-1}$, tudíž také platí

$$i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \ldots + i_1 b + i_0 \equiv i_n + i_{n-1} + \ldots + i_1 + i_0 \pmod{b-1}.$$

□

Věta 4. *Antipalindrom se sudým počtem cifer v bázi b je dělitelný číslem $b-1$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindrom $m = i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \cdots + i_1 b + i_0$ pro liché n. Podle lemmatu 1 máme kongruenci

$$i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \ldots + i_1 b + i_0 \equiv i_n + i_{n-1} + \ldots + i_1 + i_0 \pmod{b-1}.$$

Podle definice antipalindromu platí $i_{n-j} + i_j = b - 1$ pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Ze sudosti počtu cifer pak plyne $i_n + i_{n-1} + \cdots + i_1 + i_0 = (b-1)\frac{n+1}{2} \equiv 0 \pmod{b-1}$, tudíž antipalindrom m je dělitelný číslem $b-1$. □

Věta 5. *Antipalindrom s lichým počtem cifer v bázi b je dělitelný číslem $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindrom $m = i_{2n}b^{2n} + i_{2n-1}b^{2n-1} + \cdots + i_1 b + i_0$. Z definice antipalindromu s lichým počtem cifer vyplývá, že všechny cifry kromě prostřední i_n lze spárovat $i_{2n} + i_0, i_{2n-1} + i_1, \ldots, i_{n+1} + i_{n-1}$ vždy se součtem $b-1$. Ciferný součet čísla $m - i_n b^n$ je tedy dělitelný číslem $b-1$, a tedy podle lemmatu 1 je také přímo $m - i_n b^n$ dělitelné číslem $b-1$, a tudíž samozřejmě i číslem $\frac{b-1}{2}$. Jelikož prostřední cifra podle věty 1 splňuje $i_n = \frac{b-1}{2}$, dozvěděli jsme se zatím, že číslo $m - \frac{b-1}{2}b^n$ je dělitelné $\frac{b-1}{2}$. Tím je dokázáno, že také antipalindrom m je dělitelný číslem $\frac{b-1}{2}$. □

3.1.3 Prvočísla mezi palindromy a antipalindromy

Dělitelnost a prvočísla spolu úzce souvisí. Pojďme se tedy podívat, jak to s nimi vypadá mezi palindromy a antipalindromy. Z věty 3 víme, že palindromy se sudým počtem cifer jsou dělitelné číslem $b+1$. Proto nejsou prvočísly s výjimkou případu, kdy $b+1$ je prvočíslo a 11 je pak jeho příslušný palindromický zápis (se sudým počtem cifer) v bázi b.

Palindromických prvočísel můžeme najít spoustu v naší desítkové soustavě, např. $101, 131, 353, 757, \ldots$, viz posloupnost $A002385$ v OEIS [7]. Nejvyšší dosud známý prvočíselný palindrom v bázi 10 je $10^{474500} + 999 \cdot 10^{237249} + 1$. Zda existuje nekonečně mnoho prvočíselných palindromů není známé. Ví se ovšem, že např. Mersennova a Fermatova prvočísla [2] jsou palindromy v bázi 2. Pokud tedy existuje nekonečně mnoho Mersennových či Fermatových prvočísel, pak je i nekonečně mnoho prvočíselných palindromů. Ale i v jiných bázích b není složité prvočísla najít, např.

$$\begin{aligned} (111)_8 &= 73, \\ (212)_3 &= 23, \\ (B222B)_{16} &= 729643. \end{aligned}$$

Zatímco prvočíselné palindromy existují v různých bázích, prvočíselné antipalindromy se vyskytují vzácně.

Báze $b > 3$

Věta 6. *Nechť je dána báze $b > 3$.*

- *Pak existuje maximálně jeden prvočíselný antipalindrom p v bázi b splňující $p < b$, a to $p = \frac{b-1}{2}$.*
- *Prvočíselný antipalindrom p v bázi b splňující $p \geq b$ neexistuje.*

Důkaz.

- Jelikož cifry v soustavě o základu b mají hodnoty od 0 do $b-1$, má každé číslo $p < b$ jednociferný zápis v bázi b. Jediný jednociferný antipalindrom v bázi b je číslo $\frac{b-1}{2}$, viz věta 1. Odtud již plyne první tvrzení věty.
- Druhé tvrzení plyne z dělitelnosti antipalindromů (věty 4 a 5).

□

[2] Mersennova prvočísla jsou tvaru $2^p - 1$, kde p je nutně prvočíslo. Fermatova prvočísla jsou tvaru $2^{2^n} + 1$.

Báze $b = 2$

Věta 7. *V bázi* 2 *existuje jediný prvočíselný antipalindrom* p*, a to* $p = 2$ *se zápisem* 10.

Důkaz. Z definice antipalindromu vyplývá, že poslední cifra jeho zápisu v této bázi bude 0. Každý antipalindrom má tedy zápis tvaru $2^n + i_{n-1}2^{n-1} + \cdots + i_1 2$, tudíž je dělitelný dvěma. Jediné takové prvočíslo je 2. $\square$

Báze $b = 3$

Věta 8. *V bázi* $b = 3$ *existují prvočíselné antipalindromy. Nutně mají lichý počet cifer a navíc minimálně tři cifry. Nejmenším takovým prvočíselným antipalindromem je číslo 13.*

Důkaz. O bázi 3 víme z věty 4, že antipalindromy se sudým počtem cifer v této bázi jsou dělitelné dvěma. Pro antipalindromy s lichým počtem cifer plyne z věty 5 pouze triviální fakt, že jsou dělitelné číslem 1, a tak všechny prvočíselné antipalindromy v bázi 3 mají lichý počet cifer. Jediný jednociferný antipalindrom v bázi 3 je číslo 1. Pro všechny prvočíselné antipalindromy v bázi $b = 3$ tak platí, že mají alespoň tři cifry a prostřední cifra je rovna jedné. Nejmenším takovým prvočíselným antipalindromem v bázi 3 je tudíž číslo 13 se zápisem 111. $\square$

Kolik prvočíselných antipalindromů v bázi $b = 3$ existuje? To je otázka, na kterou bohužel neznáme odpověď. Uvedeme alespoň, co bližšího lze říci o jejich tvaru.

Lemma 2. *Antipalindromy v bázi* 3 *začínající cifrou* 2 *jsou dělitelné číslem* 3.

Důkaz. Máme antipalindrom $m = i_n 3^n + i_{n-1}3^{n-1} + \cdots + i_1 3 + i_0$, přičemž $i_n = 2$. Jelikož $i_n + i_0 = 2$, musí být $i_0 = 0$. Odtud již plyne dělitelnost antipalindromu m číslem 3. $\square$

Věta 9. *Všechny prvočíselné antipalindromy v bázi* 3 *jsou ve tvaru* $6k + 1$*, kde* $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Uvažujme prvočíselný antipalindrom $m = i_{2n}3^{2n} + i_{2n-1}3^{2n-1} + \cdots + i_1 3 + i_0$ (počet cifer je nutně lichý podle věty 8). Podle lemmatu 2 je $i_{2n} = 1$ a $i_0 = 1$ a z věty 1 vyplývá, že $i_n = 1$. Spárujme spolu jednotlivé členy antipalindromu m (kromě i_0, i_n, i_{2n}): $i_{2n-j}3^{2n-j} + i_j 3^j, j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dokažme, že pro každé $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ existuje $s \in \mathbb{N}$ splňující:

$$3^j(i_{2n-j}3^{2n-2j} + i_j) = 6s.$$

V závorce můžeme předpokládat pouze 3 možnosti pro cifry: $i_{2n-j} = 2, i_j = 0$, nebo $i_{2n-j} = i_j = 1$, nebo $i_{2n-j} = 0, i_j = 2$. Ve všech těchto případech rovnost platí, protože v závorce bude sudé číslo. Dostáváme proto rovnost

$$\begin{aligned} m &= i_{2n}3^{2n} + i_n 3^n + i_0 + 6\ell \\ &= 3^{2n} + 3^n + 1 + 6\ell \\ &= 3^n(3^n + 1) + 1 + 6\ell \end{aligned}$$

pro nějaké přirozené nebo nulové číslo ℓ. Odtud je vidět, že m je skutečně tvaru $6k+1$ pro nějaké přirozené k. $\square$

4 Otevřené problémy

V článku jsme definovali antipalindromy v přirozené bázi a zkoumali jejich dělitelnost. Zajímavý byl výsledek, který říká, že v každé přirozené bázi různé od tří existuje maximálně jeden prvočíselný antipalindrom. Tento výsledek je překvapivý ve srovnání s palindromy, pro které není těžké nacházet prvočíselné palindromy v různých bázích. Tento článek vznikl na základě středoškolské odborné činnosti [6]. Výsledky, které jsme odvodili, ale v článku je neuvádíme, zahrnují počet antipalindromů po nějakou mez, vzdálenost mezi sousedními antipalindromy, jednoduchý vzorec pro pořadí antipalindromu, výskyty palindromů mezi antipalindromy a naopak, mocniny mezi antipalindromy.

Zbývá celá řada otevřených otázek. Vyřeší-li čtenář některé z nich, budeme rádi, pokud nás o výsledcích bude informovat. Uveďme namátkou některé z otázek:

- Co bližšího lze říci o prvočíselných antipalindromech v bázi 3? Existuje jich mnoho (dokonce nekonečně mnoho)?
- Platí pro většinu čísel m, že jsou v nějaké bázi $b < m$ antipalindromická?
- Která přirozená čísla jsou antipalindromická v mnoha bázích? V kolika bázích průměrně jsou čísla antipalindromická?
- Existuje vzdálenost mezi dvěma antipalindromy v bázi b, která je sama antipalindromem v bázi b? Případně kolik takových vzdáleností v bázi b můžeme najít?

Reference

[1] L. Balková: *Nahlédnutí pod pokličku kombinatoriky na nekonečných slovech.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, *56* (2011), 9–18.

[2] X. Droubay, J. Justin, G. Pirillo: *Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy*, Theoret. Comput. Sci. *255* (2001), 539–553.

[3] C. Guo, J. Shallit, A. Shur: *On the combinatorics of palindromes and antipalindromes*, arXiv:1503.09112 (2015).

[4] Joyce, J.: *Ulysses*, Sylvia Beach's Shakespeare and Company in Paris, 1922.

[5] E. Pelantová, Š. Starosta: *Constructions of words rich in palindromes and pseudopalindromes*, DMTCS *18* (2016), # 16.

[6] D. Ryzák: *Antipalindromy*, SOČ práce, 40. ročník, obor Matematika a statistika, 2. místo, http://www.soc.cz/archiv-minulych-rocniku/ (2018).

[7] https://oeis.org/A002385, on-line encyclopedia of integer sequences

5 Příloha

V příloze se nachází seznam prvních 120 antipalindromů v bázi $b = 10$, prvních 53 antipalindromů v bázi $b = 3$ a prvních 31 antipalindromů v bázi $b = 2$. Uvádíme zápisy antipalindromů, nikoliv jejich hodnoty.

5.1 Seznam antipalindromů v bázi $b = 10$

- Antipalindromy se 2 ciframi: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90.
- Antipalindromy se 4 ciframi: 1098, 1188, 1278, 1368, 1458, 1548, 1638, 1728, 1818, 1908, 2097, 2187, 2277, 2367, 2457, 2547, 2637, 2727, 2817, 2907, 3096, 3186, 3276, 3366, 3456, 3546, 3636, 3726, 3816, 3906, 4095, 4185, 4275, 4365, 4455, 4635, 4725, 4815, 4905, 5094, 5184, 5274, 5364, 5454, 5634, 5724, 5814, 5904, 6093, 6183, 6273, 6363, 6453, 6633, 6723, 6813, 6903, 7092, 7182, 7272, 7362, 7452, 7632, 7722, 7812, 7902, 8091, 8181, 8271, 8361, 8451, 8631, 8721, 8811, 8901, 9090, 9180, 9270, 9360, 9450, 9540, 9630, 9720, 9810, 9900.
- Antipalindromy se 6 ciframi: 100998, 101898, 102798, 103698, 104598, 105498, 106398, 107298, 108198, 109098, 110988, 111888, 112788, 113688, 114588, 115488, 116388, 117288, 118188, 119088, 120978.

5.2 Seznam antipalindromů v bázi $b = 3$

- Antipalindromy s 1 cifrou: 1.
- Antipalindromy se 2 ciframi: 11, 20.
- Antipalindromy se 3 ciframi: 111, 210.
- Antipalindromy se 4 ciframi: 1021, 1111, 1201, 2020, 2110, 2200.
- Antipalindromy s 5 ciframi: 10121, 11111, 12101, 20120, 21110, 22100.
- Antipalindromy se 6 ciframi: 100221, 101121, 102021, 110211, 111111, 112011, 120201, 121101, 122001, 200220, 201120, 202020, 210210, 211110, 212010, 220200, 221100, 222000.
- Antipalindromy se 7 ciframi: 1001221, 1011121, 1021021, 1101211, 1111111, 1121011, 1201201, 1211101, 1221001, 2001220, 2011120, 2021020, 2101210, 2111110, 2121010, 2201200, 2211100, 2221000.

5.3 Seznam antipalindromů v bázi $b = 2$

- Antipalindromy se 2 ciframi: 10.
- Antipalindromy se 4 ciframi: 1010, 1100.
- Antipalindromy se 6 ciframi: 100110, 101010, 110100, 111000.

- Antipalindromy s 8 ciframi: 10001110, 10010110, 10101010, 10110010, 11001100, 11010100, 11101000, 1111000.
- Antipalindromy s 10 ciframi: 1000011110, 1000101110, 1001010110, 1001100110, 1010011010, 1010101010, 1011010010, 1011100010, 1100011100, 1100101100, 1101010100, 1101100100, 1110011000, 1110101000, 1111010000, 1111100000.