Kontrolní písemka LAL 12. 11. 2019 Jméno:

1. Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^3$ složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

   (a) $x_1 = 0 = x_2$,

   (b) $x_1 = 0$ nebo $x_2 = 0$ (i obě složky zároveň mohou být nulové).

   Která z těchto množin je a která není vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$ při zúžení operací z $\mathbb{C}^3$ na V (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách)? Vysvětlete.

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$. Určete dimenzi, nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$ a dále najděte doplněk Q do $\mathbb{R}^{2,2}$, je-li:

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \quad Q = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

3. Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$ (prostor polynomů stupně maximálně tři s přidáním nulového polynomu), $M = [x_1, x_2, x_3, x_4]_\lambda$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$x_1(t) = 1 + t - t^3, \quad x_2(t) = 1 - t + 2t^3, \quad x_3(t) = 1 + t + t^2, \quad x_4(t) = 3 + t.$$

   (a) Vyberte bázi M z generátorů M.

   (b) Rozhodněte, zda lze polynom x doplnit na bázi M. Pokud ano, najděte bázi M, která x obsahuje:

$$x(t) = 2 + t^2 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

4. Nechť $\mathcal{Y} = (-\vec{e}_3, 2\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{x})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 3\vec{x}_3, \ \vec{z} = (\vec{y})_\mathcal{Y}.$$

   (a) Najděte složky vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

   (b) Ověřte, že soubor $\mathcal{U} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

   (c) Najděte $(\vec{y})_\mathcal{U}$.