

# Nahlédnutí pod pokličku kombinatoriky na nekonečných slovech

Lubomíra Balková, Praha

## Abstrakt

Článek přiblíží kombinatoriku na nekonečných slovech ve třech kapitolách. V první budeme pátrat po počátcích této disciplíny. Ve druhé se zaměříme na palindromy, tedy slova, která se čtou stejně zepředu a pozpátku, a jsou proto oblíbenou slovní hříčkou. My se ovšem od palindromů v přirozených jazycích přesuneme k palindromům v nekonečných slovech a objasníme, jak moc ‘saturována’ palindromy mohou nekonečná slova být. V poslední kapitole zmíníme aplikaci kombinatoriky na slovech v matematické fyzice. Konkrétně ukážeme, jak lze znalosti palindromů v nekonečných slovech využít při vyšetřování spekter diskrétních Schrödingerových operátorů.

## 1 Zrod kombinatoriky na nekonečných slovech

Za zrod kombinatoriky na nekonečných slovech bývají považovány dva momenty. Podle toho, který z nich si vybereme, jde o disciplínu starou 100 či 70 let.

### 1.1 Axel Thue

Norský kombinatorik A. Thue, známý svými výsledky v diofantických aproximacích, publikoval v roce 1906 v málo známém norském časopisu [14] odpověď na následující otázku: **Otázka 1:** „Existuje binární nekonečné slovo, které neobsahuje třetí mocniny?“ Nejlépe asi vysvětlíme, co je třetí mocnina v nekonečném slově, na konkrétním příkladu. Představme si, že máme nekonečné slovo, tedy nekonečnou posloupnost, obsahující pouze dva symboly  $a$ ,  $b$ , které je pro jednoduchost periodické:

$$abbabbabbabbabbabbabb \dots, \quad (1)$$

jde tedy o nekonečné opakování řetězce  $abb$ , což obvykle značíme  $(abb)^\omega$ . Takové slovo obsahuje třetí mocninu, protože například řetězec  $abb$  se v něm vyskytuje bezprostředně 3krát po sobě:

$$\underline{abbabbabbabbabbabbabb} \dots,$$

**Otázka 2:** „Existuje ternární nekonečné slovo, které neobsahuje čtverce?“ Čtvercem zde myslíme dvojnásobné opakování nějakého řetězce. Obě tyto otázky zodpověděl A. Thue ve svém článku kladně. Navíc vysvětlil, že neměl na mysli žádnou konkrétní aplikaci, nýbrž tyto otázky studoval, protože se mu zdály samy o sobě dostatečně zajímavé. Tímto tvrzením dnes rádi hájí svou práci teoretičtí kombinatorici na nekonečných slovech.

#### 1.1.1 Slovník kombinatoriky na slovech

Abychom si mohli ukázat Thueovu konstrukci, potřebujeme nejprve zavést několik pojmů. *Abecedou*  $\mathcal{A}$  rozumíme konečnou množinu symbolů, říkáme jim *písmena*. *Slovem*  $w$  nazýváme konečnou posloupnost písmen. Jeho *délkou* rozumíme počet písmen, která obsahuje, a označíme ji  $|w|$ .  $\mathcal{A}^*$  značíme množinu všech konečných slov nad abecedou  $\mathcal{A}$  s přidáním prázdného slova  $\varepsilon$  (jde o neutrální prvek vůči operaci řetězení). Množina  $\mathcal{A}^*$  vybavená operací řetězení tvoří monoid. Pod *nekonečným slovem*  $\mathbf{u}$  nad abecedou  $\mathcal{A}$  pak rozumíme nekonečnou posloupnost písmen z  $\mathcal{A}$ , v níž se každé písmeno z  $\mathcal{A}$  skutečně vyskytuje, tj.  $\mathbf{u} = u_0u_1u_2\dots$ , kde  $u_i \in \mathcal{A}$ .

Konečné slovo  $w$  nazveme *faktorem* (*pod slovem*) konečného či nekonečného slova  $u$ , pokud existuje slovo  $v$  a slovo  $t$  (konečné či nekonečné) tak, že  $u = vwt$ . Je-li  $v$  prázdné slovo, nazveme  $w$  *prefixem* slova  $u$ . Podobně pokud je  $t = \varepsilon$ , říkáme, že  $w$  je *suffix* slova  $u$ . Jazykem  $\mathcal{L}(\mathbf{u})$  nekonečného slova  $\mathbf{u}$  nazýváme množinu všech faktorů tohoto slova. Nechť  $n$  je přirozené číslo, symbolem  $\mathcal{L}_n(\mathbf{u})$  značíme množinu všech faktorů délky  $n$  slova  $\mathbf{u}$ . Často pracujeme s morfismy  $\varphi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ . (Morfismus je samozřejmě jednoznačně dán, pokud známe obrazy písmen abecedy  $\mathcal{A}$ .) Jejich působení lze přirozenou cestou rozšířit i na nekonečná slova:

$$\varphi(u_0u_1u_2\dots) := \varphi(u_0)\varphi(u_1)\varphi(u_2)\dots$$

Pokud nekonečné slovo  $\mathbf{u}$  splňuje  $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ , nazveme jej *pevným bodem* morfismu  $\varphi$ .

Ilustrujme uvedené pojmy na slově  $\mathbf{u} = (abb)^\omega$  z našeho příkladu (1). Abeceda je  $\mathcal{A} = \{a, b\}$ . Slovo  $babb$  je faktorem délky 4 slova  $\mathbf{u}$ . Slovo  $abbabba$  je prefixem délky 7 slova  $\mathbf{u}$ . Snadno nahlédneme, že množina všech faktorů délky 5 slova  $\mathbf{u}$  je  $\mathcal{L}_5(\mathbf{u}) = \{abbab, bbabb, babba\}$ . Definujeme-li morfismus  $\varphi(a) := abb$  a  $\varphi(b) := abb$ , pak je zřejmé  $\mathbf{u}$  pevným bodem  $\varphi$ .

### 1.1.2 Thue-Morseovo slovo

Thue-Morseovo slovo, které A. Thue uvedl jako příklad nekonečného binárního slova bez třetích mocnin nad abecedou  $\{0, 1\}$ , lze zkonstruovat několika ekvivalentními způsoby.

**Definice 1.** *Thue-Morseovo slovo je nekonečná posloupnost  $\mathbf{u}_{TM} = u_0u_1u_2\dots$  definovaná rekurentně*

$$u_0 := 0, \quad u_{2n} := u_n \quad a \quad u_{2n+1} := 1 - u_n \quad \text{pro } n \geq 0.$$

Prefix Thue-Morseova slova délky 68 je

011010011001011010010110011010011001101001100110100101101001100101101001...

**Věta 1.** *Označme  $s_2(n)$  součet cifer v binárním rozvoji čísla  $n \in \mathbb{N}$ . Pak Thue-Morseovo slovo  $\mathbf{u}_{TM} = u_0u_1u_2\dots$ , kde*

$$u_n = s_2(n) \pmod{2}.$$

**Věta 2.** *Definujme morfismus  $\varphi_{TM}: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  jako*

$$\varphi_{TM}(0) := 01 \quad a \quad \varphi_{TM}(1) := 10.$$

*Pak Thue-Morseovo slovo  $\mathbf{u}_{TM}$  je pevným bodem tohoto morfismu začínajícím písmenem 0.*

Prozradme, že morfismus  $\varphi_{TM}$  má dva pevné body. Druhý začíná písmenem 1 a z Thue-Morseova slova jej získáme tak, že v  $\mathbf{u}_{TM}$  mezi sebou zaměníme nuly a jedničky.

A. Thue dále zkonstruoval nekonečné slovo  $\mathbf{v}$  nad abecedou  $\{0, 1, 2\}$ , které neobsahuje čtverce. Pro  $n \geq 1$  označil jako  $v_n$  počet jedniček mezi  $n$ -tým a  $(n+1)$ -vým výskytem nuly v Thue-Morseově slově. Hledané slovo pak získal jako  $\mathbf{v} = v_1v_2v_3\dots$ . Tedy  $\mathbf{u}_{TM} = 0 \underbrace{11}_2 0 \underbrace{1}_1 0 \underbrace{0}_0 \underbrace{11}_2 0 \underbrace{0}_0 \underbrace{1}_1 0 \underbrace{11}_2 0 \dots$

Pro přesnost je třeba zmínit, že Thue-Morseovo slovo objevil již v roce 1851 Eugène Prouhet [12] při studiu úlohy, které se dnes říká Prouhet-Tarry-Escottův problém. Jedná se v ní o rozdělení čísel  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  pro dané  $k \in \mathbb{N}$  do dvou množin tak, aby součet prvků, součet jejich kvadrátů až součet jejich  $k$ -tých mocnin

byl stejný v obou množinách. E. Prouhet pomocí Thue-Morseova slova (také se mu proto někdy říká Prouhet-Thue-Morseovo slovo) našel takové rozdělení čísel  $0, 1, \dots, (2^{k+1}-1)$  pro libovolně velké  $k$ . Například pro  $k = 3$  stačí čísla  $0, 1, 2, \dots, 15$  rozdělit do dvou množin tak, že do první množiny napíšeme pozice výskytů 0 v  $\mathbf{u}_{TM}$  v prefixu délky 16 a do druhé množiny pozice výskytů 1 v  $\mathbf{u}_{TM}$  v prefixu délky 16, tj.

$$M_1 = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}, \quad M_2 = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}.$$

Snadno zkontrolujeme, že:

$$\begin{aligned} 0^1+3^1+5^1+6^1+9^1+10^1+12^1+15^1 &= 1^1+2^1+4^1+7^1+8^1+11^1+13^1+14^1, \\ 0^2+3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2 &= 1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2, \\ 0^3+3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3 &= 1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3. \end{aligned}$$

Jelikož ani Prouhetův ani Thueův výsledek nevesly ve všeobecnou známost, bylo Thue-Morseovo slovo znovuobjeveno v roce 1921 Marstonem Morsem při studiu diferenciální geometrie. A nebylo to naposledy, co se  $\mathbf{u}_{TM}$  objevilo v naprosto odlišné oblasti, dá se říci, že je všudypřítomné [1]. Dokonce holandský šachový velmistr Max Euwe jej nezávisle objevil při teoretickém hraní nekonečné šachové partie, tzv. německých šachů [8].

## 1.2 Gustav A. Hedlund a Marston Morse

Ještě častěji bývá za zrod kombinatoriky na nekonečných slovech považován slavný článek G. A. Hedlunda a již zmiňovaného M. Morse z roku 1940 [11]. Studovali tehdy nulové body řešení diferenciální rovnice Sturm-Liouvilleova typu a právě na počet francouzského matematika J. C. F. Sturm pojmenovali nekonečná slova, na něž při studiu narazili. Abychom si mohli sturmovská slova popsat, musíme nejprve vědět, co je faktorová komplexita nekonečného slova  $\mathbf{u}$ . *Faktorovou komplexitou* slova  $\mathbf{u}$  nazveme funkci  $\mathcal{C} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , která každému  $n$  přiřadí počet faktorů délky  $n$  slova  $\mathbf{u}$ , tj.

$$\mathcal{C}(n) := \#\mathcal{L}_n(\mathbf{u}).$$

G. A. Hedlund a M. Morse si všimli, že ne každá funkce  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je faktorovou komplexitou nějakého nekonečného slova. Nekonečná slova jsou posléze periodická, tj. mají tvar  $vw^\omega$ , kde  $v, w$  jsou konečná slova nad danou abecedou a  $\omega$  značí nekonečné opakování, tedy a jen tehdy, je-li jejich faktorová komplexita posléze konstantní. (U slova z (1) můžete zkontrolovat, že  $\mathcal{C}(n) = 3$  pro každé  $n \geq 2$ .) Slovům, která nejsou posléze periodická, říkáme *aperiodická*. Pro aperiodická slova G. A. Hedlund a M. Morse dokázali, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  splňuje jejich faktorová komplexita

$$\mathcal{C}(n) \geq n + 1.$$

Sturmovská slova jsou aperiodická slova s nejnižší možnou faktorovou komplexitou.

**Definice 2.** *Nekonečné slovo  $\mathbf{u}$  se nazývá sturmovské, pokud pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí*

$$\mathcal{C}(n) = n + 1.$$

Je jasné, že sturmovská slova jsou binární, protože  $\mathcal{C}(1) = 2$ . Od jejich zavedení až dodnes je tato třída slov předmětem intenzivního studia. Kromě jejich nízké faktorové komplexity je to jistě i proto, že populární Fibonacciho slovo je jejich zástupcem.

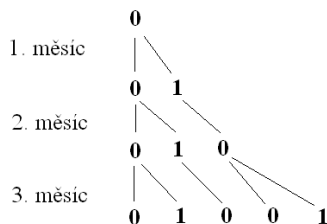
**Definice 3.** *Pevný bod morfismu  $\varphi_F : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  definovaného jako  $\varphi_F(0) := 01$ ,  $\varphi_F(1) := 0$  nazýváme Fibonacciho slovem  $\mathbf{u}_F$ .*

Jak takový pevný bod získáme? Aplikujeme substituci opakovaně na 0:

$$\begin{aligned}
 \varphi_F^0(0) &= 0 \\
 \varphi_F^1(0) &= 01 \\
 \varphi_F^2(0) &= 010 \\
 \varphi_F^3(0) &= 01001 \\
 \varphi_F^4(0) &= 01001010
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Jelikož každá iterace je prefixem následující iterace a jejich délky ostře rostou, lze najít nekonečné slovo, které má pro každé  $n$  prefix  $\varphi_F^n(0)$ . Právě toto slovo je hledaným (rozmyslete si, že jediným) pevným bodem  $\mathbf{u}_F$ . Symbolicky píšeme  $\mathbf{u}_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_F^n(0)$ . Co se faktorové komplexity týče, snadno zkontrolujeme, že například  $\mathcal{L}_4(\mathbf{u}_F) = \{0100, 1001, 0010, 0101, 1010\}$ , a proto  $\mathcal{C}(4) = 5$ .

Fibonacciho slovo je spjata se známými Fibonacciho čísly. Připomeňme, že Fibonacciho čísla byla zavedena Leonardem z Pisy v řešení úlohy zabývající se růstem populace králíků. Dospělý pár (označíme jej 0) měl vždy po měsíci pár mláďat (ten označíme 1) a pár mláďat po měsíci dospěl. Fibonacci se zajímal, kolik králíků bude populace čítat po  $n$  měsících za předpokladu, že králíci jsou nesmrtelní.



Obrázek 1: Růst populace králíků

Je lehké nahlédnout, že odpověď dává Fibonacciho slovo. Když označíme délky iterací  $F_n := |\varphi_F^n(0)|$ , je jasné, že počet králíků po  $n$  měsících je právě  $F_n$ . Dále snadno ověříme, že  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 2$  a  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ . Není divu, že se konference věnovaná Fibonacciho slovu konala v Turku (Finsko, 2006), kde mají Fibonacciho čísla vyzdoben tovární komín.

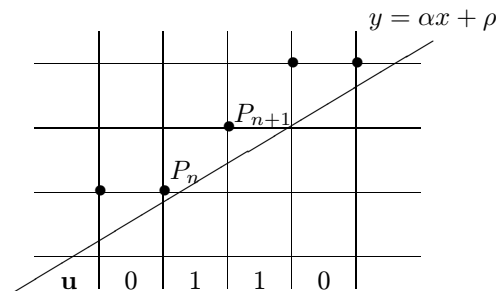


Obrázek 2: ‘Fibonacciho’ komín v Turku

Je pochopitelné, že díky zájmu a intenzivnímu studiu kombinatoriky na nekonečných slovech, které sturmovská slova vzbudila, je dnes známa pěkná řádka ekvivalentních

definic sturmovských slov, ať už pomocí zobecnění jejich geometrických či kombinatorických vlastností. Také se studují zobecnění sturmovských slov na vícepísmenné abecedy. Souhrn známých výsledků najdete v [3]. My zde uvedeme pouze jednu z geometrických definic.

**Věta 3** ([11]). *Množina sturmovských slov splývá s množinou (horních a dolních) mechanických slov s iracionální směrnicí  $\alpha$ . Viz obr. 3.*



Obrázek 3: Konstrukce horního mechanického slova (dolní mechanické slovo se konstruuje analogicky) se směrnicí  $\alpha \in (0, 1)$ . Na posunu  $\rho$  jazyk získaného nekonečného slova nezáleží. V mřížce  $\mathbb{Z}^2$  uvažujeme body o  $x$ -ové souřadnici  $n$ , které jsou nejbližší nad přímkou. Pokud je spojnice takto získaných po sobě jdoucích mřížkových bodů  $P_n$  a  $P_{n+1}$  horizontální, má konstruované nekonečné slovo na  $n$ -tém místě 0, jinak 1.

Kapitulu o sturmovských slovech zakončíme jejich ekvivalentní kombinatorickou definicí, která využívá pojem palindrom a umožní nám tak přejít ke studiu palindromů, což bude náplň druhé kapitoly. *Palindrom* je takové konečné slovo, které se čte stejně zepředu i pozpátku. Např. prefix 010010 Fibonacciho slova je palindrom.

**Věta 4** ([7]). *Nekonečné slovo  $u$  je sturmovské právě tehdy, když  $u$  obsahuje jediný palindrom každé sudé délky a právě dva palindromy každé liché délky.*

## 2 Palindromy pod lupou

Nikoho jistě nepřekvapí, že v přirozených jazycích obzvláště dlouhé palindromy nenajdeme. Nejdelšími palindromy v češtině jsou přičestí typu ‘nepochopen’, ‘nepotopen’, ‘nezasazen’, ‘nezařazen’. V angličtině je nejdelším palindromickým slovem ‘tattarrattat’. Jeho vítězství ovšem není zcela zasloužené, protože nejde o běžné slovo, nýbrž o fantazii Jamese Joyce, který ve svém románu *Odysseus* použil tento neologismus k označení energického poklepání na dveře.

„I was just beginning to yawn with nerves thinking he was trying to make a fool of me when I knew his tattarrattat at the door.“

Zajímavější jsou pak palindromické věty. Palindromy z nich vzniknou, pokud zapomeneme na mezery mezi slovy, případně i na diakritiku. V češtině patří mezi nejznámější palindromické věty:

„Bažantu padá za záda putna žab.“  
 „Jelenovi pivo nelej.“  
 „Kobyła má malý bok.“

Ale zajímavé jsou i palindromy číselné, zvláště když se k nim váže nějaké alespoň částečně doložené vysvětlení. Například s položením základního kamene Karlova mostu je spojován palindrom ze samých lichých čísel 135797531. Muzeum Karlova mostu jej použilo jako své logo. Podle astronoma a filozofa Zdeňka Horského mohl být základní kámen položen 9. července 1357 v 5:31. V tu chvíli prý byla příznivá konstelace Slunce a Saturnu. Palindrom je tedy sestaven z údajů: rok - den - měsíc - hodina - minuty.



Obrázek 4: Logo Muzea Karlova mostu

## 2.1 Palindromy v nekonečných slovech

Ještě mnohem zajímavější je situace týkající se palindromů v nekonečných slovech. Tam už najednou můžeme nacházet palindromy libovolné délky. Ovšem žádná anarchie nevládne ani tady. Nekonečné slovo totiž obsahovat v libovolném faktoru délky  $n$  maximálně  $n + 1$  různých palindromů (včetně prázdného slova, které také za palindrom považujeme).

**Definice 4** ([6]). *Nekonečné slovo  $\mathbf{u}$  nazýváme bohatým na palindromy, pokud v každém svém faktoru  $w$  obsahuje právě  $|w| + 1$  palindromů.*

Je známo, že sturmovská slova jsou bohatá na palindromy. Vezměme libovolný faktor Fibonacciho slova, např. 001010, a ověříme, že obsahuje 7 palindromů. To skutečně platí, neboť všechny jeho palindromické faktory jsou  $\varepsilon$ , 0, 1, 00, 010, 101 a 01010. Ale například Thue-Morseovo slovo bohaté na palindromy není. Prefix 011010011 délky 9 obsahuje pouze 9 palindromů  $\varepsilon$ , 0, 1, 00, 11, 010, 101, 0110, 1001.

Podobně jako šlo měřit složitost nekonečného slova pomocí jeho faktorové komplexity, lze pomocí palindromické komplexity měřit palindromickou rozmanitost. *Palindromickou komplexitou* slova  $\mathbf{u}$  nazveme funkci  $\mathcal{P} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , která každému  $n$  přiřadí počet palindromů délky  $n$  slova  $\mathbf{u}$ , tj.

$$\mathcal{P}(n) := \#\{w \in \mathcal{L}_n(\mathbf{u}) \mid w \text{ je palindrom}\}.$$

Například Fibonacciho slovo obsahuje 2 palindromy délky 3, a to 010, 101. Proto  $\mathcal{P}(3) = 2$ . Dokonce z věty 4 víme, že pro všechna sturmovská slova platí  $\mathcal{P}(2k) = 1$  a  $\mathcal{P}(2k + 1) = 2$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ .

Mezi palindromickou a faktorovou komplexitou byl dokázán pomocí teorie grafů následující vztah.

**Věta 5** ([2]). *Nechť nekonečné slovo obsahuje s každým svým faktorem  $i$  jeho zrcadlový obraz, tj. slovo čtené pozpátku. Pak pro palindromickou a faktorovou komplexitu platí nerovnost:*

$$\mathcal{P}(n + 1) + \mathcal{P}(n) \leq \mathcal{C}(n + 1) - \mathcal{C}(n) + 2 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Všimněme si, že pro sturmovská slova se ve vztahu (3) nabývá rovnost pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Víme totiž, že jejich faktorová komplexita splňuje  $\mathcal{C}(n) = n + 1$  a palindromická komplexita zase splňuje  $\mathcal{P}(2k) = 1$  a  $\mathcal{P}(2k + 1) = 2$ , proto jsou obě strany rovny 3. Pro Thue-Morseovo slovo se rovnost v (3) pro  $n = 3$  nenabývá. Po vyšetření slova totiž zjistíme, že  $\mathcal{P}(3) = 2 = \mathcal{P}(4)$  a  $\mathcal{C}(4) = 10$  a  $\mathcal{C}(3) = 6$ .

Přirozená otázka pak zní, zda slova bohatá na palindromy mají také nejvyšší možnou palindromickou komplexitu. A odpověď je pozitivní.

**Věta 6** ([4]). *Nechť nekonečné slovo  $\mathbf{u}$  obsahuje s každým svým faktorem i jeho zrcadlový obraz. Pak  $\mathbf{u}$  je bohaté na palindromy právě tehdy, když platí:*

$$\mathcal{P}(n+1) + \mathcal{P}(n) = \mathcal{C}(n+1) - \mathcal{C}(n) + 2 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

### 3 Palindromy a diskrétní Schrödingerův operátor

V souvislosti s objevem kvazikrystalů - aperiodických materiálů, které i přes svou aperiodičnost vykazují uspořádání atomů na dlouhou vzdálenost - v 80. letech [13] stoupl zájem o diskrétní Schrödingerovy operátory s aperiodickými potenciály. Charakter spektra takového operátoru souvisí s vodivostí materiálu, jehož atomovou strukturu tento systém modeluje. Aby takový operátor popisoval pohyb elektronu v kvazikrystalickém materiálu, požaduje se, aby operátor měl čistě singulárně spojitě spektrum.

Nechť je  $\mathbf{u}$  nekonečné aperiodické slovo nad abecedou  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ . K takovému slovu přiřadíme množinu všech oboustranně nekonečných slov, která mají stejný jazyk, tj.

$$\Omega_{\mathbf{u}} := \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid \mathcal{L}(\omega) = \mathcal{L}(\mathbf{u})\}$$

K množině  $\Omega_{\mathbf{u}}$  je přidružena rodina diskrétních Schrödingerových operátorů  $H_{\mathbf{u}} = (H_{\omega})_{\omega \in \Omega_{\mathbf{u}}}$ , kde *diskrétní Schrödingerův operátor*  $H_{\omega}$  s potenciálem  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  je definovaný pro každé  $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$  a pro každé  $n \in \mathbb{Z}$  jako

$$H_{\omega}\psi(n) := \psi(n+1) + \psi(n-1) + \omega_n\psi(n).$$

Připomeňme, že  $\ell^2(\mathbb{Z})$  je prostor oboustranně nekonečných posloupností  $(\psi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , pro které platí,  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\psi(n)|^2 < +\infty$ .

Z Kotaniho teorie plyne, že takové operátory mají prázdnou absolutně spojitou část spektra. K tomu, aby se ukázala absence čistě bodového spektra, tedy nepřítomnost vlastních hodnot, jsou známy dvě metody: jedna z nich je založena na zrcadlové symetrii, tedy přítomnosti palindromů ve slově  $\mathbf{u}$ , druhá na translační symetrii, tedy přítomnosti mocnin faktorů slova  $\mathbf{u}$ . Absence čistě bodového spektra může být

- uniformní (to znamená, že všechny operátory v dané rodině  $H_{\mathbf{u}}$  mají prázdné čistě bodové spektrum),
- skoro jistá (na množině  $\Omega_{\mathbf{u}}$  se zavádí míra a vůči ní pak skoro všechny operátory z dané rodiny  $H_{\mathbf{u}}$  mají prázdné čistě bodové spektrum),
- generická (na množině  $\Omega_{\mathbf{u}}$  se zavádí topologie a pro hustou podmnožinu  $\Omega_{\mathbf{u}}$  mají operátory prázdné čistě bodové spektrum).

Přítomnost libovolně dlouhých palindromů v nekonečném slově  $\mathbf{u}$  zajistí generickou absenci čistě bodového spektra [9]. Tzv. silná palindromicita [10] zaručuje dokonce uniformní absenci čistě bodového spektra. Skoro jistá absence vlastních čísel se dá zase studovat pomocí přítomnosti mocnin větších než třetích ve slově  $\mathbf{u}$  [5].

Jak je vidět, kombinatorika na nekonečných slovech, která vznikla jako pouhá matematická hříčka (A. Thue), po sto letech našla konkrétní uplatnění v matematické fyzice. Ve skutečnosti tato aplikace není jediná; struktury kódovatelné nekonečným slovem nad konečnou abecedou se vyskytují v různých dalších oborech, jako je teorie čísel či teorie dynamických systémů, ale i mimo matematiku samou, například v biologii a lingvistice. To už by ovšem byla jiná kapitola.

## Reference

- [1] Allouche, J.-P., Shallit, J.: *The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence*. Sequences and their applications, Proceedings of SETA'98, C. Ding, T. Helleseeth and H. Niederreiter (Eds.)(1999), Springer Verlag, 1-16.
- [2] Baláži, P., Masáková, Z., Pelantová, E.: *Factor versus palindromic complexity of uniformly recurrent infinite words*. Theoret. Comput. Sci. *380* (2007), 266-275.
- [3] Balková, L., Pelantová, E., Starosta, Š., *Sturmian Jungle (or Garden?) on multiliteral alphabets*, ArXiv: 1003.1224 (2010), vyjde v RAIRO - Theor. Inform. Appl.
- [4] Bucci, M., De Luca, A., Glen, A., Zamboni, L. Q.: *A connection between palindromic and factor complexity using return words*. Adv. in Appl. Math *42* (2009), 60–74.
- [5] Damanik, D.: *Singular continuous spectrum for a class of substitution Hamiltonians II.* Lett. Math. Phys. *54* (2000), 25–31.
- [6] Droubay, X., Justin, J., Pirillo, G.: *Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy*. Theoret. Comput. Sci. *255* (2001), 539-553.
- [7] Droubay, X., Pirillo, G.: *Palindromes and Sturmian words*. Theoret. Comput. Sci. *223* (1999), 73-85.
- [8] Euwe, M.: *Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel*. Proc. Konin. Akad. Wetenschappen, Amsterdam *32* (1929), 633-642.
- [9] Hof, A., Knill, O., Simon, B.: *Singular continuous spectrum for palindromic Schrödinger operators*. Comm. Math. Phys. *174* (1995), 149-159.
- [10] Jitomirskaya, S., Simon, B.: *Operators with singular continuous spectrum: III. Almost periodic Schrödinger operators*. Commun. Math. Phys. *165* (1994), 201–205.
- [11] Morse, M., Hedlund, G. A.: *Symbolic dynamics II - Sturmian trajectories*. Amer. J. Math. *62* (1940), 1-42.
- [12] Prouhet, E.: *Mémoire sur quelques relations entre les puissences des nombres*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér.I *33* (1851), 225.
- [13] Shechtman, D., Blech, I., Gratias, D., Cahn, J. W.: *Metallic phase with long range orientational order and no translational symmetry*. Phys. Rev. Lett. *53* (1984), 1951-1953.
- [14] Thue, A.: *Über unendliche Zeichenreihen*. Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl. *7* (1906), 1-22.

Ing. L'ubomíra Balková, Ph.D.  
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze  
Trojanova 13, Praha 2 120 00  
lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz