Vektorový prostor

Z teorie je třeba znát: definici tělesa a vektorového prostoru nad T (pro $T = \mathbb{C}$ hovoříme o komplexním vektorovém prostoru, pro $T = \mathbb{R}$ o reálném vektorovém prostoru), vlastnosti vektorového prostoru plynoucí bezprostředně z definice. Dále je třeba znát pojmy: vektor, matice, polynom.

1. **[cvičení]** Nechť V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme:

   (a)
   $$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \text{ a } \alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   (b)
   $$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

   Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$?

2. **[cvičení]** Nechť V je množina kladných reálných čísel, tj. $V = \{x > 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$, těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (tj. $\vec{x} = x > 0, \vec{y} = y > 0$) definujeme $\vec{x} \oplus \vec{y} = xy$ a $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha$. Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$?

3. **[cvičení]** Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^3$ složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

   (a) $x_1 \in \mathbb{R}$,
   (b) $x_1 = 0$,
   (c) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,
   (d) $x_1 + x_2 = 0$,
   (e) $x_1 + x_2 = 1$,
   (f) $x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq x_3$,
   (g) všechny složky jsou reálné,
   (h) $x_1 = x_2$,
   (i) $x_1 \neq x_2$,
   (j) $x_1 + 2x_3 = 0$,
   (k) $x_1 + 2x_3 = 1$.

   Která z těchto množin je vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$ při zúžení operací z $\mathbb{C}^3$ na V (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách)?

4. **[cvičení]** Nechť V je podmnožina $\mathbb{R}^{2,2}$ tvořená

   (a) tzv. symetrickými maticemi, tj.
   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{11},\ a_{22} \in \mathbb{R},\ a_{12} = a_{21} \right\},$$

   (b) tzv. diagonálními maticemi, tj.
   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{11},\ a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zjistěte, zda V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$ při zúžení operací z $\mathbb{R}^{2,2}$ na V (tj. sčítání matic a násobení matice reálným číslem po prvcích).

5. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{P}$ je množina polynomů s operacemi definovanými bodově, tj. pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a každý polynom $x \in \mathcal{P}$ a $y \in \mathcal{P}$ definujeme:

$$(x \oplus y)(t) = x(t) + y(t) \qquad \text{a} \qquad (\alpha \odot x)(t) = \alpha x(t) \qquad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Víme z přednášky, že $\mathcal{P}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Která z následujících množin tvoří při zúžení operací z $\mathcal{P}$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$?

   (a) $\{x \in \mathcal{P} \mid x(0) - x(i) = 0\}$,
   (b) $\{x \in \mathcal{P} \mid (\forall t \in \mathbb{C})(x(t) = x(t+1))\}$,
   (c) $\{x \in \mathcal{P} \mid x \text{ má stupeň tři}\}$,
   (d) $\{x \in \mathcal{P} \mid 0, 1, 2 \text{ jsou kořeny } x\}$.

6. Uvažujme množinu V reálných posloupností s operacemi definovanými po členech, tj. nechť $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme:

$$a \oplus b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{a} \qquad \alpha \odot a = (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dokažte, že V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.
Dále dokažte, že při zúžení operací z V na danou podmnožinu (tj. sčítání posloupností a násobení posloupnosti reálným číslem po členech), platí:

   (a) Podmnožina tvořená posloupnostmi s prvními deseti členy nulovými tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (b) Podmnožina tvořená posloupnostmi s prvním členem nenulovým netvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (c) Podmnožina tvořená posloupnostmi s konečným počtem nenulových členů tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (d) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nekonečným počtem nulových členů netvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (e) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulovou limitou tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (f) Podmnožina tvořená konvergentními posloupnostmi s nenulovou limitou netvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

7. Uvažujme množinu V reálných funkcí definovaných na intervalu (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}$, s operacemi definovanými bodově, tj. nechť $f, g \in V$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme:

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t) \qquad \text{a} \qquad (\alpha \odot f)(t) = \alpha f(t) \qquad \text{pro každé } t \in (a, b).$$

Dokažte, že V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$. Dále dokažte, že při zúžení operací z V na danou podmnožinu (tj. sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem bodově), platí:

   (a) Podmnožina tvořená omezenými funkcemi tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (b) Podmnožina tvořená funkcemi s tzv. konečným nosičem, tj.

$$\{f : (a, b) \to \mathbb{R} \mid \text{existuje konečná } X \subset (a, b) \text{ taková, že } f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in (a, b) \setminus X\},$$

   tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   (c) Podmnožina tvořená polynomy s reálnými koeficienty tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Výsledky: Vektorový prostor

1. Není vektorový prostor.
   (a) Neplatí např. axiom o násobení jedničkou.
   (b) V prostoru neexistuje nulový vektor.
2. V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
3. Stačí prověřit uzavřenost. Vektorové prostory nad $\mathbb{C}$ jsou (b), (d), (h), (j).
4. (a), (b) Jsou to vektorové prostory. Stačí prověřit uzavřenost, protože $\mathbb{R}^{2,2}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
5. (a), (b), (d) jsou vektorové prostory. Stačí prověřit uzavřenost.
6. Pro V je třeba prověřit uzavřenost vůči operacím i axiomy. Pro podmnožiny stačí prověřit uzavřenost.
7. Pro V je třeba prověřit uzavřenost vůči operacím i axiomy. Pro podmnožiny stačí prověřit uzavřenost.