

1. Necht' V je podmnožina \mathbb{C}^3 složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

(a) $x_1 + x_2 = 0$,

(b) $x_1 + x_2 = 1$.

Která z těchto množin je a která není vektorovým prostorem nad \mathbb{C} při zúžení operací z \mathbb{C}^3 na V (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách)? Vysvětlete.

2. Necht' $P \subset \mathbb{C}^{2,2}$, $Q \subset \mathbb{C}^{2,2}$. Určete dimenzi, nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$ a dále najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$, je-li:

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}, \quad Q = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

3. Necht' $M \subset \mathcal{P}_4$ (prostor polynomů stupně maximálně tři s přidáním nulového polynomu), $M = [x_1, x_2, x_3, x_4]_{\lambda}$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$x_1(t) = 1 + t - t^2, \quad x_2(t) = 1 - t + 2t^2, \quad x_3(t) = 1 + t + t^3, \quad x_4(t) = 3 + t.$$

(a) Vyberte bázi M z generátorů M .

(b) Rozhodněte, zda lze polynom x doplnit na bázi M . Pokud ano, najděte bázi M , která x obsahuje:

$$x(t) = t^2 + t^3 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

4. Necht' $\mathcal{Y} = (-\vec{e}_3, \vec{e}_2, 2\vec{e}_1)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je standardní báze \mathbb{R}^3 , necht' $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \vec{x}_2 - 3\vec{x}_3, \quad \vec{z} = (\vec{y})_{\mathcal{Y}}.$$

(a) Najděte složky vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

(b) Ověřte, že soubor $\mathcal{W} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tvoří bázi \mathbb{R}^3 .

(c) Najděte $(2\vec{x}_1 - \vec{x}_3)_{\mathcal{W}}$.