Zkouška v kapse = znalosti jdou k ledu?!

Tak tohle o lineární algebře z 1. semestru rozhodně neplatí. Jak sami uvidíte, setkávat se s ní budete během celého studia, a to nejen v matematice... Především je ale základem látky probírané v lineární algebře ve 2. semestru. Proto při výkladu a posléze při zkoušce budou pojmy z 1. semestru považovány za důvěrně známé.

Přesněji řečeno, není nutné znát důkazy, jinak je ale vhodné pamatovat si znění vět a hlavně rozumět jejich obsahu! Nutné je znát následující pojmy a tvrzení (znáte-li je, měli byste bez problémů odpovědět na otázky v následujícím textu) a je nezbytné umět s nimi prakticky pracovat:

- Polynomy - Co je polynom? Kolik má kořenů v $\mathbb{C}$? Jak je to s reálnými kořeny polynomu? Kolik kořenů má nulový polynom? Kdy jsou si dva polynomy rovny?
- Vektorový prostor - Co musí být zadáno, aby mělo smysl ověřovat axiomy vektorového prostoru? Kolik vektorů může obsahovat vektorový prostor? Jsou $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{Z}$ vektorové prostory (jsou-li operace definovány po složkách)?
  - Příklady vektorových prostorů - $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ (prostor uspořádaných n-tic); $\mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbb{C}^{m,n}$ (prostor matic o m-řádcích a n-sloupcích); $\mathcal{P}_n$ (prostor polynomů stupně $n-1$ s přidáním nulového polynomu)
- Lineární závislost a nezávislost - lineární obal, LZ a LN soubor (jaký je rozdíl mezi množinou a souborem?), soubor generátorů, báze, standardní báze, dimenze, souřadnice, souřadnicový funkcionál

  Od chvíle, kdy definujeme dimenzi, uvažujeme výlučně prostory konečné dimenze ve výkladu 1. i 2. semestru.

  - Každý vektorový prostor má bázi.
  - Umíme z každého souboru generátorů vybrat bázi a doplnit každý LN soubor na bázi.
- Podprostor - definice podprostoru, triviální podprostor, vlastní podprostor, doplněk podprostoru
  - Víme, že libovolný průnik podprostorů je podprostor. Pozor - sjednocení podprostorů $P \cup Q$ nemusí být podprostor. Nejmenší podprostor, který sjednocení obsahuje, je $P+Q$.
  - Je-li $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ soubor vektorů z vektorového prostoru V, pak $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ je nejmenší podprostor, který tyto vektory obsahuje.
  - Je-li P podprostor V a platí-li $\dim P = \dim V$, pak $P = V$.
  - *1. věta o dimenzi*: Nechť V je vektorový prostor nad T a nechť $P, Q \subset\subset V$. Pak
  $$\dim(P+Q) + \dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q.$$
  - Je doplněk podprostoru určen jednoznačně? Je jeho dimenze určena jednoznačně?
- Lineární zobrazení - definice lineárního zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, kde P a Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T (proč musí být nad stejným tělesem?), lineární funkcionál, lineární operátor, monomorfní, epimorfní, izomorfní zobrazení, regulární operátor, souřadnicový izomorfismus $A\vec{x} = (\vec{x})_{\mathcal{X}}$, hodnost $h(A)$, jádro $kerA$, defekt $d(A)$, izomorfismus vektorových prostorů
  - Inverzní zobrazení k izomorfismu je také izomorfní.
  - Složení lineárních zobrazení je také lineární.
  - Co je obraz množiny $M \subset P$ při zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, značení $A(M)$?
  - Co je vzor množiny $N \subset Q$ při zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, značení $A^{-1}(N)$?

- Pozor na rozdíl mezi vzorem množiny $A^{-1}(N)$ a inverzním zobrazením A^{-1}!
- Navíc, je-li $M \subset\subset P$, pak $A(M) \subset\subset Q$ (obraz podprostoru je podprostor), a je-li $N \subset\subset Q$, pak $A^{-1}(N) \subset\subset P$ (vzor podprostoru je podprostor).
- Obraz lineárního obalu $A[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ je roven lineárnímu obalu obrazů generátorů $[A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$.
- Nechť $\vec{b} \in A(P)$, pak $A^{-1}\vec{b}$ (množina řešení $A\vec{x} = \vec{b}$) splňuje $A^{-1}\vec{b} = \vec{a} + kerA$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení, tedy $\vec{a}$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$.
- Vektorové prostory jsou izomorfní, právě když mají stejnou dimenzi.
- Lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$ je izomorfní, pravě když je prosté nebo "na".
- *2. věta o dimenzi*: Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, pak

$$\dim P = h(A) + d(A).$$

- Pro složené zobrazení AB platí $h(AB) \leq \min\{h(A), h(B)\}$. Navíc, je-li A izomorfní, pak $h(AB) = h(B)$. Je-li B izomorfní, pak $h(AB) = h(A)$.

• Matice - nulová matice, čtvercová, jednotková matice, hlavní a vedlejší diagonála matice, diagonální matice, součin matic (je asociativní, není obecně komutativní), matice zobrazení A v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$

  - Matice zobrazení A v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ splňuje $(A\vec{x})_\mathcal{Y} = {}^\mathcal{X}A^\mathcal{Y}(\vec{x})_\mathcal{X}$.
  - Jak se získá matice složeného zobrazení pomocí matic skládaných zobrazení?