Lineární zobrazení

Z teorie je nutné znát pojmy: lineární zobrazení, jádro, hodnost a defekt lineárního zobrazení, matice zobrazení. Také využijeme 2. větu o dimenzi.

1. **[cvičení]** Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ následujícím způsobem

   (a) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$,

   (b) $\varphi(\vec{x}) = 0$,

   (c) $\varphi(\vec{x}) = |x_1|$,

   (d) $\varphi(\vec{x}) = \mathrm{Re}(x_1)$,

   (e) $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$ definována následovně $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$,

   (f) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3$ za stejných předpokladů jako v předchozím bodě.

   Zjistěte, zda $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$. V kladném případě najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

2. **[cvičení]** Nechť je definován funkcionál $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$ pomocí obrazů bazických vektorů

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3, \ \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3, \ \varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6.$$

   (a) Najděte explicitní předpis pro φ, tj. $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \dots$

   (b) Najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

3. Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ následujícím způsobem

   (a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathrm{Im}(x_2 - x_3) \end{pmatrix}$,

   (b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 - ix_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

   (c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

   Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$. V kladném případě najděte hodnost $h(A)$, defekt $d(A)$ a bázi $\ker A$.

4. **[cvičení]** Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ následovně:

   (a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 - 3x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ (b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ (c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ (d) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_3 + x_2 \\ 4x_3 + 2x_2 \end{pmatrix}$.

   Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

- V pozitivním případě vyšetřete obor hodnot $A(\mathbb{R}^3)$ a hodnost $h(A)$, jádro $\ker A$ a defekt $d(A)$ a najděte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$.
- V negativním případě vysvětlete, proč A není lineární.

5. Zjistěte, v kterém případě je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Pokud není, vysvětlete proč. Pokud je, najděte $h(A), d(A), \ker A$. Pro každé $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$(a)\quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (b)\quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ iy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c)\quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^3)$ a pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, platí:
$$Ax = \left(\begin{smallmatrix} 2\alpha_0 - 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \end{smallmatrix}\right).$$

   Najděte:

   (a) $h(A)$ a $d(A)$,

   (b) $\ker A$,

   (c) všechna řešení $Ax = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

7. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Určete $h(A),\ d(A)$.

   (b) Doplňte $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ na bázi $A(\mathbb{R}^2)$.

   (c) Najděte bázi $\ker A$.

   (d) Je A izomorfismus? Vysvětlete.

8. **[cvičení]** Nechť D je operátor derivování a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ definované pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ jako:
$$(Ax)(t) = x(-2t+1).$$

   Uvažujte složené zobrazení DA a vyřešte pro ně následující úlohy:

   (a) Vyšetřete jádro, defekt a hodnost DA.

   (b) Najděte všechna řešení $(DA)x = b$, kde $b(t) = -1 + 4t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Výsledky: Lineární zobrazení

1. (a) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#, h(\varphi) = 1, d(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$

   (b) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#, h(\varphi) = 0, d(\varphi) = 3$, báze jádra je např. $\mathcal{E}_3$

   (c) $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^\#$ (φ není homogenní: $\varphi\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq (-1)\varphi\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$)

   (d) $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^\#$ (φ není homogenní: $\varphi\left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq i\varphi\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$)

   (e) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#, h(\varphi) = 1, d(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$

(f) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#, h(\varphi) = 1, d(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

2. (a) $\varphi(\vec{x}) = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 6x_3$

   (b) $h(\varphi) = 1$, $d(\varphi) = 2$, báze $\ker \varphi$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

3. (a) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ (A není homogenní: $A\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \neq iA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

   (b) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2), h(A) = 2, d(A) = 1$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} -2-i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

   (c) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ (A není homogenní: $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq (-1)A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

4. (a) $A(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$, $h(A) = 2$, $d(A) = 1$, báze $\ker A$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$
   a $A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ker A$

   (b) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ (A není homogenní: $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq (-1)A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

   (c) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ($A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

   (d) $A(\mathbb{R}^3) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda$, $h(A) = 1$, $d(A) = 2$, báze $\ker A$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a $A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \emptyset$

5. (a) $h(A) = 2$, $d(A) = 0$, $\ker A = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

   (b) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ($A(\mathbb{R}^2) \not\subset \mathbb{R}^3$)

   (c) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ($A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

6. (a) $h(A) = 2$, $d(A) = 1$

   (b) $\ker A = [e_1 + e_2 + e_3]_\lambda$

   (c) $A^{-1}(\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = e_1 - 2e_2 + \ker A$

7. (a) $h(A) = 2$, $d(A) = 0$

   (b) báze $A(\mathbb{R}^2)$ je např. $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

   (c) $\ker A = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, báze neexistuje

   (d) A je pouze monomorfní, není epimorfní

8. (a) $\ker(DA) = [e_1]_\lambda$, $d(DA) = 1$, $h(DA) = 2$

   (b) $(DA)^{-1}(b) = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 + \ker(DA)$