# Mince zajímají nejen numismatiky
# (Coins are of interest not only for numismatists)

**Ľubomíra Dvořáková, Marie Dohnalová, Praha**

**Abstrakt**

V článku zmíníme pojmy týkající se platby mincemi, které souvisejí s optimalitou počtu použitých mincí. V případě problému platby (říká se také rozměňování – anglicky *change making problem*), tj. skládání částky z mincí bez možnosti vracení, jsou úlohy spojené s optimalitou dobře prozkoumané. Analogické úlohy zformulujeme pro směnu, tj. skládání částky z mincí s možností vracení. Zde zůstává naopak řada problémů otevřená.

## Úvod

Už jste někdy přemýšleli o výhodách a nevýhodách hodnot českých mincí? Platíme každou částku relativně nízkým počtem mincí? Lze takové výhodné platby provádět hladovým algoritmem? Nevyplatilo by se do českého systému nějakou minci přidat? A bylo výhodné ukončit v roce 2008 platnost padesátníku? A co když porovnáme české koruny s americkými centy, eury nebo některými exotickými měnami? Budou v nějakých ohledech české koruny výhodnější? Tyto a podobné otázky si klade J. Shallit a kol. v článku [4], který nás inspiroval ke studiu této problematiky, a také první z autorek v článku [1].

My se nyní ovšem téměř odpoutáme od reálných systémů mincí a budeme studovat problematiku obecněji. V první části definujeme a prozkoumáme reprezentaci částek při platbě a speciálně optimální reprezentaci a s ní související optimální systémy mincí. Dále se budeme zabývat hladovou reprezentací a s ní spjatými optimálními hladovými systémy. Vyšetříme, jaký vztah mezi optimálními a hladovými reprezentacemi splňují obvykle reálné systémy mincí. Dále uvedeme známé výsledky týkající se složitosti nejznámějších platebních problémů.

Ve druhé části definujeme směnu a zformulujeme pro ni analogické pojmy jako pro platbu. Uvedeme, které problémy zůstávají v případě směny otevřené, a zmíníme, jaké výsledky z teorie numeračních systémů by mohly při jejich řešení pomoci.

## 1 Platba

Platbou rozumíme, vágně řečeno, skládání částky pomocí daných mincí.

**Definice 1.** *Mějme* $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$ *(mince), kde* $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$*, dále* $N \in \mathbb{N}$ [1] *a* $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *(částka). Pokud* $n = \sum_{i=1}^{D} a_i e_i$*, kde* $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, pak* $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ *nazveme* reprezentací $n$ (při platbě). [2]

[1] V reálných systémech mincí obvykle klademe $N$ rovné hodnotě nejnižší bankovky. Pro české mince je tedy $N = 100$, pro americké centy taktéž $N = 100$ (kovový dolar je spíše raritou).

[2] Často budeme pro jednoduchost nazývat reprezentací přímo zápis ve tvaru $\sum_{i=1}^{D} a_i e_i$.

*Říkáme, že tato reprezentace je* optimální *(nebo* minimální*), pokud* $\sum_{i=1}^{D} a_i$ *je minimální mezi všemi reprezentacemi částky* $n$.

**Příklad 1.** *Uvažujeme-li české koruny* $e_1 = 1, e_2 = 2, e_3 = 5, e_4 = 10, e_5 = 20, e_6 = 50$, *pak*

$$30 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10 = 30 \cdot 1,$$

*tedy* $(0, 1, 1, 0, 0, 0)$ *a* $(0, 0, 0, 0, 0, 30)$ *jsou příklady reprezentací částky* $30$*Kč, přičemž první z nich je optimální. Jak uvidíme za chvíli, v případě českých korun má každá částka jedinou optimální reprezentaci. Nemusí tomu tak ovšem být vždy.*

*Mějme mince v hodnotách* $e_1 = 1, e_2 = 2, e_3 = 3, e_4 = 4$, *potom*

$$5 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2,$$

*tedy optimální reprezentace* $5$ *jsou* $(1, 0, 0, 1)$ *i* $(0, 1, 1, 0)$.

**Poznámka 1.** *Pro zajištění jednoznačnosti optimální reprezentace se obvykle definice doplňuje tak, že optimání reprezentací rozumíme lexikograficky největší* [3] *z reprezentací, které obsahují minimální počet mincí. V předchozím příkladě je tedy optimální reprezentací* $5$ *při takto rozšířené definici reprezentace* $(1, 0, 0, 1)$.

Přirozenou úlohou je hledání systémů mincí, kde průměrný počet mincí použitých v optimálních reprezentacích je minimální. Zavedeme takové systémy formálně.

**Definice 2.** *Mějme* $D, N \in \mathbb{N}$. *Pak systém* $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, *kde* $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, *nazveme* optimální (pro platbu)*, jestliže nabývá minimální hodnoty výraz (v tabulkách ho označíme* $P(D, N)$*)* [4]*:*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\textit{počet mincí v optimální reprezentaci } n \textit{ pro mince } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

**Poznámka 2.** *Právě fakt, že pro čtyři mince a částky* $1-100$ *obsahuje optimální systém mince v hodnotách* $1, 5, 18, 25$ *(viz tabulka 1), vysvětluje název článku J. Shallita a kol.: What this country needs is an* $18$¢ *piece [4]. V americkém systému centů v hodnotách* $1, 5, 10, 25$ *by stačilo pro zajištění optimality nahradit desetník hodnotou* $18$¢. *Dá se ale očekávat, že k tomu nikdo jiný než matematici nebude svolný.*

Hledat optimální reprezentace částek není obvykle jednoduchá úloha. K její složitosti se zanedlouho dostaneme. Představme nyní typ reprezentací, které se hledají snadno.

[3] Říkáme, že posloupnost $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ je lexikograficky větší než $(b_D, \ldots, b_2, b_1)$, pokud jsou různé a nejvyšší index $j$, kde se liší, splňuje $a_j > b_j$.

[4] Čtenáři se může zdát nelogické, proč reprezentujeme částky až do hodnoty $N$, tedy do hodnoty nejnižší bankovky včetně, místo aby poslední částka byla $N - 1$. Vysvětlení je jednoduché: při počítání průměrů je hezčí dělit hodnotou 100 než hodnotou 99.

| počet mincí $D$ | hodnoty | $P(D, 100)$ |
|---|---|---|
| 3 | 1,12,19 | 5,21 |
| 4 | 1,5,18,25 | 3,93 |
| 5 | 1,5,16,23,33 | 3,33 |
| 6 | 1,2,7,19,29,33 | 3,01 |

Tabulka 1: Optimální systémy pro platbu částek $1 - 100$ ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané programem v Javě.

**Definice 3.** *Mějme $D, N \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$ a $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Reprezentaci $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ nazveme* hladovou reprezentací $n$ (při platbě)*, pokud je získaná hladovým algoritmem. Tedy v prvním kroku klademe $a_D := k$, kde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n - ke_D \geq 0$ a $n - ke_D$ je minimální. Pokud $n = a_D e_D$, pak jsme nalezli hladovou reprezentaci. Jinak podobně pokračujeme pro kladnou částku $n - a_D e_D$. Tedy ve druhém kroku klademe $a_{D-1} := j$, kde $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n - a_D e_D - j e_{D-1} \geq 0$ a $n - a_D e_D - j e_{D-1}$ je minimální. Analogicky postupujeme dále.*

**Poznámka 3.** *Hladová reprezentace je vždy jediná. Z hladového algoritmu je vidět, že hladová reprezentace je lexikograficky největší ze všech reprezentací.*

**Příklad 2.** *Uvažujeme-li české koruny, pak hladovým algoritmem dostaneme $30 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10$, tj. hladová reprezentace je rovna $(0, 1, 1, 0, 0, 0)$ a splývá s optimální reprezentací. Tato situace nastává pro všechny částky.*

*V jiných systémech mincí ale nemusí být optimální a hladová reprezentace každé částky stejná. Například pro optimální systém čtyř mincí $e_1 = 1, e_2 = 5, e_3 = 18, e_4 = 25$ máme $36 = 2 \cdot 18 = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1$, přičemž první reprezentace $(0, 2, 0, 0)$ je optimální a druhá $(1, 0, 2, 1)$ je hladová.*

Opět se nabízí úloha hledat systémy mincí, kde průměrný počet mincí použitých v hladových reprezentacích je minimální. Definujme takové systémy formálně.

**Definice 4.** *Mějme $D, N \in \mathbb{N}$. Pak systém $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, nazveme* optimální hladový (pro platbu)*, jestliže nabývá minimální hodnoty výraz:*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\textit{počet mincí v hladové reprezentaci } n \textit{ pro mince } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

Zajímavou úlohou je zkoumat systémy mincí, v nichž splývá optimální a hladová reprezentace každé částky. V příkladu 2 jsme zmiňovaly, že pro české koruny tomu tak je, ale uváděly jsme zároveň příklad systému, kde tomu tak není. V dalším textu představíme Pearsonův algoritmus, který umožňuje tuto úlohu pro daný systém efektivně řešit. Právě tento algoritmus nám umožnil prozkoumat chování reálných systémů mincí. Vyšetřovaly jsme systémy mincí celkem

| počet mincí $D$ | hodnoty | $P(D, 100)$ |
|---|---|---|
| 3 | 1,5,22 | 5,34 |
| 3 | 1,5,23 | 5,34 |
| 4 | 1,3,11,37 | 4,16 |
| 4 | 1,3,11,38 | 4,16 |
| 5 | 1,3,7,18,45 | 3,50 |
| 6 | 1,2,5,11,25,62 | 3,17 |
| 6 | 1,2,5,11,25,63 | 3,17 |
| 6 | 1,2,5,11,25,64 | 3,17 |
| 6 | 1,2,5,13,29,64 | 3,17 |
| 6 | 1,2,5,13,29,65 | 3,17 |
| 6 | 1,2,5,13,29,66 | 3,17 |

Tabulka 2: Optimální hladové systémy pro platbu částek $1 - 100$ ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané programem v Javě. Žádný ze systémů není zároveň optimální.

195 států (těch, které USA uznávají za nezávislé státy) a zdá se, že podmínka, aby optimální reprezentace šlo počítat hladovým algoritmem, tj. aby optimální a hladové reprezentace všech částek splývaly, hraje důležitou roli při volbě systémů mincí. K neshodě optimálních a hladových reprezentací dochází pouze pro:

- západoafrický frank (Benin, Burkina Faso, Pobřeží slonoviny),
- jamajský dolar,
- malgašský ariar (Madagaskar),
- somoni (Tádžikistán).

Neshodu způsobuje navíc vždy fakt, že nejmenší mince mají hodnoty $1, 10, 25$, protože pak platí např.:

$$30 = 3 \cdot 10 = 1 \cdot 25 + 5 \cdot 1,$$

přičemž první reprezentace je optimální a druhá je hladová.

## 1.1 Složitost některých platebních problémů

Hledat optimální reprezentace a optimální systémy mincí je časově náročná úloha. O složitosti je známo následující (detaily jsou k nalezení v [4]):

**Otázka**: Mějme $D, N \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$ a $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Jak těžké je najít optimální reprezentaci $n$?
**Odpověď**: Není znám algoritmus, který by prováděl polynomiálně mnoho aritmetických operací v $D$ s čísly velikosti $\mathcal{O}(e_D)$.

**Otázka**: Mějme $D, N \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$ a $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Jak těžké je rozhodnout, zda je stejná optimální a hladová reprezentace $n$?
**Odpověď**: Není znám algoritmus, který by prováděl polynomiálně mnoho aritmetických operací v $D$ s čísly velikosti $\mathcal{O}(e_D)$.

**Otázka**: Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$. Jak těžké je zjistit, zda je stejná optimální a hladová reprezentace každé částky $n \in \mathbb{N}$?
**Odpověď (překvapivě!)**: Existuje Pearsonův algoritmus, který provádí $\mathcal{O}(D^3)$ aritmetických operací s čísly velikosti $\mathcal{O}(e_D)$. Popišme si stručně, jak Pearsonův algoritmus [5] funguje:

- Pokud nesplývá pro každou částku optimální a hladová reprezentace, pak existují $i, j \in \mathbb{N}$, kde $1 \leq j \leq i < D$, taková, že optimální reprezentace nejmenšího protipříkladu je tvaru:

$$\begin{aligned} n &= (a_j+1)e_j + a_{j+1}e_{j+1} + \ldots + a_i e_i \quad &\text{pro } j < i, \\ n &= (a_j+1)e_j &\text{pro } j = i, \end{aligned} \tag{1}$$

  kde hladová reprezentace $e_{i+1} - 1 = \sum_{k=1}^{i} a_k e_k$.

- Testujeme tedy všechna $i, j$ připadající v úvahu a hledáme nejmenší $n$ ve tvaru (1), pro které počet mincí v hladové reprezentaci je větší než počet mincí v reprezentaci (1), tj. než $(a_j + 1) + a_{j+1} + \ldots + a_i$. Pokud takové $n$ najdeme, pak jde o nejmenší částku, jejíž optimální a hladová reprezentace nesplývá. Pokud takové $n$ nenajdeme, pak splývají optimální a hladové reprezentace všech částek.

**Příklad 3.** *V příkladu 2 jsme ukazovaly, že optimální systém čtyř mincí* $e_1 = 1, e_2 = 5, e_3 = 18, e_4 = 25$ *nesplňuje, že by splývala optimální a hladová reprezentace každé částky. Konkrétně jsme jako protipříklad uváděly částku* 36 *centů. Nyní vyšetříme Pearsonovým algoritmem, zda je tento protipříklad minimální.*

*Máme* $1 \leq j \leq i < 4$, *tedy je třeba uvažovat uspořádané dvojice* $(j, i) \in \{(1,1), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), (3,3)\}$. *Kandidáti na protipříklad (vlevo částka n, vpravo eventuální optimální reprezentace) jsou pak:*

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \cdot 1, \\ 18 &= 3 \cdot 1 + 3 \cdot 5, \\ 22 &= 2 \cdot 1 + 4 \cdot 5, \\ 25 &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 18, \\ 29 &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 18, \\ 42 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 18. \end{aligned}$$

*Pouze v případě částky* 29 *používá hladová reprezentace více mincí než reprezentace z výše uvedeného seznamu kandidátů. Hladová reprezentace je totiž rovna* $29 = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 25$, *tedy používá pět mincí, zatímco reprezentace* $29 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 18$ *používá čtyři mince a je optimální. Částka* 29 *je tudíž nejmenší částkou, pro niž hladová a optimální reprezentace nesplývají.*

**Příklad 4.** *Ukažme si využití Pearsonova algoritmu k zodpovězení otázky, zda splývají optimální a hladové reprezentace všech částek pro systém mincí v hodnotách* $1, b, b^2, \ldots, b^{D-1}$*, kde* $b > 1$*. Podle Pearsonova algoritmu, pokud by existovala částka, pro niž jsou různé optimální a hladová reprezentace, pak by nejmenší takový protipříklad měl tvar:*

$$\begin{array}{rcll} n & = & be_j + (b-1)e_{j+1} + \ldots + (b-1)e_i & \textit{pro } j < i, \\ n & = & be_j & \textit{pro } j = i, \end{array} \qquad (2)$$

*protože hladová reprezentace* $e_{i+1} - 1 = b^i - 1 = \sum_{k=0}^{i-1}(b-1)b^k = \sum_{k=1}^{i}(b-1)e_k$*. Není těžké si rozmyslet, že* $n = e_{i+1}$*. Odtud ale plyne, že hladová (i optimální) reprezentace* $n$ *obsahuje jedinou minci, a to* $e_{i+1}$*, což je méně než* $b + (b-1)(i-j)$ *(počet mincí v reprezentaci* (2)*). Proto optimální i hladové reprezentace všech částek splývají.*

## 2 Směna

Obvyklým problémem při placení mincemi je také směna, kdy připouštíme i možnost vracení.

**Definice 5.** *Mějme* $D \in \mathbb{N}$*,* $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$*, kde* $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$*, dále* $N \in \mathbb{N}$ *a* $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$*. Pokud* $n = \sum_{i=1}^{D} a_i e_i$*, kde* $a_i \in \mathbb{Z}$*, pak* $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ *nazveme* reprezentací $n$ (při směně)*. Říkáme, že tato reprezentace je* optimální*, pokud* $\sum_{i=1}^{D} |a_i|$ *je minimální mezi všemi reprezentacemi částky* $n$*.*

**Příklad 5.** *Optimální reprezentace dané částky při směně používá samozřejmě méně nebo stejně mincí jako optimální reprezentace této částky při platbě. Např. pro české koruny máme:*

$$8 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 10 + (-1) \cdot 2,$$

*přičemž první reprezentace je optimální při platbě a potřebuje tři mince a druhá je optimální při směně a potřebuje jen dvě mince.*

*Jistě opět není optimální reprezentace jednoznačná. Jednak může nejednoznačnost plynout už z nejednoznačnosti při platbě. Navíc může nejednoznačnost vzniknout připuštěním širší množiny koeficientů. Např. pro české mince je optimální reprezentace každé částky při platbě jednoznačná, ale optimální reprezentace částky* 15 *při směně má dvě možné podoby:*

$$15 = 1 \cdot 20 + (-1) \cdot 5 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5.$$

*Navíc už není jasné, proč upřednostnit mezi všemi optimálními reprezentacemi lexikograficky největší. Proč by např. pro mince* $1, 2, 98, 100$ *měla mít přednost reprezentace* $2 = 1 \cdot 100 + (-1) \cdot 98$ *před* $2 = 2 \cdot 1$*? Poznamenejme, že pro optimální i hladovou reprezentaci při platbě platí tvrzení [5]: Pokud* $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ *a* $(b_D, \ldots, b_2, b_1)$ *jsou posloupnosti s členy z* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *a zároveň* $a_i \geq b_i$ *pro každé*

| počet mincí $D$ | hodnoty | $P(D, 100)$ |
|---|---|---|
| 3 | 1,18,25 | 4,01 |
| 3 | 1,20,28 | 4,01 |
| 4 | 1,21,30,35 | 3,16 |
| 5 | 1,11,34,40,49 | 2,77 |
| 5 | 1,26,30,40,47 | 2,77 |
| 6 | 1,5,26,34,45,48 | 2,53 |
| 6 | 1,5,26,37,46,49 | 2,53 |

Tabulka 3: Optimální systémy pro směnu částek $1 - 100$ ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané programem v Javě.

*$i \in \{1, 2, \ldots, D\}$, potom platí implikace: je-li $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ optimální, resp. hladová reprezentace, potom $(b_D, \ldots, b_2, b_1)$ je také optimální, resp. hladová reprezentace. Tato vlastnost se při směně nezachovává a není ani známá nějaká jí podobná.*

Analogicky jako v případě platby nás mohou zajímat systémy mincí, kde průměrný počet mincí použitých v optimálních reprezentacích je minimální.

**Definice 6.** *Mějme $D, N \in \mathbb{N}$. Pak systém $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, nazveme* optimální (pro směnu)*, jestliže nabývá minimální hodnoty výraz:*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\textit{počet mincí v optimální reprezentaci } n \textit{ pro mince } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

Opět platí, že pro hledání optimální reprezentace nemáme k dispozici efektivní algoritmus, proto se pokusíme najít jednoduchou reprezentaci, která se nabízí jako analogie hladové reprezentace.

**Definice 7.** *Mějme $D, N \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$ a $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Reprezentaci $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ nazveme* hladovou reprezentací $n$ (při směně)*, pokud je získaná jistým zobecněným hladovým algoritmem, kdy v každém kroku bereme nejbližší větší či menší minci. Tedy v prvním kroku najdeme $j \in \{1, \ldots, D-1\}$ tak, že $e_j \leq n \leq e_{j+1}$. Pokud $n - e_j \leq e_{j+1} - n$, pak píšeme $n = e_j + z$ a zbytek $z$ reprezentujeme dále analogicky (dokud není nulový). Pokud $n - e_j \geq e_{j+1} - n$, pak píšeme $n = e_{j+1} - z$ a zbytek $z$ reprezentujeme dále analogicky (dokud není nulový).*

**Příklad 6.** *Hladová reprezentace při směně už nemusí být jednoznačná. Uvažujeme-li například české koruny, pak hladové reprezentace částky 35 jsou hned čtyři:*

$$\begin{aligned} 35 &= 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5, \\ 35 &= 2 \cdot 20 + (-1) \cdot 5, \\ 35 &= 1 \cdot 50 + (-1) \cdot 10 + (-1) \cdot 5, \\ 35 &= 1 \cdot 50 + (-1) \cdot 20 + 1 \cdot 5. \end{aligned}$$

*Čtenář si ale snadno dokáže (třeba pomocí indukce), že pro danou částku obsahuje každá hladová reprezentace stejný počet mincí.*

**Poznámka 4.** *Zatímco každá reprezentace při platbě je zároveň reprezentací při směně, a tudíž optimální reprezentace dané částky při směně používá maximálně tolik mincí, kolik optimální reprezentace této částky při platbě, pro hladovou reprezentaci už toto není pravda. Existují systémy mincí takové, že některé částky obsahují v hladové reprezentaci při směně více mincí než v hladové reprezentaci při platbě.*

*Např. pro systém mincí* $e_1 = 1, e_2 = 3, e_3 = 5, e_4 = 10$ *máme:*

$$\begin{aligned} 8 &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3, \\ 8 &= 1 \cdot 10 + (-2) \cdot 1 = 1 \cdot 10 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1, \end{aligned}$$

*přičemž první reprezentace obsahuje dvě mince a je hladová při platbě a druhé dvě obsahují tři mince a jsou hladové při směně.*

Opět jsme vyšetřovaly systémy mincí, kde průměrný počet mincí použitý v hladových reprezentacích při směně je minimální.

**Definice 8.** *Mějme* $D, N \in \mathbb{N}$. *Pak systém* $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, *kde* $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, *nazveme* optimální hladový (pro směnu)*, jestliže nabývá minimální hodnoty výraz:*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\textit{počet mincí v hladové reprezentaci } n \textit{ pro mince } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

Podobně jako v případě platby by nás mohlo zajímat, kdy splývá optimální a hladová reprezentace při směně. Protože nyní není ani optimální ani hladová reprezentace dána jednoznačně, je nejprve třeba upřesnit, co budeme vlastně vyšetřovat. Uvažujme $D, N \in \mathbb{N}$, systém $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, a částku $n \in \{1, \ldots, N\}$. Shrňme si, co víme, a závěrem z poznatků odvodíme otázky ke zkoumání.

- Je zřejmé z definice 6, že každá optimální reprezentace $n$ při směně obsahuje stejný počet mincí, označme jej $K$.
- Zmiňovaly jsme, že každá hladová reprezentace $n$ při směně obsahuje stejný počet mincí, označme jej $M$.
- Pokud $K = M$, potom každá hladová reprezentace $n$ je zároveň optimální.
- Pokud $K < M$, potom žádná hladová reprezentace $n$ není optimální.

Nyní můžeme zkoumat, který z následujících případů pro částku $n$ platí:

1. $K = M$ a existuje optimální reprezentace, která není hladová (řekneme, že optimální a hladové reprezentace částky $n$ *splývají částečně*).

| počet mincí $D$ | hodnoty | $P(D, 100)$ |
|---|---|---|
| 3 | 1,6,33 | 4,18 |
| 4 | 1,4,13,48 | 3,34 |
| 4 | 1,4,15,48 | 3,34 |
| 5 | 1,2,7,22,71 | 2,96 |
| 5 | 1,2,7,23,74 | 2,96 |
| 5 | 1,2,7,23,75 | 2,96 |
| 6 | 1,2,7,12,41,70 (71, 80, 81) | 2,73 |
| 6 | 1,2,7,12,42,81 | 2,73 |
| 6 | 1,2,7,12,51,80 (81) | 2,73 |
| 6 | 1,2,7,12,52,81 | 2,73 |
| 6 | 1,2,7,13,44,85 | 2,73 |
| 6 | 1,2,7,13,54,85 | 2,73 |

Tabulka 4: Optimální hladové systémy pro směnu částek $1 - 100$ ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané programem v Javě. Když existuje více optimálních hladových systémů a liší se pouze v nejvyšší minci, uvádíme hodnotu různých variant nejvyšší mince v závorce.

2. $K = M$ a navíc množina optimálních reprezentací a množina hladových reprezentací jsou stejné (optimální a hladové reprezentace částky $n$ *splývají zcela*).

3. $K < M$ (optimální a hladové reprezentace částky $n$ *nesplývají*).

**Příklad 7.** *Uvažujme mince* $e_1 = 1, e_2 = 3, e_3 = 5, e_4 = 10$. *Potom* $8 = 1{\cdot}5 + 1{\cdot}3$ *je optimální reprezentace při směně, která není hladová při směně. Dále* $8 = 1{\cdot}10 + (-2){\cdot}1$ *je hladová reprezentace při směně, která není optimální při směně. Proto v takovém systému nesplývají reprezentace částek, nastává tedy případ 3.*

**Příklad 8.** *Uvažujme mince* $e_1 = 1, e_2 = 2, e_3 = 3, e_4 = 5, e_5 = 8$. *Potom* $7 = 1{\cdot}5 + 1{\cdot}2$ *je optimální reprezentace při směně, která není hladová při směně. Dále* $7 = 1 \cdot 8 + (-1) \cdot 1$ *je hladová reprezentace při směně, která je zároveň optimální při směně. Proto v takovém systému nesplývají zcela reprezentace částek. Nastává tudíž buď případ 1, nebo 3.*

## 2.1 Otevřené problémy pro směnu

Článek zakončíme shrnutím otázek týkajících se směny, na něž nám nejsou známy odpovědi.

1. Existuje analogie Pearsonova algoritmu pro směnu? Tedy existuje efektivní algoritmus, který pro daný systém rozhodne, zda splývají optimální a hladové reprezentace všech částek (ať už zcela, nebo částečně)?

2. Splývá optimální a hladová reprezentace každé částky při směně:

(a) v systému mincí $1, b, b^2, \ldots, b^{D-1}$, kde $b > 1$ (ať už zcela, nebo částečně)? Algoritmus pro hledání jedné optimální reprezentace každé částky je známý [3].

(b) v systému mincí v hodnotách Fibonacciho čísel $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ (a to částečně, protože zcela nesplývají, viz příklad 8)? Algoritmus pro hledání jedné optimální reprezentace každé částky je známý [2].

3. Lze definovat hladovou reprezentaci při směně lépe? Tedy tak, aby vždy používala menší nebo stejný počet mincí jako hladová reprezentace při platbě dané částky.

## Reference


[1] Balková Ľ., Šťastná A., *Jsou české mince optimální?*, Rozhledy matematicko–fyzikální *90 (1–2)* (2015), 14–22.

[2] Heuberger C., *Minimal expansions in redundant number systems: Fibonacci bases and greedy algorithms*, Periodica Mathematica Hungarica *49* (2004), 65–89.

[3] Heuberger C., Prodinger H., *On minimal expansions in redundant number systems: Algorithms and quantitative analysis*, Computing *66* (2001), 377–393.

[4] Kleber M., Shallit J., Vakil R., *What this country needs is an* 18¢ *piece*, Mathematical Intelligencer *25* (2003), 20–23.

[5] Pearson D., *A polynomial-time algorithm for the change-making problem*, Operations Research Letters *33 (3)* (2005), 231–234.



doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D.
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze
Trojanova 13
Praha 2, 120 00
lubomira.dvorakova@fjfi.cvut.cz

Marie Dohnalová
gymnázium EDUCAnet Praha
Roztylská 1
Praha 4, 14000
marie.dohnalova21@gmail.com