Podprostor

Z teorie je nutné znát pojmy: podprostor, součet podprostorů $P+Q$, průnik podprostorů $P\cap Q$. A je důležité vědět, že $P+Q$ a $P\cap Q$ jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi. Také využijeme 1. větu o dimenzi.

1. **[cvičení]** Zjistěte, zda množina $M\subset\mathbb{C}^3$ je podprostor $\mathbb{C}^3$, a pokud je, určete bázi a dimenzi M. (Využijte faktu, že dimenze vlastního podprostoru je menší než dimenze prostoru samého.)

   (a) $M=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \;\middle|\; (\forall j\in\{1,2,3\})(x_j\in\mathbb{Z})\right\}$,

   (b) $M=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1-2x_2+x_3=0\right\}$,

   (c) $M=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1-2x_2+x_3=0\wedge x_1-x_3=0\right\}$,

   (d) $M=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1-2x_2+x_3=1\right\}$.

2. **[cvičení]** Nechť $P\subset\subset\mathbb{R}^3$, $Q\subset\subset\mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li $P=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right]_\lambda$ a $Q=\left[\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

3. **[cvičení]** Nechť $P\subset\subset\mathbb{R}^4$, $Q\subset\subset\mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li

$$P=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_2+3x_3+x_4=0\wedge 2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\right\},$$

$$Q=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; -2x_1+x_2+5x_3+5x_4=0\wedge 4x_1+3x_2+5x_3-5x_4=0\right\}.$$

4. **[cvičení]** Nechť $P\subset\subset\mathbb{C}^3$, $Q\subset\subset\mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li

$$P=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \;\middle|\; 2x_1+4x_2-3x_3=0\right\}\text{ a}$$

   (a) $Q=\left[\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

   (b) $Q=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

5. Nechť $P\subset\subset\mathbb{R}^3$, $Q\subset\subset\mathbb{R}^3$, $V\subset\subset\mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P\cap Q\cap V$, je-li $P=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q=\left[\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\-5\\5\end{pmatrix}\right]_\lambda$ a $V=\left[\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\5\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

6. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\},\ Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

7. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ jsou vektory v $\mathbb{R}^4$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Je-li to možné, doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

   (b) Je-li to možné, doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0 \right\}$.

   (c) Doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $\mathbb{R}^4$.

   (d) **[cvičení]** Najděte doplněk $[\vec{x}_1, \vec{x}_2]_\lambda$ do $\mathbb{R}^4$.

8. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]_\lambda$, kde $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$. Nalezněte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $\dim P = 2$. Je-li Q podprostor $\mathbb{R}^3$, najděte bázi a dimenzi Q, $P+Q$ a $P \cap Q$ s užitím vypočtené hodnoty α. Není-li Q podprostor $\mathbb{R}^3$, vysvětlete proč ne.

   (a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = x_3 \right\}$,

   (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 = 0 \right\}$,

   (c) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 = x_3 \right\}$.

9. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + 2x_2 = 0 \right\} \text{ a } Q \text{ je nejmenší podprostor obsahující vektory } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Dále najděte doplněk podprostoru P do $\mathbb{R}^4$ a doplněk podprostoru Q do $\mathbb{R}^4$.

10. **[cvičení]** Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathcal{P}_4$, a v kladném případě určete $\dim M$ a najděte bázi M, je-li:

   (a) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 | \, x(1) = 0\}$,

   (b) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 | \, x(0) = 1\}$,

   (c) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 | \, \text{stupeň } x \text{ je 0 nebo 1 nebo 2}\}$,

   (d) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 | \, (\forall t \in \langle 0, 1 \rangle)(x(t) = x(1-t))\}$,

   (e) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 | \, (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(1))\}$,

   (f) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 | \, x(1) - 2x(-1) = 0 \wedge x(0) + x(1) = 0\}$.

11. Nechť $P = \big\{x \in \mathcal{P}_4 \,\big|\, (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(-t))\big\}$ a $Q = \big\{x \in \mathcal{P}_4 \,\big|\, (\forall t \in (1,2))(x(t) = x(1-t))\big\}$. Je-li $P \subset\subset \mathcal{P}_4$ a $Q \subset\subset \mathcal{P}_4$, najděte bázi a dimenzi $P+Q$ a $P \cap Q$.

12. **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathcal{P}_4, Q \subset\subset \mathcal{P}_4$. Najděte doplněk P do $\mathcal{P}_4$ a doplněk Q do $\mathcal{P}_4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P, Q, P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(0) + x(1) = 0\}, \quad Q = [a, b, c]_\lambda ,$$

   kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$a(t) = 1 - t - t^2, \quad b(t) = 1 + t + t^2, \quad c(t) = 2 + 2t.$$

13. **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$. Určete dimenzi, nalezněte bázi $P+Q$ a $P \cap Q$ a dále najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$, je-li:

(a) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

(b) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

(c) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

(d) $P = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \middle| x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

(e) $P = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \middle| x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \wedge x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\right\}$,
$Q = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \middle| 3x_1 = 2x_2 \wedge x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$.

14. **[cvičení]** Nechť $M \subset\subset \mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,

$$M = \left[\begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ i \end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

(a) Vyberte bázi M z generátorů M.

(b) Doplňte na bázi M následující vektory, je-li to možné:

(b1) $\begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$ (b2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$.

15. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$,

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right]_\lambda,$$

$$Q = \left\{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \middle| x_{11} + x_{22} = x_{12} + x_{21}\right\}.$$

(a) Najděte dimenzi a bázi $P, Q, P+Q$ a $P \cap Q$.

(b) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ lze $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ doplnit na bázi $P \cap Q$? Pro taková α vektor na bázi doplňte.

(c) Najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$.

Výsledky: Podprostor

1. (a) M není uzavřená vůči násobení číslem z C,

(b) M je podprostor dimenze 2, báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$,

(c) M je podprostor dimenze 1, báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,

(d) M neobsahuje nulový vektor ani není uzavřená vůči operacím.

2. $\dim P+Q = 3, \dim P \cap Q = 1$, báze $P+Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ nebo standardní báze $\mathbb{R}^3$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

3. $\dim P+Q = 3, \dim P \cap Q = 1$, báze $P+Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

4. (a) $\dim P+Q=3, \dim P\cap Q=1$, báze $P+Q$ je např. $\mathcal{E}_3$, báze $P\cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$.

   (b) $\dim P+Q=\dim P\cap Q=\dim P=\dim Q=2$, tj. $P+Q=P\cap Q=P=Q$, báze je u všech těchto prostorů např. $\left(\begin{pmatrix} 3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$.

5. Platí $P\cap Q\cap V=P$, proto $\dim P\cap Q\cap V=2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\right)$.

6. $\dim P+Q=4, \dim P\cap Q=2$, báze $P+Q$ je např. $\mathcal{E}_4$, báze $P\cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

7. (a) Báze P je např. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 3\end{pmatrix})$, (b) taková báze Q neexistuje, neboť $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \notin Q$, (c) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, (d) $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]_\lambda$.

8. $\alpha=14$ (a) $\dim P+Q=3$, báze je např. $\mathcal{E}_3$, $\dim P\cap Q=1$, báze $P\cap Q$ je $(\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix})$, (b) $\dim P+Q=3$, báze je např. $\mathcal{E}_3$, $\dim P\cap Q=0$, báze $P\cap Q$ neexistuje, (c) $Q \not\subset\subset \mathbb{R}^3$, Q není uzavřeno na operace.

9. $Q\subset P$, proto $P+Q=P$ a $P\cap Q=Q$, $\dim P=3$, $\dim Q=2$, báze P je např. $\left(\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right)$, báze Q je např. $\left(\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$, doplněk P do $\mathbb{R}^4$ je např. $[\vec{e}_1]_\lambda$, doplněk Q do $\mathbb{R}^4$ je např. $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]_\lambda$.

10. (a) $\dim M=3$, báze M je např. $(e_1-e_2, e_1-e_3, e_1-e_4)$,
    (b) M není podprostor $\mathcal{P}_4$, M neobsahuje nulový vektor a není uzavřená na operace,
    (c) M není podprostor $\mathcal{P}_4$, M neobsahuje nulový vektor (nulový polynom nemá definovaný stupeň),
    (d) $\dim M=2$, báze M je např. (e_1, e_2-e_3),
    (e) $\dim M=1$, báze M je např. (e_1),
    (f) $\dim M=2$, báze M je např. $(4e_1-e_2-7e_3, e_2-e_4)$.

11. Báze P je např. (e_1, e_3), báze Q je např. (e_1, e_2-e_3), $\dim(P+Q)=3$ a báze je např. (e_1, e_2, e_3) a $\dim(P\cap Q)=1$ a báze je např. (e_1).

12. Báze P je např. $(e_1-2e_4, e_1-2e_3, e_1-2e_2)$, báze Q je např. (a, b, c), $\dim(P+Q)=4$ a báze je např. standardní a $\dim(P\cap Q)=2$ a báze je např. $(e_1+e_2-3e_3, e_1-e_2-e_3)$, doplněk P je $[e_1]_\lambda$, doplněk Q je např. $[e_4]_\lambda$.

13. (a) $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a $P\cap Q=\{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\}$ (dimenze je tedy 0 a báze neexistuje),

    (b) $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a dim $(P\cap Q)=1$ a báze je např. $(\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix})$,

    (c) $P+Q=Q$, $\dim Q=3$ a báze je např. $(\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix})$, $P\cap Q=P$, $\dim P=2$ a báze je např. $(\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix})$,

    (d) $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a dim $(P\cap Q)=2$ a báze je např. $(\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix})$,

    (e) $\dim(P+Q)=3$ a báze je např. $(\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix})$ a $P\cap Q=\{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\}$ (dimenze je tedy 0 a báze neexistuje).

14. (a) Báze M je například $\left(\begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2+i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1+2i\end{pmatrix}\right)$.

    (b) (b1) Báze M je například $\left(\begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2+i\end{pmatrix}\right)$. (b2) Nelze doplnit na bázi M, protože $\begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix} \notin M$.

15. (a) $\dim P = 3$, $\dim Q = 3$, $\dim P + Q = 4$, $\dim P \cap Q = 2$, báze P je např. $\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}\right)$, báze Q je např. $\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$, báze $P+Q$ např. standardní, báze $P \cap Q$ např. $\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}\right)$, (b) $\alpha = 1$ $\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}\right)$, (c) $[\mathbb{E}_{1,1}]_\lambda$.