Kontrolní písemka LAL 17. 12. 2019 Jméno:

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$.

   Nechť ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$.

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definujeme

   $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$ a dále známe ${}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte matici složeného zobrazení BA ve standardních bázích.

   (b) Dále najděte hodnost a jádro BA.

3. Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako

   $$A\vec{x} = \begin{pmatrix} -3x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

   Je A lineární? Vysvětlete. Je A epimorfní? Vysvětlete.

4. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

   jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ zadané svou maticí v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$,

   (a) je-li $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   (b) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.