

# Jsou české mince optimální?

Lubomíra Balková\*, Aneta Šťastná†

## Abstrakt

Už jste se někdy zamysleli nad tím, v čem je výhoda českých mincí? A je vůbec nějaká? Je pravda, že zaplatíme libovolnou částku relativně malým počtem mincí? Dostaneme optimální platbu pomocí tzv. hladového algoritmu? A nehodilo by se přidat mezi české mince nějakou novou hodnotu, která by umožnila průměrný počet mincí použitých při placení o hodně zmenšit? Tyto a podobné otázky zodpovíme a porovnáme výhodnost plateb v českých korunách s platbou v amerických centech, britských pencích, euro centech a ve vybraných exotických mincovních systémech. Pojďme se tedy podívat, zda český mincovní systém mezi konkurencí obstojí.

## Platba pomocí mincí

Platbou pomocí mincí rozumíme skládání všech možných částek do výše nejmenší bankovky co nejefektivněji.<sup>1</sup> Efektivita placení může mít tisíce podob. My ukážeme v článku základní kritéria, jak efektivitu měřit, a podle nich porovnáme efektivitu systémů mincí z tabulky 1.

Nejdříve ale zavedeme pojem reprezentace částky, který nám umožní úlohu placení mincemi pořádně zformulovat. Nechť jsou dány hodnoty mincí  $e_1, e_2, \dots, e_D$  (uspořádané vzestupně), přičemž  $e_1 = 1$  (aby šlo zaplatit každou částku). Uvažujme částky  $n$  v hodnotách od 1 do  $N - 1$ , kde  $N$  je hodnota nejmenší bankovky. Každou  $D$ -tici  $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ , kde jednotlivá čísla jsou přirozená nebo nuly a pro kterou platí, že

$$n = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \dots + a_D \cdot e_D, \quad (1)$$

nazveme *reprezentací* částky  $n$ . Počet použitých mincí v dané reprezentaci značíme  $\text{cost}(a_1, a_2, \dots, a_D)$ , tj.

$$\text{cost}(a_1, a_2, \dots, a_D) = a_1 + a_2 + \dots + a_D.$$

**Příklad 1.** V českých korunách platí, že reprezentace 30 Kč je např.  $(30, 0, 0, 0, 0, 0)$ , protože

$$30 = 30 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 50$$

nebo  $(0, 0, 0, 1, 1, 0)$ , protože

$$30 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 0 \cdot 50.$$

Proto  $\text{cost}(30, 0, 0, 0, 0, 0) = 30$  a  $\text{cost}(0, 0, 0, 1, 1, 0) = 2$ .

Než se pustíme do samotných úvah o efektivitě, uveďme významnou poznámku. V článku budou uvedeny výsledky, které nelze získat bez použití počítače. Druhá z autorek všechny potřebné programy vytvořila. Čtenáři jsou k dispozici na [www](http://www) stránce [2].

\*Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

†Gymnázium Omská

<sup>1</sup>Ve skutečnosti není omezením, že uvažujeme pouze mince, zatímco bankovky jsou vyloučeny ze hry. Čtenář si jistě sám rozmyslí, jak by se článek změnil, kdyby se zapojily do placení i bankovky.

mince	symbol	hodnoty	min bankovka	$\emptyset$ cost
české koruny	Kč	1,2,5,10,20,50	100	3,434343...
US centy	¢	1,5,10,25	100	4,747474...
euro centy	žádný speciální	1,2,5,10,20,50	100	3,434343...
UK pence	p	1,2,5,10,20,50	100	3,434343...
ázerbájdžánský qəpik	ω vzhůru nohama	1,3,5,10,20,50	100	3,434343...
bahamský cent	B¢	1,5,10,15,20	50	3,571428571

Tabulka 1: Systémy mincí používané v Evropě, USA, v Ázerbájdžánu a na Bahamách, které porovnáme podle různých měřítek efektivity placení. Vidíme, že euro centy i britské pence mají stejné nominální hodnoty i nejmenší bankovku jako naše koruny. Proto efektivita těchto tří systémů bude stejná, ať už ji měříme podle jakéhokoliv kritéria. Poslední sloupec uvádí průměrný počet mincí použitých při optimální platbě.

## 1 Použití minimálního počtu mincí

Má-li nám prodavačka vrátit 30 Kč, pak budeme jistě radši, když nám dá dvě mince v hodnotách 10 a 20 Kč, než když si v peněžence odneseme třicet jednokorunových mincí. Proto je přirozené definovat *optimální reprezentaci* částky  $n$  následovně: Pokud je součet  $a_1 + a_2 + \dots + a_D$  v reprezentaci  $n$  minimální mezi všemi možnostmi, tedy podle zavedeného značení je minimální  $\text{cost}(a_1, a_2, \dots, a_D)$ , pak nazveme  $(a_1, a_2, \dots, a_D)$  *optimální reprezentaci* částky  $n$  a značíme  $\text{opt}(n, e_1, e_2, \dots, e_D)$ .

**Příklad 2.** V Čechách potřebujeme  $k$  zaplacení částky 30 Kč minimálně dvě mince, a to v hodnotách 10 a 20 Kč. Zapišme to pomocí právě zavedené symboliky:

$$\text{opt}(30; 1, 2, 5, 10, 20, 50) = (0, 0, 0, 1, 1, 0) \quad a \quad \text{cost}(\text{opt}(30; 1, 2, 5, 10, 20, 50)) = 2.$$

## 2 Průměrný počet mincí v optimální reprezentaci

Přirozeným požadavkem je, abychom v daném systému mincí v optimálních reprezentacích částek používali průměrně co nejméně mincí. Pomocí programu Optimum.c druhá z autorek spočítala průměrný počet mincí používaných v optimálních reprezentacích v jednotlivých systémech – viz poslední sloupec tabulky 1. Tedy pro systém mincí  $e_1, e_2, \dots, e_D$  a částky od 1 do  $N-1$  je v tabulce napočítána hodnota

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \text{cost}(\text{opt}(k, e_1, e_2, \dots, e_D)).^2 \quad (2)$$

Pozor ovšem – je zřejmé, že s rostoucím počtem mincí klesá průměrný počet mincí potřebných v optimálních reprezentacích částek. Proto není spravedlivé prohlásit, že prohrály americké centy, nýbrž je logičtější porovnávat mezi sebou podle tohoto kritéria systémy obsahující stejný počet mincí. Můžeme tedy například tvrdit, že je z tohoto hlediska český systém stejný jako ázerbájdžánský.

## 3 Optimální systém mincí

Podle průměrného počtu mincí v optimálních reprezentacích všech částek se dá hodnotit optimalita systému mincí. Pro pevně daný počet mincí  $D$  nazveme systém

<sup>2</sup> $\sum$  je zkrácený zápis součtu. Tedy  $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

počet mincí $D$	hodnoty	$\varnothing$ cost
3	1,12,19	5,262626...
4	1,5,18,25	3,969696...
5	1,5,16,23,33	3,363636...
6	1,4,6,21,30,37	2,989898...
6	1,4,9,24,31,45	2,989898...
6	1,5,8,20,31,33	2,989898...

Tabulka 2: Optimální systémy mincí pro tři až šest mincí, tedy systémy, ve kterých při optimálních platbách použijeme průměrně nejméně mincí. Průměrný počet použitých mincí při placení částek od 1 do 99 uvádí poslední sloupec.

mincí  $e_1, e_2, \dots, e_D$  *optimální*, pokud průměrný počet mincí v optimálních reprezentacích je minimální, tj. uvažujeme-li částky od 1 do  $N - 1$  (předpokládáme, že všechny jsou stejně pravděpodobné, což v reálném životě díky oblíbě částek končících devítkou není pravda), pak požadujeme minimalitu výrazu (2).

Optimální systémy pro  $D = 3, 4, 5$  a 6 mincí a s minimální hodnotou bankovky  $n = 100$  a také průměrný počet mincí v optimálních reprezentacích pro tyto systémy jsou uvedeny v tabulce 2 a byly nalezeny programem Dynamicky.c.

Z tabulky vidíme, že žádný z reálných systémů mincí není optimální. Ovšem některé mají k optimalitě dost blízko. Podle systému mincí v hodnotách 1, 5, 18, 25 se jmenuje článek [1], který nás ke zkoumání mincí přivedl: What this country needs is an 18č piece. Je totiž vidět, že kdyby se v US systému nahradil desetník mincí v hodnotě 18č, pak by vznikl optimální systém. Samozřejmě k tomu nedojde, protože lidé neumí rychle z paměti počítat s číslem 18.

## 4 Optimalita versus hladový algoritmus

Jiné z možných hledisek je, aby reprezentace získané tzv. hladovým způsobem byly optimální. *Hladovou reprezentaci* částky  $n$  značíme  $\text{hlad}(n, e_1, e_2, \dots, e_D)$  a získáme ji tak, že vezmeme co nejvíce mincí v hodnotě  $e_D$ , co se do  $n$  vejdu, a označíme tento počet  $a_D$ . Pak vezmeme co nejvíce mincí v hodnotě  $e_{D-1}$ , co se vejdu do  $n - a_D \cdot e_D$  atd. Potom získaná reprezentace  $(a_1, a_2, \dots, a_D)$  bude hladová.

**Příklad 3.** *Například při použití českých korun získáme hladovou reprezentaci 46 Kč následovně: Nejprve použijeme dvě dvacetikoruny. Zbude nám tak 6 Kč, což uhradíme jako pětikorunu a korunu. Dostáváme tedy reprezentaci  $(1, 0, 1, 0, 2, 0)$ , která odpovídá rovnosti*

$$46 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 20.$$

*Jde o hladovou reprezentaci 46 Kč a snadno se přesvědčíme, že je zároveň optimální.*

Jelikož je platba hladovým způsobem přirozená, je dalším logickým požadavkem, aby v systému mincí hladové reprezentace odpovídaly optimálním reprezentacím. Programem Hladovy.c jsme ověřily, že tomu tak je v případě všech systémů z tabulky 1.

**Příklad 4.** *Aby nevznikl dojem, že hladová a optimální reprezentace vždy splývají, tak například pro optimální systém čtyř mincí 1, 5, 18, 25 zaplatíme částku 36 hladovým algoritmem jako  $36 = 25 + 2 \cdot 5 + 1$ , zatímco optimálně ji zaplatíme dvěma mincemi v hodnotě 18. Při volbě reálných systémů mincí tedy zřejmě požadavek, aby optimální a hladová reprezentace byly shodné pro všechny uvažované částky, hrál důležitou roli.*

počet mincí $D$	hodnoty	$\varnothing$ cost
3	1,5,22	5,313131...
3	1,5,23	5,313131...
4	1,3,11,37	4,14...
4	1,3,11,38	4,14...
5	1,3,7,16,40	3,494949...
5	1,3,7,16,41	3,494949...
5	1,3,7,18,44	3,494949...
5	1,3,7,18,45	3,494949...
5	1,3,8,20,44	3,494949...
5	1,3,8,20,45	3,494949...
6	1,2,5,11,25,62	3,161616...
6	1,2,5,11,25,63	3,161616...
6	1,2,5,13,29,64	3,161616...
6	1,2,5,13,29,65	3,161616...

Tabulka 3: Optimální systémy mincí pro platbu hladovým algoritmem pro tři až šest mincí, tedy systémy, ve kterých při „hladových“ platbách použijeme průměrně nejméně mincí. Průměrný počet použitých mincí při placení částek od 1 do 99 uvádí poslední sloupec.

## 5 Optimální systém mincí pro hladový algoritmus

Když už se zdá, že hladový algoritmus hraje tak důležitou roli pro praktickou práci s mincemi, pojďme najít systémy mincí, které jsou optimální pro hladový algoritmus. Cílem je tudíž najít hodnoty mincí  $e_1, e_2, \dots, e_D$  pro dané  $D$  tak, aby průměrný počet mincí použitých v hladové reprezentaci byl minimální. Matematicky zapsáno, hledáme mince, pro které je minimální následující hodnota

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \text{cost}(\text{hlad}(k, e_1, e_2, \dots, e_D)).$$

V tabulce 3 získané programem Hladovy-system.c je shrnuto, jaké systémy 3, 4, 5 a 6 mincí jsou optimální pro platbu hladovým algoritmem a jaký je průměrný počet mincí použitých v hladové reprezentaci částek v takových systémech. Zajímavým pozorováním je, že žádný z těchto systémů není zároveň optimální – jak čtenář ověří porovnáním s tabulkou 2. Lze tedy prohlásit, že systém, který by byl optimální a zároveň by v něm platba nejmenším počtem mincí splývala s platbou hladovým algoritmem pro tři až šest mincí, neexistuje.

Koho zajímá, jaký je průměrný počet mincí použitých v hladových reprezentacích částek v reálných systémech, uvědomí si, že v systémech z tabulky 1 splývá hladová a optimální reprezentace. Proto hledaný údaj vyčteme z posledního sloupce tabulky 1.

## 6 Omezený počet mincí od každé hodnoty

Jiná efektivita, kterou si můžeme přát, je zaplatit tak, aby počet mincí od každé hodnoty nepřesáhl předepsanou konstantu  $k$ . Podívejme se, jak vypadá minimální konstanta  $k$  pro námi uvažované systémy. Tedy jaké je minimální  $k$  takové, že každou částku zaplatíme maximálně  $k$  kusy od každé mince. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 4.

mince	mez $k$
české koruny, euro centy, UK pence	2
US centy	4
ázerbájdžánský qəpik	2
bahamský cent	4

Tabulka 4: Minimální počet mincí  $k$  takový, že pomocí  $k$  mincí od každé hodnoty zaplatíme každou částku do hodnoty menší než nejmenší bankovka.

## 7 Rovnoměrné používání mincí

Mincovna jistě potřebuje vědět, jak moc se jednotlivé mince používají. Může podle toho volit jejich kvalitu a ví, jak často je potřeba jednotlivé hodnoty mincí razit, předpokládáme-li, že nejvíce užívané je třeba razit nejčastěji. A jak často používáme jednotlivé hodnoty mincí v optimálních reprezentacích? Na to se podívejte do tabulky 5, která zastoupení jednotlivých mincí pro reálné systémy uvádí.

V případě ázerbájdžánského qəpiku není optimální platba nutně jednoznačná. Například částku v hodnotě 9 qəpiků lze zaplatit jako  $3 \cdot 3$  i jako  $1 + 3 + 5$ . Proto máme v tabulce 5 u ázerbájdžánského qəpiku tři řádky: první odpovídá platbám, kdy upřednostňujeme trojqəpik, třetí platbám, kdy dáváme přednost pětiqəpiku, a v prostředním volíme kompromis. Vidíme, že když upřednostníme pětiqəpik, je takový systém nejvyváženější ze všech uvažovaných systémů. Naopak za nejhorší lze považovat z hlediska rovnoměrného použití mincí americké centy.

mince	1	2	3	5	10	15	20	25	50
české koruny, euro centy, UK pence	40	80	0	50	40	0	80	0	50
US centy	200	0	0	40	80	0	0	150	0
ázerbájdžánský qəpik	50	0	100	20	40	0	80	0	50
	60	0	80	30	40	0	80	0	50
	70	0	60	40	40	0	80	0	50
bahamský cent	100	0	0	5	10	40	20	0	0

Tabulka 5: Uvádíme, kolikrát jsou použity jednotlivé mince při optimálních platbách ve zkoumaných reálných systémech.

## 8 Další kritéria efektivity

Rozhodně jsme nevyčerpaly všechna kritéria efektivity. Čtenáři teď ještě předstěreme celou řadu problémů, nad kterými může hloubat.

### 1. Jakou minci přidat pro přiblížení optimalitě?

Mince obvykle mizí (vzpomeňme relativně nedávno zaniklé padesátníky). My si teď ale na chvíli představíme opačnou situaci a budeme se ptát, jakou jednu minci přidat, aby se snížil co nejvíce průměrný počet mincí v optimální reprezentaci. Tedy máme-li mince  $e_1, e_2, \dots, e_D$ , jakou máme přidat minci  $e_{D+1}$ , aby byl minimální součet

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \text{cost}(\text{opt}(k, e_1, \dots, e_D, e_{D+1})).$$

**Příklad 5.** Pro centy je nejvýhodnější přidat 32č, pak v systému mincí v hodnotách 1, 5, 10, 25, 32 je průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci částek od 1 do 99 roven 3,454545....

## 2. Jakou minci přidat, aby se hladová platba přiblížila optimalitě?

Kdyby se stát rozhodl vyrobit novou minci, pak by bylo možná vhodné – díky optimalitě hladového algoritmu – zodpovědět následující otázku: Jakou jednu minci přidat, aby se snížil co nejvíce průměrný počet použitých mincí v hladové reprezentaci, tj. máme-li mince  $e_1, e_2, \dots, e_D$ , jakou máme přidat minci  $e_{D+1}$ , aby byl minimální součet

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \text{cost}(\text{hlad}(k, e_1, \dots, e_D, e_{D+1})).$$

**Příklad 6.** Při přidání centů v hodnotě 2 nebo 3 k mincím v hodnotách 1, 5, 10, 25 se nejvíce snížil průměrný počet mincí v hladovém algoritmu, a to ze 4, 747474... na 3, 898989... (USA v historii mince v hodnotě 2¢ a 3¢ používaly.)

## 3. Co platí pro směnu?

Při směnné transakci můžeme dát částku dohromady tak, že zákazník platí a prodavač mu vrací. Vysvětleme, co rozumíme reprezentací částky při směnné transakci. Nechť jsou dány hodnoty mincí  $e_1, e_2, \dots, e_D$  (uspořádané vzestupně). Uvažujme částky  $n$  v hodnotách od 1 do  $N-1$ , kde  $N$  je hodnota nejmenší bankovky. Každou  $D$ -tici  $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ , kde  $a_i \in \mathbb{Z}$ , takovou, že

$$n = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \dots + a_D \cdot e_D, \quad (3)$$

nazveme *směnnou reprezentací* částky  $n$ . Počet použitých mincí v dané reprezentaci je pak  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_D|$ .

**Příklad 7.** Platíme-li za nákup 46 Kč, pak při směnné transakci stačí, když zaplatíme padesátikorunou a prodavač nám vrátí dvě dvoukoruny. Do hry se tedy zapojily tři mince, zatímco v příkladu 3 byly pro platbu 46 Kč bez možnosti vrácení potřeba minimálně čtyři mince.

Pro směnu si můžeme klást analogické otázky jako při platbě bez vrácení. Zkuste si je zodpovědět sami.

Pokud budete chtít odpovědi týkající se dalších kritérií efektivity zkontrolovat nebo se budete chtít podívat na mince z dalších možných úhlů pohledu, konzultujte webovou stránku: Optimální mince a bankovky [2].

## Jsou české mince optimální?

Na základě prozkoumaných kritérií lze říci, že na tom naše mince nejsou špatně, i když netvoří ani optimální systém, ani optimální systém pro platbu hladovým algoritmem. Průměrný počet použitých mincí není vysoký a na zaplacení každé částky nám stačí mít v peněženke od každé hodnoty dva kusy mincí. A jelikož se s nimi dobře počítá, můžeme být jakožto uživatelé spokojeni.

## Reference

- [1] M. Kleber, R. Vakil, and J. Shallit, *What this country needs is an 18¢ piece*, *Mathematical Intelligencer* **25(2)** (2003), 20–23
- [2] A. Šťastná, *Optimální mince a bankovky*, webová stránka s výsledky a programy [www.kmlinux.fjfi.cvut.cz/~balkolub/soc/bankovky](http://www.kmlinux.fjfi.cvut.cz/~balkolub/soc/bankovky)
- [3] Š. Šimsa, *Měnová reforma s využitím počítače*, *Studentský matematicko-fyzikální časopis M&M*, Ročník XVI, Číslo 4, 2009