Ramseyova teorie aneb příklady, které jsou pro počítač příliš složité

Ľubomíra Balková[*], Aranka Hrušková[†], Vladislav Matúš[‡], Jakub Schusser[§], Eduard Šubert[¶], Martin Töpfer[‖]

Abstrakt

Ramseyova teorie se zabývá příklady, které hledají nejmenší možný počet prvků zaručující určitou vlastnost. Patří mezi ně např. Party Problem, Happy End Problem nebo Van der Waerden Problem. Pro počítače jsou příklady z této oblasti značně časově náročné, ale matematickou úvahou lze výsledku často dosáhnout s pomocí tužky a papíru. Ramseyovu teorii velmi rozvinul slavný maďarský matematik Pál Erdős.

1 Ramseyova teorie

Frank Plumpton Ramsey (1903 – 1930) byl britský matematik, filozof a ekonom, který i navzdory faktu, že zemřel v pouhých 26 letech, publikoval mnoho článků zabývajících se kombinatorikou, pravděpodobností a matematickou ekonomií a stál u zrodu teorie, která nese jeho jméno. *Ramseyova teorie* se zabývá hledáním nejmenšího počtu prvků, který garantuje určitou vlastnost. Nejlépe tuto teorii pochopíme na konkrétních příkladech.

Úloha 1. *Nechť n značí přirozené číslo. Dokažte, že vybereme-li z čísel $1, 2, 3, \ldots, 2n$ libovolně $n + 1$ čísel, pak mezi nimi vždy najdeme dvě nesoudělná čísla. Vybrat n čísel ale nestačí.*

Důkaz. Vždy, když vybereme $n + 1$ čísel, objeví se mezi nimi dvě po sobě jdoucí čísla a ta nejsou soudělná. Pokud ale vybereme pouze n prvků, může nastat situace, kdy vybereme např. n sudých čísel, která budou vždy po dvojicích soudělná. (Jejich společným dělitelem bude vždy číslo 2.) □

Úloha 2. *Najděte minimální přirozené číslo n tak, aby platilo, že uspořádáme-li prvních n přirozených čísel, tedy čísla $1, 2, 3, \ldots, n$, libovolně, pak vždy najdeme rostoucí nebo klesající podposloupnost 11 čísel.*

Řešení: $n = 101$.

[*]Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze, e-mail: lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz
[†]Gymnázium Christiana Dopplera
[‡]Gymnázium Českolipská 373
[§]Gymnázium Broumov
[¶]Gymnázium Turnov
[‖]Gymnázium Nad Štolou

Důkaz. Uvažovat prvních 100 čísel nestačí, protože uspořádáme-li je v pořadí

$$91, 92, 93, \ldots, 100; 81, 82, 83, \ldots 90; \ldots\ldots, 11, 12, 13 \ldots 20; 1, 2, 3, \ldots 10,$$

pak jistě čtenář uvěří, že v takovém uspořádání nenajdeme ani klesající ani rostoucí posloupnost 11-ti čísel. Důkaz, že 101 čísel postačuje, necháme pro bystrého čtenáře. A kdo nechce přemýšlet nad důkazem, může alespoň zkusit uspořádat čísla od 1 do 101 libovolně a ověřit, že mezi nimi najde rostoucí nebo klesající posloupnost o 11 členech. □

Ramseyova teorie je velmi obtížná část matematiky, ve které je snadné problémy formulovat, ale obtížné je řešit. Ramseyova teorie vznikla jako teoretická disciplína, ale podobně jako prvočísla, která se odjakživa zkoumala jako pouhá zajímavost, a nakonec v dnešní době hrají prim v kryptografii a naše kreditní karty jsou chráněny šifrou RSA, která je založena na vlastnostech velkých prvočísel, tak i Ramseyova teorie má dnes uplatnění v mnoha praktických oblastech: komunikační sítě, přenos informace, vyhledávací systémy atd.

2 Van der Waerdenův problém

Bartel L. van der Waerden (1903 – 1996) byl holandský matematik, který se věnoval především abstraktní algebře. Ve svém díle *Algebra* byl první, kdo obsáhl toto téma jako celek. Jeho jméno je však navždy zapsáno v dějinách matematiky zejména díky van der Waerdenovu teorému, který je součástí Ramseyovy teorie a srozumitelně osvětlí, o co v Ramseyově teorii jde.

2.1 Van der Waerdenův teorém

Věta 1. *Pro každé $r, k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pokud čísla $1, 2, \ldots, N$ obarvíme náhodně každé jednou z r různých barev, pak jistě najdeme k členů jednobarevné aritmetické posloupnosti*[1]*. Nejmenší možné N značíme $W(r, k)$ a nazýváme van der Waerdenovým číslem.*

Pro lepší srozumitelnost zkoumejme van der Waerdenův problém pro $r = 2,\ k = 3$.

Úloha 3. *Najděte nejmenší možné N tak, aby v posloupnosti $1, 2, \ldots, N$ po libovolném obarvení 2 barvami (např. červenou a bílou) šly najít 3 členy aritmetické posloupnosti.*

Řešení: $N = 9$.

Důkaz. Přijdeme na to, že $N = 8$ je málo, protože můžeme barvit následovně:

$$\underline{1}\overline{23}\underline{45}\overline{67}\underline{8},$$

kde $\underline{5}$ značí obarvení červenou, zatímco $\overline{5}$ obarvení bílou barvou. Ukažme, že pokud přidáme deváté číslo, tak při jeho libovolném obarvení červenou či bílou barvou najdeme 3 členy aritmetické posloupnosti.

Barvíme čísla $1, 2, 3, \ldots, 9$ od středu číselné posloupnosti, tedy od čísla 5. Pro zjednodušení jsme místo podtržení a nadtržení použili pímena: b pro bílou barvu a c pro

[1]Posloupnost čísel je aritmetická, pokud rozdíl každých dvou sousedních členů je konstantní, tj. roven nějakému přirozenému číslu d.

červenou barvu. Tečky znázorňují neobarvená čísla. Začneme tím, že číslo 5 obarvíme bez újmy na obecnosti barvou b – následují tři možnosti dalšího obarvení, z nichž jednu jsme znázornili níže kompletně a u zbylých dvou naznačili začátek (jde o možnosti, kde může být nejbližší bílá číslice nalevo od čísla 5). Každé další obarvení čísla zabraňuje vzniku aritmetické posloupnosti. Nakonec však zůstane číslo, které nelze obarvit ani bíle b ani červeně c – to je označeno *!!!*. Čtenář ať si rozmyslí, že i obě další cesty vedou ke vzniku jednobarevné aritmetické posloupnosti.

Postup obarvení

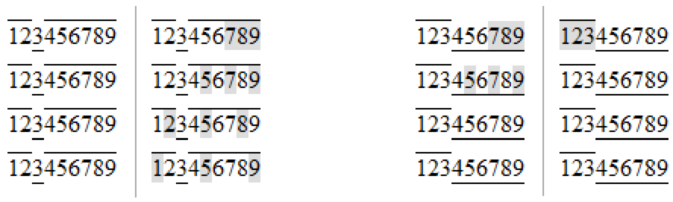
1	2	3	4	5	6	7	8	9
.	.	.	b	b	.	.	.	.
.	.	c	b	b	c	.	.	.
.	.	c	b	b	c	.	.	b
.	.	c	b	b	c	c	.	b
.	.	c	b	b	c	c	b	b
.	c	c	b	b	c	c	b	b
!!!	c	c	b	b	c	c	b	b

Ostatní možnosti začátku

1	2	3	4	5	6	7	8	9
.	.	b	c	b	.	.	.	.
.	b	c	c	b	.	.	.	.

$\square$

Důkaz jsme provedli také hrubou silou. Doporučujeme čtenáři, aby si napsal svůj vlastní program. My jsme zkoumali všechny možnosti při použití programovacích jazyků C++, Wolfram Mathematica a PHP.



Obrázek 1: Dvě ukázky výstupu z programu. Barevné rozlišení je reprezentováno podtržením a nadtržením. V prvním sloupci jsou posloupnosti nalezené v podtržených, ve druhém v nadtržených podposloupnostech. Po řádcích se zvyšuje diference. Jelikož je pro libovolné obarvení (tedy pro libovolná umístění nadtržení a podtržení) nalezena jednobarevná aritmetická posloupnost pro nějakou diferenci, je hrubou silou potvrzeno, že $W(2,3) = 9$.

3 Party Problem

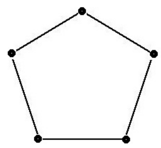
Dalším téměř notoricky známým problémem z oblasti Ramseyovy teorie je Party Problem, česky Narozeninový problém.

Úloha 4. *Jaký je nejmenší počet hostů, kteří se musí účastnit večírku, má-li být zajištěno, že mezi nimi existuje trojice, kde každý znal každého již před večírkem, nebo existuje trojice, kde každý vidí každého na večírku poprvé?*

Abychom mohli Party Problem přepsat do jazyka matematiky, celou situaci budeme reprezentovat grafem. Vrcholy grafu představují hosty a hrana mezi dvěma vrcholy znamená, že se daní dva lidé znali již před večírkem. Nyní můžeme přeformulovat úlohu

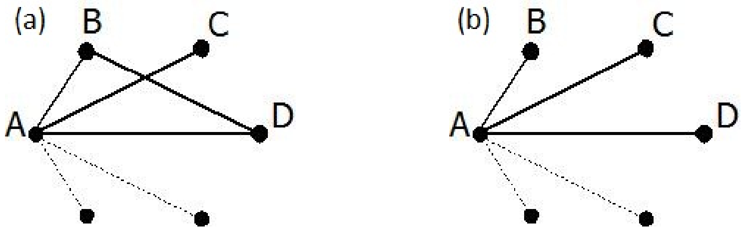
následovně: Jaký je minimální počet vrcholů tak, aby každý graf s takovým počtem vrcholů obsahoval buď tři navzájem propojené vrcholy, nebo tři vrcholy, mezi nimiž není žádná hrana?
Řešení: Minimální počet hostů je 6.

Důkaz. Následující obrázek ukazuje, že 5 hostů nestačí. Na grafu o 6 vrcholech už ale



Obrázek 2: Pět hostů na večírku nestačí k tomu, aby mezi nimi existovala trojice, kde každý znal každého již před večírkem, nebo mezi nimi existovala trojice, kde každý vidí každého na večírku poprvé.

dokážeme, že 6 hostů stačí. Z libovolného vrcholu (označme jej A) vedou alespoň tři hrany, nebo existují alespoň tři vrcholy, se kterými vrchol A spojen hranou není. Bez újmy na obecnosti uvažujme, že z daného vrcholu vedou aspoň tři hrany. Označme libovolné tři vrcholy spojené s vrcholem A jako B, C a D. Pokud by existovala hrana mezi některými dvěma těmito vrcholy, tvořily by s vrcholem A trojici navzájem propojených vrcholů, což by byla hledaná trojice tří hostů – známých. Pokud mezi B, C a D není žádná hrana, tvoří tyto vrcholy hledanou trojici nepropojených vrcholů, tedy hostů setkávajících se poprvé.



Obrázek 3: Ilustrace případu, kdy (a) byla nalezena trojice hostů, kde každý znal každého už před party, (b) byla nalezena trojice hostů, kteří se vidí na party poprvé.

□

Důkaz, že odpověď na Party Problem zní 6 hostů, lze provést také hrubou silou. Ovšem tentokrát budeme muset zkontrolovat, zda všechny grafy na 6 vrcholech obsahují trojici vzájemně propojených vrcholů nebo trojici vzájemně nepropojených vrcholů. Pokud program nebudeme nijak optimalizovat a budeme uvažovat všechny grafy včetně těch, které jsou navzájem izomorfní (tedy jeden vznikne z druhého přejmenováním vrcholů), budeme muset otestovat $2^{15} = 32768$ grafů [2]. Výpočet našeho programu napsaného v prostředí Wolfram Mathematica trval přibližně 25 minut.

Zobecněním Narozeninového problému je úloha, kdy hledáme nejmenší počet hostů, kteří se musí účastnit večírku, má-li být zajištěno, že mezi nimi existuje n-tice, kde každý

[2]Počet grafů na 6 vrcholech určíme následovně: Graf, který obsahuje všechny možné hrany, jich má 15, jak snadno spočteme. Když konstruujeme všechny grafy na 6 vrcholech, u každé z 15 hran máme 2 možnosti - buď ji do grafu dáme, nebo ne. Proto je všech grafů na 6 vrcholech 2^{15}.

znal každého již před party, nebo existuje n-tice, kde každý vidí každého poprvé na večírku. Pokud bychom se snažili řešit tento problém hrubou silou bez jakékoli optimalizace, museli bychom prověřit $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ grafů. Již pro $n = 5$ je tato úloha pro dnešní počítače příliš složitá. Bohužel není známá ani žádná elegantní matematická cesta vedoucí k výsledku. Pro $n = 4$ je potřeba minimálně 18 hostů na večírku, ale pro vyšší n jsou známé jen horní a dolní odhady. Pro $n = 5$ se odhadovaný minimální počet hostů pohybuje mezi 43 a 49 a pro $n = 6$ mezi 102 a 165.

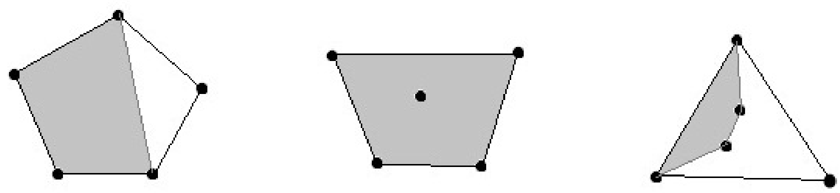
4 Happy End Problem

Happy End Problem byl zformulován ve třicátých letech minulého století. Jako první s ním přišla maďarská matematička Esther Kleinová.

Úloha 5. *Kolik bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce, je minimálně potřeba, aby některé z nich tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníku?*

Sama si ihned odpověděla a následně se začal zkoumat stejný problém pro pětiúhelník i obecně pro n-úhelník.
Řešení: Minimální počet bodů je 5.

Důkaz. Uvažujme všechny možné tzv. konvexní obaly. [3]



Obrázek 4: Konvexní obaly 5 bodů, které leží v rovině, ale ne v přímce, vytvoří vždy buď 5-úhelník, 4-úhelník nebo trojúhelník.

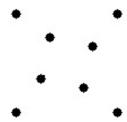
Každých pět bodů v rovině lze uzavřít buď do konvexního pětiúhelníku, čtyřúhelníku, nebo trojúhelníku. Pokud vybereme libovolné čtyři body z pětiúhelníku, vytvoří konvexní čtyřúhelník. U čtyřúhelníku jsou hledanými body čtyři krajní. V trojúhelníku spojíme dva vnitřní body přímkou, která nám rozdělí rovinu na dvě poloroviny. V jedné z nich se nachází jeden vrchol trojúhelníku a v druhé dva. Spojíme-li dva vnitřní body s dvěma vrcholy trojúhelníku ležícími ve stejné polorovině, získáme hledaný konvexní čtyřúhelník. □

Minimální počet bodů je známý i pro pětiúhelník.

Úloha 6. *Kolik bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce, je minimálně potřeba, aby některé z nich tvořily vrcholy konvexního pětiúhelníku?*

Řešení: Minimální počet bodů je 9.
Tvrzení už nebudeme dokazovat, jen ilustrujeme na obrázku, že 8 bodů stačit nemusí.

[3] Konvexní obal je nejmenší konvexní množina obsahující dané body. Připomeňme, že útvar v rovině je konvexní, pokud s každými dvěma body obsahuje i úsečku, která je spojuje.



Obrázek 5: Uspořádání 8 bodů v rovině, které neobsahuje konvexní pětiúhelník.

Vzápětí po vyslovení problému přišel matematik György Szekeres s obecným odhadem – s počtem bodů $N(n)$, které zajistí existenci konvexního n-úhelníku. Esther Kleinovou tím tak uchvátil, že získal její ruku (řečeno s nadsázkou). Od té doby se tomuto problému přezdívá Happy End Problem. Matematici ale věří hypotéze, že minimální počet bodů garantujících existenci konvexního n-úhelníku je $2^{n-2}+1$. Tato hypotéza zatím nebyla ani potvrzena ani vyvrácena (zkontrolujte, že pro $n = 3, 4, 5$ hypotéza platí).

5 Pál Erdős a Ramseyova teorie

V souvislosti s Ramseyovou teorií je povinností zmínit jméno jejího velkého propagátora. Pál Erdős se narodil roku 1913 v Budapešti v rodině matematiků. Již jako dítě jevil známky geniality, ve čtyřech letech ovládal záporná čísla a v deseti byl okouzlen Eukleidovým důkazem, že prvočísel je nekonečně mnoho[4], který mu ukázal jeho otec – tehdy se malý Pál rozhodl, že se stane matematikem a bude sám nacházet takové krásné důkazy. Své tituly získal velice brzy, všechny za důkazy týkající se prvočísel. Během svého života napsal Erdős rekordní počet článků. Protože měl kromě velkého množství publikací i obrovský počet spoluautorů, bylo na jeho počest definováno Erdősovo číslo. On sám má číslo 0, každý jeho spoluautor 1, spoluautor spoluautora 2 atd.

Pál Erdős také hledal „Zázračné děti“. Jedním z nich byl např. 11-letý Lájos Pósa, kterého si Erdős prověřil Příkladem 1. Lájos ho během chvilky vyřešil a díky tomu byl Erdősem přizván ke spolupráci.

Tento matematik ze svých životních zkušeností usoudil, že Bůh rozhodně nemůže být dobrotivý, a přezdíval mu Supreme Fascist (SF). Hlásal, že SF má Knihu (the Book), která obsahuje jen ty nejhezčí důkazy. Největší pochvalou tedy bylo, když o vašem důkazu prohlásil: "It's straight from the Book."

S Ramseyovou teorií se seznámil díky Happy End Problemu, protože byl vůdčí figurou Anonymous Group, skupiny maďarských studentů matematiky, kam Esther Kleinová také patřila. Bezprostředně po Györgyovi Szekeresovi nalezl Pál Erdős ještě lepší horní odhad. Říká se, že György měl štěstí, protože jedinou Pálovou láskou byla matematika, a proto Esther dala přednost Györgyovi. Více o životě geniálního matematika Pála Erdőse se dozvíte ve čtivých knihách [3, 4] a ve filmu [2].

Reference

[1] Graham R. L., Spencer J. H. *Ramsey Theory.* Scientific American (1990), 112–117.

[2] Csicsery G.-P. *N Is a Number: A Portrait of Paul Erdös.* DVD, Springer, Berlin, 1999.

[4] Čtenář by měl tento důkaz znát. Pokud nezná, doporučujeme, aby se jím nechal také při nejbližší příležitosti okouzlit. Jde o první matematický důkaz sporem.

[3] Hoffman P. *The Man Who Loved Only Numbers.* The Story of Paul Erdös and the Search for Mathematical Truth. Hyperion, New York, 1998.

[4] Schechter B. *My brain is open: The mathematical journeys of Paul Erdös.* Simon & Schuster, New York, 2000.