Matice a lineární zobrazení

Z teorie je třeba vědět:

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a nechť $\vec{b} \in A(P)$, pak $A^{-1}(\vec{b})$ (množina řešení $A\vec{x} = \vec{b}$) splňuje $A^{-1}(\vec{b}) = \vec{a} + \ker A$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení, tedy $\vec{a}$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$.
2. Matice zobrazení A v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ splňuje $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$.
3. Jak se získá matice složeného zobrazení pomocí matic skládaných zobrazení.

1. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

   Nechť $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{R}^3$ jsou definovány následovně:
   $$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad \mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$
   Sestavte
   (a) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}$,
   (b) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}}$,
   (c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$,
   (d) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

2. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbb{C}^3$ a $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{C}$ jsou definovány následovně:
   $$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad \mathcal{Y} = ((-3)).$$
   Sestavte matici ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}}$ funcionálu $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$ definovaného pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ jako $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

3. Nechť $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definované následovně $(Ax)(t) = x(t+1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, v níž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí
   $$x_1(t) = t - t^2, \; x_2(t) = 1 - t + t^2, \; x_3(t) = -1 + t.$$

4. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ zadané obrazy bazických vektorů prostoru $\mathbb{C}^3$ následovně
   $$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
   Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.

5. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$ a nechť ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$, kde $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^2$.

6. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3. Sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A$, je-li $\mathcal{Y} = (2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3, 3\vec{x}_1 + 4\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3)$.

7. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Nalezněte $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   Úkoly:

   (a) Najděte bázi $A(\mathbb{C}^4)$ a určete hodnost $h(A)$ a defekt $d(A)$.

   (b) Najděte bázi jádra.

   (c) Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4)$. Zobrazení A je definováno obrazy bazických vektorů $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, báze $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ jsou tvaru

$$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ a } \mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right).$$

   Nalezněte ${}^{\mathcal{E}_2}(BA)^{\mathcal{Z}}$.

10. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^{\#}$, ${}^{\mathcal{E}_2}\varphi^{\mathcal{Z}} = (1\ 1)$, kde $\mathcal{Z} = \big((3)\big)$. Najděte bázi jádra φA.

11. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3), B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3), {}^{\mathcal{E}_3}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$, kde $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete hodnost zobrazení BA.

12. Nechť

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ a } \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$$

jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ zadané svou maticí v bázi $\mathcal{X}$

${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$,

(a) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$,

(b) je-li $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$,

(c) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

13. Nechť

$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ a $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})$

jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$,

${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

14. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Je zadán lineární operátor A na $\mathbb{R}^3$ pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte

(a) $\ker A, d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),

(b) všechna řešení rovnice

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

(c) $A^{-1}(P)$, tedy vzor podprostoru P, je-li

$$P = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

15. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (-2\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3, -\vec{x}_1 + \vec{x}_3)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V_3. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

16. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte jádro a hodnost zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadaného pomocí matice ve standardních bázích

$$^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & 1 \\ -\beta & \beta^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

17. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$.

    Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, $^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dále je zadáno lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ následující maticí $^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    Nalezněte všechna řešení rovnice $BA\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

18. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Je zadán lineární operátor A na $\mathbb{R}^3$ pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ $\quad ^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Nalezněte

    (a) $\ker A, d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),

    (b) všechna řešení rovnice

    $$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

19. V závislosti na parametrech $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ najděte:

    (a) $\ker A$,

    (b) $A^{-1}((\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}))$,

    kde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je definované pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako

    $$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y + \alpha z \\ -\alpha x + \beta z \end{pmatrix}.$$

20. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ je definované pomocí matice $^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$

    (a) najděte jádro A,

    (b) určete, zda A je prosté,

(c) najděte obor hodnot $A(\mathbb{R}^2)$,

(d) určete hodnost A.

21. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ definujeme $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a dále známe ${}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha^2 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat.

(b) Pro složené zobrazení najděte v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jeho hodnost a jádro.

Výsledky: Matice a lineární zobrazení

1. (a) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}} = \left(\frac{-4}{3}\ \frac{-2}{3}\ \frac{-1}{3}\right)$.

3. ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

5. ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 23 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$.

6. ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$.

8. (a) báze $A(\mathbb{C}^4)$ je např. $\mathcal{E}_2, h(A) = 2, d(A) = 2$,

(b) báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$,

(c) $A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}]_\lambda.$

9. ${}^{\mathcal{E}_2}(BA)^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

10. báze jádra φA je např. $(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

11. pro $\alpha \neq -3$ je $h(BA) = 3$, pro $\alpha = -3$ je $h(BA) = 2$.

12. (a) např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(b) $B^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$

(c) např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$

13. např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda.$

14. (a) $\ker A = \{\vec{0}\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 3$, A je regulární operátor

(b) $A^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\}$

(c) např. $A^{-1}(P) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

15. $A^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3\}$

16. (i) $\beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1 \Longrightarrow h(A) = 2$, $\ker A = [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}]_\lambda$

(ii) $\beta = 0 \Longrightarrow h(A) = 1$, $\ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) $\beta = 1 \Longrightarrow h(A) = 1$, $\ker A = [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

17. např. $(BA)^{-1}(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$

18. (a) $h(A) = 2$, $d(A) = 1$, $\ker A = [\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$, A není regulární

(b) $A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

19. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} \\ -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda, \ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{2}{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} + \ker A$

(ii) $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda, \ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} + \ker A$

(iii) $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda, \ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} + \ker A$

(iv) $\alpha = \beta = 0 \Longrightarrow \ker A = \mathbb{R}^3, \ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \emptyset$

20. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \Longrightarrow \ker A = \{\vec{0}\}, \ A$ je prosté, $A(\mathbb{R}^2) = [\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}]_\lambda, \ h(A) = 2$

(ii) $\alpha = 0 \vee \alpha = 1 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda, \ A$ není prosté, $h(A) = 1, \ A(\mathbb{R}^2) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$ pro $\alpha = 1, \ A(\mathbb{R}^2) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$ pro $\alpha = 0$

21. (a) existuje zobrazení AB i BA

(b) (i) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ je $h(AB) = 2, \ \ker AB = \{\vec{0}\}, \ h(BA) = 2, \ker BA = [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(ii) pro $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$ je $h(AB) = 1, \ \ker AB = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda \ h(BA) = 1, \ \ker BA = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$