Kontrolní písemka LAL 12. 11. 2019 Jméno:

1. Zjistěte, zda $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, a pokud je, určete bázi a dimenzi P. Vysvětlete, proč jde o bázi.

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \; Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

3. Nechť x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jsou vektory z $\mathcal{P}$. Najděte bázi $V = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_\lambda$.

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{C} \\ &\qquad x_1(t) = -1 - 2t + t^2 + t^3 \\ &\qquad x_2(t) = 1 + t - t^2 - 2t^3 \\ &\qquad x_3(t) = 1 + 2t + t^2 - 2t^3 \\ &\qquad x_4(t) = 2 + t - 2t^2 + t^3 \\ &\qquad x_5(t) = 2 - t + 2t^2 - t^3. \end{aligned}$$

Dále najděte souřadnice vektoru x_4 v této bázi.

4. Nechť $\mathcal{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Nechť $\mathcal{Y} = (\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \mathbb{Y}_3, \mathbb{Y}_4)$ je soubor z $\mathbb{R}^{2,2}$,

$$(\mathbb{Y}_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_4)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Ověřte, že $\mathcal{Y}$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$.
   (b) Najděte $(\mathbb{Y})_\mathcal{X}$, je-li $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 - \mathbb{Y}_2 + 2\mathbb{Y}_3$.
   (c) Najděte $(\mathbb{X}_3)_\mathcal{Y}$.