

Kuželosečky v neeukleidovských prostorech

Ľubomíra Dvořáková, Georgij Ponimatin*

Abstrakt

V článku se věnujeme zkoumání tvaru kuželoseček v několika zajímavých metrických prostorech. Zatímco tvary elipsy, hyperboly a paraboly v eukleidovském prostoru jsou všem dobře známé, tvary kuželoseček v prostorech s diskrétní, manhattanskou, maximovou či pařížskou metrikou jistě nejednoho čtenáře překvapí.

Úvod

Když vám řekneme, že jsme potkali medvěda a byl jen metr od nás, budete se divit, že jsme ještě živí. Automaticky totiž předpokládáte, že vzdálenost měříme v eukleidovském prostoru. Jak uvidíte dále, v diskrétním prostoru bychom v jednotkové vzdálenosti nutně ohroženi nebyli.

Článek si klade za cíl seznámit čtenáře s různými metrickými prostory. Abychom ilustrovali, jak jsou prostory s různými metrikami rozdílné, popíšeme dále tvary kuželoseček (kružnice, elipsa, hyperbola, parabola) v nich. Uvidíte, jak rozmanité výsledky dostaneme. Inspirací nám byla bakalářská práce [1], jež se věnovala tvarům kuželoseček v prostoru s manhattanskou metrikou. Jednoduchý úvod do metrických prostorů poskytuje [2].

1 Metrika

Metrika je zobecněním pojmu vzdálenost. Axiomy, kterými ji definujeme, plynou z přirozených vlastností vzdálenosti.

Definice 1. *Mějme neprázdnou množinu \mathbb{M} . Zobrazení $d : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme metrikou, pokud splňuje následující axiomy pro každé $X, Y, Z \in \mathbb{M}$:*

1. $d(X, Y) \geq 0$,
2. $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$,
3. $d(X, Y) = d(Y, X)$,
4. $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$.

*Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Uspořádané dvojici (\mathbb{M}, d) říkáme *metrický prostor*. První axiom odpovídá faktu, že vzdálenost je vždy nezáporná. Druhý axiom říká, že různá místa mají mezi sebou vždy nenulovou vzdálenost. Třetí axiom se týká symetrie vzdálenosti. Čtvrtý axiom je tzv. trojúhelníková nerovnost a odpovídá tomu, že jdeme-li z místa X do Y přes nějaký předepsaný bod Z , vždy urazíme alespoň takovou vzdálenost, jako když jdeme nejkratší cestou.

Metrik existuje nekonečně mnoho. Některé jsou inspirovány reálným světem, jiné jsou ryze abstraktní. Níže uvádíme příklady nejznámějších metrik v prostoru $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

1.1 Eukleidovská metrika

Příkladem nejznámější metriky je eukleidovská metrika, kterou známe z každodenního života. Je definována pro každé $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ jako

$$d_e(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

1.2 Diskrétní metrika

Nejjednodušší možnou metrikou je metrika diskrétní. Pro každé $X, Y \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$d_0(X, Y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } X = Y, \\ 1 & \text{pro } X \neq Y. \end{cases}$$

Právě v této metrice mají libovolné dva různé body jednotkovou vzdálenost. Tedy vrátíme-li se k příkladu z úvodu, budeme-li stát na libovolném místě jen ne přímo na medvědovi, bude naše vzdálenost od medvěda v diskrétním prostoru vždy rovna jedné.

1.3 Manhattanská metrika

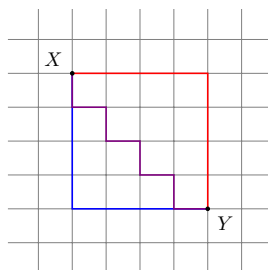
Tato metrika je inspirována tvarem ulic na Manhattanu – ulice tam tvoří pravoúhlou síť. Říká se jí také newyorská metrika. Na obr. 1 je vidět, že abychom se dostali v takové síti ulic z bodu $X = (x_1, x_2)$ do bodu $Y = (y_1, y_2)$ máme více možností. Vždy ujdeme vzdálenost $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Právě tak definujeme manhattanskou metricku:

$$d_1(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

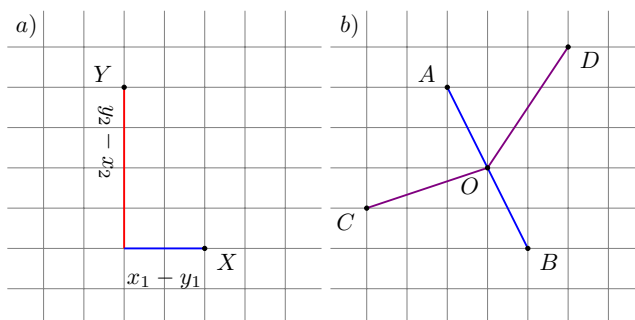
1.4 Maximová metrika

Příkladem čistě abstraktní metriky je metrika maximová (viz obr. 2). Definujeme ji pro každé $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ jako

$$d_\infty(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$



Obrázek 1: Vzdálenost mezi dvěma body v manhattanské metrice.



Obrázek 2: a) Vzdálenost mezi dvěma body v maximové metrice. V tomto případě $d_\infty(X, Y) = y_2 - x_2$. b) Vzdálenost mezi body A, B v pařížské metrice je rovna eukleidovské vzdálenosti, jelikož leží na stejné přímce jdoucí počátkem O . V případě bodů C, D je vzdálenost rovna $d_e(C, O) + d_e(D, O)$, jelikož přímka s body C, D počátkem neprochází.

1.5 Pařížská metrika

Další metrikou, která čerpá inspiraci v reálném světě, je metrika pařížská (nebo také pošťácká). Železniční síť ve Francii byla vybudována tak, že tratě byly podobné paprskům vycházejícím ze společného středu – z Paříže. Pokud se dva body X a Y nacházejí na stejné trati, pak vzdálenost mezi nimi je eukleidovská. Pokud ale leží každý na jiné trati, pak jejich vzdálenost je rovna součtu eukleidovské vzdálenosti X od Paříže a eukleidovské vzdálenosti Y od Paříže. Podle tohoto modelu definujeme pařížskou metriku (viz obr. 2) pro každé $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ jako

$$d_p(X, Y) = \begin{cases} d_e(X, Y) & \text{pro } X \text{ a } Y \text{ ležící na stejné přímce jdoucí} \\ & \text{počátkem } O = (0, 0), \\ d_e(X, O) + d_e(Y, O) & \text{jinak.} \end{cases}$$

2 Kuželosečky v metrických prostorech

Kuželosečky v eukleidovském prostoru jsou křivky, které vznikají průnikem roviny s rotačním kuželem. V následujícím textu uvedeme zobecnění definic kružnice, elipsy, hyperboly a paraboly v \mathbb{R}^2 s obecnou metrikou d . Posléze vyšetříme jejich tvary v různých metrických prostorech.

Kružnice

Definice 2. *Kružnice \mathcal{K} se středem $S = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ a poloměrem $r > 0$ je množina všech bodů v rovině, které leží ve vzdálenosti r od středu S . Formálně zapsáno:*

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(X, S) = r\}.$$

Elipsa

Definice 3. *Elipsa \mathcal{E} s ohnisky $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2, F_1 \neq F_2$, a s hlavní poloosou délky $a > 0$ je množina všech bodů v rovině, které mají konstantní součet vzdáleností od ohnisek F_1 a F_2 rovný $2a$. Formálně zapsáno:*

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a\}.$$

Stačí uvažovat vzdálenost ohnisek nejvýše rovnou $2a$. Z trojúhelníkové nerovnosti a symetrie totiž plyne, že pro libovolný bod X náležející elipse platí:

$$d(F_1, F_2) \leq d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a. \quad (1)$$

Je tedy jasné, že pro ohniska ve vzdálenosti větší než $2a$ je elipsa prázdná množina.

Hyperbola

Definice 4. *Hyperbola \mathcal{H} s ohnisky $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2, F_1 \neq F_2$, a s hlavní poloosou délky $a > 0$ je množina všech bodů v rovině, které mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od ohnisek F_1 a F_2 rovnou $2a$. Formálně zapsáno:*

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a\}.$$

Stačí uvažovat vzdálenost ohnisek alespoň $2a$. Z trojúhelníkové nerovnosti a symetrie totiž plyne, že pro libovolný bod X náležející hyperbole platí:

$$d(F_1, F_2) \geq |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a. \quad (2)$$

Je tedy jasné, že pro ohniska ve vzdálenosti menší než $2a$ je hyperbola prázdná množina.

Parabola

Definice 5. Parabola \mathcal{P} s ohniskem $F \in \mathbb{R}^2$ a řídící přímkou $\ell \subset \mathbb{R}^2, F \notin \ell$, je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od ohniska F a přímky ℓ . Formálně zapsáno:

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(X, F) = d(X, \ell)\},$$

přičemž $d(X, \ell) = \inf\{d(X, Y) \mid Y \in \ell\}$.

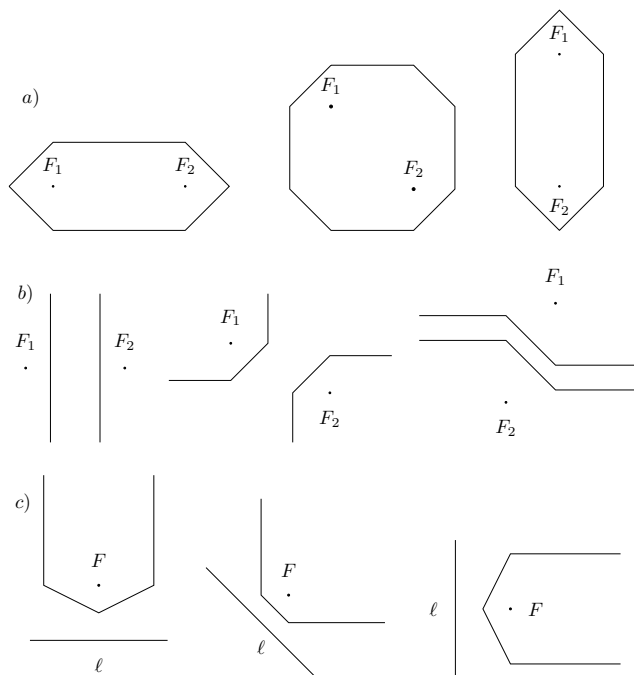
2.1 Kuželosečky v diskrétní metrice

Uvidíme, že nastávají jen triviální případy.

- **Kružnice:** Tvar kružnice (definice 2) závisí na hodnotě poloměru $r > 0$.
 1. Pokud $r \neq 1$, pak je kružnice prázdná množina, tj. $\mathcal{K} = \emptyset$.
 2. Pokud $r = 1$, pak kružnice obsahuje všechny body roviny kromě středu S , tj. $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2 \setminus \{S\}$.
- **Elipsa:** Tvar elipsy (definice 3) závisí na hodnotě parametru $a > 0$. Stačí uvažovat $a \geq \frac{1}{2}$, protože $1 = d_0(F_1, F_2) \leq 2a$ podle (1).
 1. Pokud $a = \frac{1}{2}$, pak dostáváme rovnici $d_0(X, F_1) + d_0(X, F_2) = 1$. Aby byla splněna, musí být $X = F_1$ nebo $X = F_2$, tudíž $\mathcal{E} = \{F_1, F_2\}$.
 2. Pokud $a = 1$, pak máme rovnici $d_0(X, F_1) + d_0(X, F_2) = 2$. Ta platí pro všechny body roviny různé od ohnisek, tj. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \setminus \{F_1, F_2\}$.
 3. Pro $a > \frac{1}{2}, a \neq 1$, je elipsa prázdná množina, tj. $\mathcal{E} = \emptyset$.
- **Hyperbola:** Tvar hyperboly (definice 4) závisí na hodnotě parametru $a > 0$. Stačí uvažovat $a \leq \frac{1}{2}$, protože $1 = d_0(F_1, F_2) \geq 2a$ podle (2).
 1. Pokud $a = \frac{1}{2}$, pak dostáváme rovnici $|d_0(X, F_1) - d_0(X, F_2)| = 1$. Aby byla splněna, musí být $X = F_1$ nebo $X = F_2$, tudíž $\mathcal{H} = \{F_1, F_2\}$.
 2. Pro $a > 0, a \neq \frac{1}{2}$, je hyperbola prázdná množina, tj. $\mathcal{H} = \emptyset$.
- **Parabola:** Jelikož $d_0(X, F)$ a $d_0(X, \ell)$ nabývají pouze hodnot 0 a 1, máme následující možnosti:
 1. $d_0(X, F) = d_0(X, \ell) = 0$, což implikuje $X = F$ a $X \in \ell$. Jelikož ale $F \notin \ell$, tato možnost pro žádný bod X z paraboly nenastává.
 2. $d_0(X, F) = d_0(X, \ell) = 1$, což implikuje $X \neq F$ a $X \notin \ell$. Tudíž parabola obsahuje všechny body roviny kromě ohniska a kromě bodů řídící přímky, tj. $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{F\} \cup \ell)$.

2.2 Kuželosečky v manhattanské metrice

J. Bruna ve své bakalářské práci [1] odvozuje tvar kuželoseček v manhattanské metrice. K tomu využívá geometrického postupu, tzv. bodové konstrukce pomocí průsečíků kružnic. Na obr. 3 ilustrujeme podobu kuželoseček, jak ji vyšetřil autor [1]. Pro zajímavost uvedme, že kružnice má při takové metrice tvar čtverce otočeného kolem svého středu o úhel $\frac{\pi}{4}$. Toto tvrzení si čtenář snadno sám rozmyslí na základě definice kružnice.



Obrázek 3: a) elipsa, b) hyperbola, c) parabola v manhattanské metrice v závislosti na vzájemné poloze ohnisek, resp. ohniska a řídicí přímky.

2.3 Kuželosečky v maximové metrice

Pro snazší odvození tvaru kuželoseček v prostoru s maximovou metrikou použijeme vzorec pro vyjádření maxima z čísel $x, y \in \mathbb{R}$:

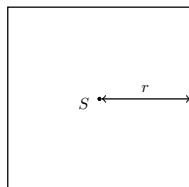
$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|). \quad (3)$$

2.3.1 Kružnice v maximové metrice

Přepišme obecnou definici kružnice (definice 2) do tvaru pro maximovou metriku:

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x - s_1|, |y - s_2|\} = r\}.$$

Čtenář si snadno rozmyslí, že takové rovnici vyhovuje čtverec se středem S a délkou strany $2r$, viz obr. 4.



Obrázek 4: Kružnice se středem S a poloměrem r v maximové metrice.

2.3.2 Hyperbola v maximové metrice

Odvození tvaru předvedeme na příkladě hyperboly s ohnisky $F_1 = (-c, 0)$ a $F_2 = (c, 0)$ pro $c > 0$ a posléze okomentujeme, jak získat tvar hyperboly s obecnými ohnisky. Stačí uvažovat $a \leq c$, protože $2a \leq d_\infty(F_1, F_2) = 2c$ podle (2). Pro jednoduchost odvodíme tvar naší speciální hyperboly v prvním kvadrantu, zbytek hyperboly pak získáme využitím jejích symetrií.

V definici hyperboly (definice 4) nahradíme vzdálenosti $d(X, F_1)$ a $d(X, F_2)$ příslušnými tvary vzdáleností mezi těmito body v maximové metrice, z čehož získáme rovnici:

$$|\max\{|x + c|, |y|\} - \max\{|x - c|, |y|\}| = 2a,$$

již pak za použití vyjádření (3) převedeme na snadno řešitelný tvar:

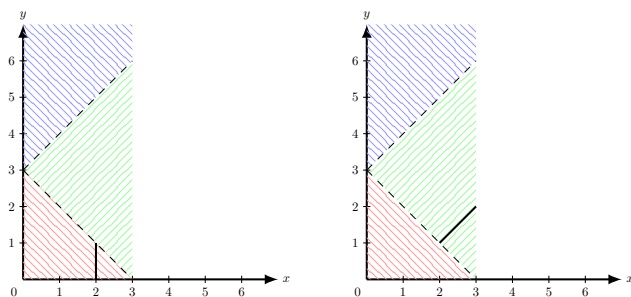
$$\left| |x + c| + |y| + |x + c - |y|| - |x - c| - |y| - ||x - c| - |y|| \right| = 4a. \quad (4)$$

- **Řešení rovnice pro $x \in [0, c)$ a $y \geq 0$**

V této oblasti je hodnota výrazu $x - c$ záporná a hodnota výrazu $x + c$ kladná, z čehož získáme rovnici:

$$|2x + |x + c - y| - |c - x - y|| = 4a,$$

kteřou vyřešíme pro 3 oblasti: $y \in [0, c - x)$, $y \in [c - x, x + c)$ a $y \geq x + c$. V oblasti $y \in [0, c - x)$ je řešením přímka $x = a$, v oblasti $y \in [c - x, x + c)$ je řešením přímka $y = x + c - 2a$. Nakonec pro oblast $y \geq x + c$ je řešením prázdná množina. Jednotlivé části výsledku jsou znázorněny na obr. 5.



Obrázek 5: Znázornění řešení v oblasti $x \in [0, c]$ a $y \in [0, c-x]$ (vlevo) a v oblasti $x \in [0, c]$ a $y \in [c-x, x+c]$ (vpravo) pro hyperbolu s $c = 3$ a $a = 2$.

• **Řešení rovnice pro $x \geq c$ a $y \geq 0$**

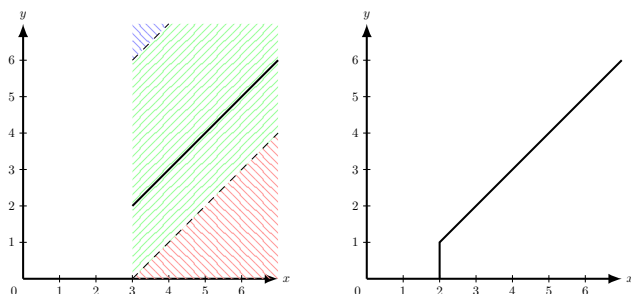
V oblasti $x \geq c$ a $y \geq 0$ mají výrazy $x - c$ a $x + c$ kladnou hodnotu. V důsledku toho získáváme rovnici:

$$|2c + |x + c - y| - |x - c - y|| = 4a.$$

Vyřešením této rovnice získáme pro oblast $y \in [0, x-c)$ prázdnou množinu, pro oblast $y \in [x-c, x+c)$ přímku $y = x + c - 2a$ a pro oblast $y \geq x + c$ opět prázdnou množinu. Celkově je tedy hyperbola v prvním kvadrantu sjednocením úsečky a polopřímky (viz obr. 6):

$$x = a \text{ pro } y \in [0, c - a],$$

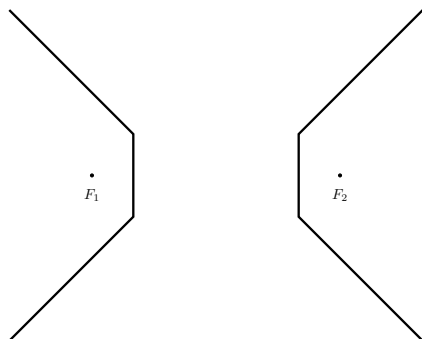
$$y = x + c - 2a \text{ pro } x \geq a.$$



Obrázek 6: Znázornění řešení v oblasti $x \geq c$ a $y \in [x - c, x + c]$ pro hyperbolu s $c = 3$ a $a = 2$ (vlevo). Hyperbola s ohnisky $F_1 = (-3, 0)$ a $F_2 = (3, 0)$ a $a = 2$ v prvním kvadrantu (vpravo).

V maximové metrice je hyperbola (4) symetrická podle osy \mathbf{x} , protože s každým bodem (x, y) obsahuje i bod $(x, -y)$. Dále je zde symetrie podle

osy \mathbf{y} , jelikož s každým bodem (x, y) leží na hyperbole i bod $(-x, y)$. Pro získání celé hyperboly tedy stačí pouze tvar hyperboly z prvního kvadrantu podle daných symetrií zobrazit. Výsledný tvar hyperboly je znázorněn na obr. 7.



Obrázek 7: Hyperbola s ohnisky $F_1 = (-3, 0)$ a $F_2 = (3, 0)$ a $a = 2$ v maximové metrice.

- **Obecný tvar hyperboly v maximové metrice**

Ze speciálně zvolených ohnisek $F_1 = (-c, 0)$ a $F_2 = (c, 0)$ získáme libovolná ohniska jejich rotací kolem počátku a translací. Podívejme se, zda translace a rotace bodů mění jejich maximovou vzdálenost.

Pozorování 1. *Maximová metrika je invariantní vůči translaci v \mathbb{R}^2 .*

Důkaz. Necht' $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Potom $d_\infty(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$. Posuneme-li tyto body o vektor $Z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, potom $d_\infty(X + Z, Y + Z) = \max\{|x_1 + z_1 - y_1 - z_1|, |x_2 + z_2 - y_2 - z_2|\} = d_\infty(X, Y)$. \square

Pozorování 2. *Maximová metrika není invariantní vůči rotaci kolem počátku v \mathbb{R}^2 .*

Důkaz. Uvažujme body $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Pokud je otočíme o úhel $\frac{\pi}{4}$ kolem počátku proti směru ručiček hodin, dostaneme body $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ a $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Platí:

$$d_\infty((1, 0), (0, 1)) = 1 \neq \sqrt{2} = d_\infty\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

\square

Z pozorování 1 a 2 plyne, že pro získání všech možných tvarů hyperboly v \mathbb{R}^2 s maximovou metrikou stačí uvažovat hyperboly s ohnisky získanými

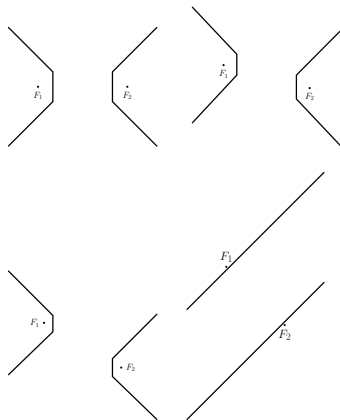
rotací ohnisek $F_1 = (-c, 0)$ a $F_2 = (c, 0)$ kolem počátku, tj. s ohnisky $F'_1 = (-c \cos \varphi, c \sin \varphi)$ a $F'_2 = (c \cos \varphi, -c \sin \varphi)$. Řeší se tedy rovnice:

$$|\max\{|x + c \cos \varphi|, |y - c \sin \varphi|\} - \max\{|x - c \cos \varphi|, |y + c \sin \varphi|\}| = 2a. \quad (5)$$

Dokonce se můžeme omezit na úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ díky následující úvaze: Zrcadlíme-li libovolná ohniska ležící symetricky podle počátku na kružnici poloměru c

- podle osy \mathbf{x} ,
- podle osy \mathbf{y} ,
- podle osy $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,

pak výslednou hyperbolu získáme z původní stejným zrcadlením. Toto pozorování si čtenář snadno rozmyslí z tvaru rovnice (5).



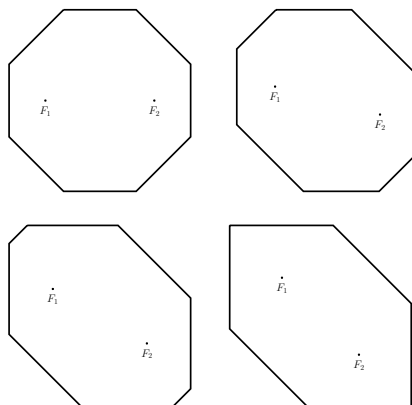
Obrázek 8: Hyperbola s ohnisky $F_1 = (-3, 0)$ a $F_2 = (3, 0)$ a $a = 2$ v maximové metrice a po rotaci ohnisek o úhel $\varphi \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\}$ podle počátku.

Na obr. 8 ilustrujeme, jak dopadne řešení rovnice (5) pro úhel $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\}$, tj. jak vypadají hyperboly získané rotací ohnisek $F_1 = (-c, 0)$ a $F_2 = (c, 0)$ kolem počátku o příslušné úhly.

2.3.3 Elipsa a parabola v maximové metrice

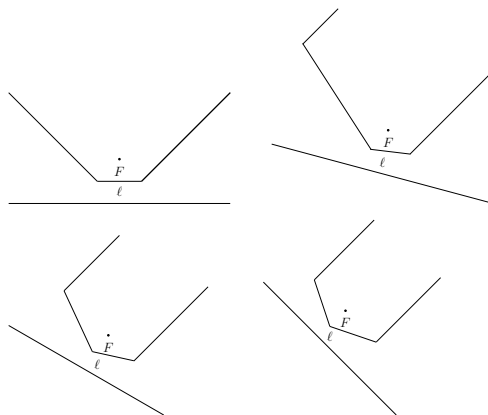
Analogickým postupem, jakým jsme vyšetřili tvar hyperboly, lze vyšetřit i elipsu a parabolu. Opět ilustrujeme možné tvary:

- Na obr. 9 je elipsa s ohnisky $F_1 = (-c, 0)$ a $F_2 = (c, 0)$ otočenými kolem počátku o úhel $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\}$. Opět platí, že stačí zkoumat rotace o úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ a všechny ostatní tvary elipsy získáme zrcadlením podle osy \mathbf{x} , podle osy \mathbf{y} a podle osy $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.



Obrázek 9: Elipsa s ohnisky $F_1 = (-3, 0)$ a $F_2 = (3, 0)$ a $a = 5$ v maximové metrice a po rotaci ohnisek o úhel $\varphi \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\}$ podle počátku.

- Na obr. 10 je parabola s ohniskem $F = (0, c)$ a řídicí přímkou $\ell : y = -c$ otočenými kolem počátku o úhel $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\}$. Stačí zkoumat rotace o úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ a všechny ostatní tvary paraboly získáme zrcadleními podle osy \mathbf{x} , podle osy \mathbf{y} a podle osy $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

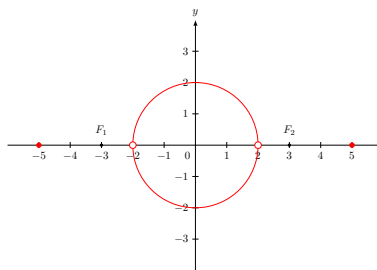


Obrázek 10: Parabola s ohniskem $F = (0, 3)$ a řídicí přímkou $\ell : y = -3$ v maximové metrice a po rotaci ohnisek a přímky o úhel $\varphi \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\}$ podle počátku.

3 Úloha pro čtenáře

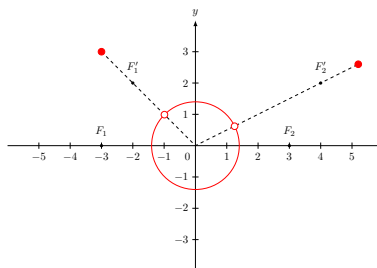
Na závěr máme pro čtenáře jeden nelehký, ale nikoliv nezvládnutelný úkol, a to vyšetřit, jaké tvary mohou mít kuželosečky v prostoru \mathbb{R}^2 s pařížskou metrikou. Poskytneme i drobnou nápovědu:

- Opět doporučujeme začít případem symetricky umístěných ohnisek $F_1 = (-c, 0)$ a $F_2 = (c, 0)$ v případě elipsy a hyperboly, resp. ohniska $F = (0, c)$ a řídicí přímky $\ell : y = -c$ v případě paraboly. Nejzajímavější je případ elipsy, ilustrace viz obr. 11.



Obrázek 11: Elipsa s ohnisky $F_1 = (-3, 0)$ a $F_2 = (3, 0)$ a $a = 5$ v pařížské metrice.

- Je dobré si uvědomit, že pařížská metrika je invariantní vůči rotaci podle počátku, ale není invariantní vůči translaci. Proto je tentokrát potřeba pro vyšetření všech možných tvarů kuželoseček posouvat symetricky umístěná ohniska, resp. ohnisko a řídicí přímku o všechny možné vektory $Z \in \mathbb{R}^2$. Na obr. 12 ilustrujeme případ elipsy, který je opět nejzajímavější.



Obrázek 12: Elipsa s ohnisky $F_1 = (-2, 2)$ a $F_2 = (4, 2)$ (tedy ohniska z obr. 11 posunutá o vektor $(1, 2)$) a $a = 5$ v pařížské metrice. Poloměr kružnice je $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Budeme rádi, když nám svá řešení zašlete na adresu lubomira.dvorakova@fjfi.cvut.cz.

Reference

- [1] J. Bruna, *Vybrané objekty v neeukleidovských metrikách*, bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2012.
- [2] *Seriál – Metrické prostory I.*, Matematický korespondenční seminář MFF UK, dostupné z <http://mks.mff.cuni.cz/archive/>