Báze a dimenze, souřadnice vektoru v bázi

Z teorie je třeba znát pojmy: báze, dimenze, souřadnice vektoru v bázi, standardní báze prostorů T^n, $T^{m,n}$ a $\mathcal{P}_n$.
Je třeba umět: vybrat bázi z generátorů, doplnit LN vektory na bázi.
Dobré je si také uvědomit, že pokud $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ leží ve vektorovém prostoru V nad T, pak je také $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\right]_\lambda$ vektorovým prostorem nad T. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

1. **[cvičení]** Nechť $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^4$. Nalezněte nějakou bázi $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5\right]_\lambda$. Vyjádřete vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5$ jako lineární kombinace nalezené báze.

2. **[cvičení]** V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi následujícího lineárního obalu vektorů z $\mathbb{C}^4$:
$$\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

3. Nechť V je vektorový prostor nad T. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je bází V nad T. Nalezněte všechny hodnoty α, pro které je soubor $(\vec{x} + \alpha\vec{y} - \vec{z}, 2\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, \alpha\vec{x} + \vec{y})$ bází V.

4. **[cvičení]** Nechť $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^4$. Nalezněte bázi $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right]_\lambda$, která obsahuje
(a) vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, (b) vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathbb{C}^3$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{C}^3$, a nalezněte $(\vec{x})_\mathcal{X}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou dvě báze $\mathbb{C}^3$, kde
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Nalezněte $(\vec{x})_\mathcal{X}$, je-li
$$(\vec{x})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7. **[cvičení]** Nechť V_3 je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3 a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ je soubor vektorů z V_3 a $\vec{x} \in V_3$. Dokažte, že $\mathcal{Y}$ je také báze V_3, a najděte $(\vec{x})_{\mathcal{Y}}$, je-li $(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze $\mathbb{C}^3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, (\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}}$ a $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}}$.

9. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze $\mathcal{P}_3$ a $x, y \in \mathcal{P}_3$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = 2 + 2t - t^2, \ x_2(t) = 2 - t + 2t^2, \ x_3(t) = -1 + 2t + 2t^2.$$

Dále nechť $(y_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (y_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (y_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $(x)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, (y)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $(x - 2y)_{\mathcal{E}}$ a $(x - 2y)_{\mathcal{X}}$.

10. **[cvičení]** Nechť x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jsou vektory z $\mathcal{P}$. Najděte bázi $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_\lambda$.

$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3 - 4t + t^2 + 2t^3 \\ x_2(t) &= 5 + 26t - 9t^2 - 12t^3 \\ x_3(t) &= 2 - 5t + 8t^2 - 3t^3 \\ x_4(t) &= 2 + 3t - 4t^2 + t^3 \\ x_5(t) &= 1 + 2t + 3t^2 - 4t^3. \end{aligned}$$

11. **[cvičení]** Nechť x_1, x_2, x_3 jsou vektory z $\mathcal{P}_5$. Najděte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tak, aby $\dim[x_1, x_2, x_3]_\lambda < 3$.

$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4 \\ x_2(t) &= 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4 \\ x_3(t) &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4. \end{aligned}$$

12. **[cvičení]** Nalezněte v prostoru $\mathbb{R}^4$ dvě báze tak, aby neměly žádný společný vektor, přičemž jedna báze bude obsahovat vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a druhá báze vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. **[cvičení]** Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ jsou vektory z prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$. Určete dimenzi $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$, je-li:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 + 2i \\ 2 - 3i \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 - i \\ 3 + i \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 + 4i \\ -1 - 5i \end{pmatrix}, \ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 1 + 3i \end{pmatrix}.$$

14. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{C}^{2,2}$. Nalezněte $(\mathbb{X})_{\mathcal{Y}}$, je-li $(\mathbb{X})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

15. Nechť $V = (0, +\infty)$, $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\vec{x} = x \in (0, +\infty)$ a $\vec{y} = y \in (0, +\infty)$ a pro každé $\alpha \in T$ definujeme:
$$\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y, \ \alpha \odot \vec{x} = x^{\alpha}.$$
Najděte bázi a dimenzi V. (Tento příklad byl jako DÚ na přednášce.)

16. Nechť $\mathcal{Y} = (-\vec{e}_3, \vec{e}_2, 2\vec{e}_1)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \vec{x}_2 - 3\vec{x}_3, \ \vec{z} = (\vec{y})_{\mathcal{Y}}.$$
   (a) Najděte složky vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.
   (b) Určete, zda soubor $\mathcal{W} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$. Vysvětlete.
   (c) Najděte $(\vec{y})_{\mathcal{W}}$, je-li to možné.

17. Nechť $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$, $M = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$.
   (a) Vyberte bázi M z generátorů M.
   (b) Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ lze následující dvě matice doplnit na bázi M. Pro taková α tyto dvě matice na bázi M doplňte.
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

18. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je báze $\mathcal{P}_4$ (prostor polynomů stupně maximálně tři s přidáním nulového polynomu) a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ je soubor z $\mathcal{P}_4$, přičemž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:
$$x_1(t) = 1 + t, \quad x_2(t) = 1 - t, \quad x_3(t) = t^2 + t^3, \quad x_4(t) = t^2 - t^3,$$
$$(y_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, (y_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, (y_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, (y_4)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Je $\mathcal{Y}$ báze $\mathcal{P}_4$? Vysvětlete.
   (b) Najděte $(y)_{\mathcal{X}}$, je-li $y = y_1 - 5y_3$.
   (c) Najděte $(z)_{\mathcal{Y}}$, je-li $(z)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (pokud má taková úloha smysl).

19. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Nechť $\mathcal{Y} = (\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \mathbb{Y}_3, \mathbb{Y}_4)$ je soubor z $\mathbb{R}^{2,2}$,
$$(\mathbb{Y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_4)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Je $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{R}^{2,2}$? Vysvětlete.

(b) Najděte $(\mathbb{Y})_{\mathcal{X}}$, je-li $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 - 5\mathbb{Y}_3$.

(c) Najděte $(\mathbb{Z})_{\mathcal{Y}}$, je-li $(\mathbb{Z})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (pokud má taková úloha smysl).

20. Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$ (prostor polynomů stupně maximálně tři s přidáním nulového polynomu), $M = [x_1, x_2, x_3, x_4]_\lambda$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$x_1(t) = 1 + t + t^2, \quad x_2(t) = 1 - t + t^2, \quad x_3(t) = 1 + t + t^3, \quad x_4(t) = t.$$

(a) Vyberte bázi M z generátorů M.

(b) Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ lze polynomy x, y doplnit na bázi M. Pro taková α tyto dva polynomy na bázi M doplňte.

$$x(t) = 1 + \alpha t + t^2, \quad y(t) = 1 - \alpha t + t^2 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

21. Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^3$ složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

(a) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,

(b) $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.

Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^3$ (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$? Vysvětlete a v pozitivním případě najděte dimenzi a bázi V.

22. Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^{2,2}$ složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, pro které platí:

(a) $x_{11} + x_{22} = 1$,

(b) $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = 0$.

Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^{2,2}$ (tj. sčítání matic a násobení matice komplexním číslem po prvcích) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$? Vysvětlete a v pozitivním případě najděte dimenzi a bázi V.

23. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Nechť $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4$ jsou vektory z $\mathbb{R}^{2,2}$, kde $(\mathbb{X}_1)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\mathbb{X}_2)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\mathbb{X}_3)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, (\mathbb{X}_4)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Rozhodněte, zda $\mathcal{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Vysvětlete.

(b) Vyberte bázi z generátorů $[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4]_\lambda$.

(c) Doplňte $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ na bázi $[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4]_\lambda$, je-li to možné.

(d) Nechť $(\mathbb{U})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Doplňte $\mathbb{U}, \mathbb{Z}$ na bázi $\mathbb{R}^{2,2}$, je-li to možné.

24. Nechť $\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^{2,2}$.

(a) Nalezněte bázi $\left[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3\right]_\lambda$, která obsahuje
i. $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, ii. $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$ a $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Pokud je to možné, doplňte $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$ na bázi $\mathbb{C}^{2,2}$.

(c) Pokud je to možné, doplňte $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ na bázi $\mathbb{C}^{2,2}$.

25. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ jsou vektory v $\mathbb{R}^4$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    (a) Je-li to možné, doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

    (b) Doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $\mathbb{R}^4$.

26. Nechť
$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Nechť $M = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\lambda$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{z} = (\vec{x} + \vec{y})_\mathcal{Y}$.

    V závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$:

    (a) Určete dimenzi a bázi M.

    (b) Rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$.

27. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \in V$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{Re}(\alpha) \\ 2i \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$
a $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$. Najděte dimenzi a bázi P v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$, je-li

    (a) $V = \mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{C}$,

    (b) $V = \mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{R}$.

28. Dokažte: Každý jednoprvkový soubor (y), kde $y \neq 0$ je číslo z tělesa T, je bází vektorového prostoru T nad T. Žádné jiné báze neexistují.

29. Najděte několik bází vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.

30. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných

    (a) na intervalu $(0, \pi)$,

    (b) na množině $\{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$.

    Najděte bázi $[f, g]_\lambda$, je-li $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$.

Výsledky: Báze a dimenze, souřadnice vektoru v bázi

1. Báze např. $(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_4})$,
$\vec{x_1} = 1 \cdot \vec{x_1} + 0 \cdot \vec{x_2} + 0 \cdot \vec{x_4}$,
$\vec{x_2} = 0 \cdot \vec{x_1} + 1 \cdot \vec{x_2} + 0 \cdot \vec{x_4}$,
$\vec{x_3} = -\vec{x_1} + 1 \cdot \vec{x_2} + 0 \cdot \vec{x_4}$,
$\vec{x_4} = 0 \cdot \vec{x_1} + 0 \cdot \vec{x_2} + 1 \cdot \vec{x_4}$,
$\vec{x_5} = \vec{x_1} - \vec{x_2} + 1 \cdot \vec{x_4}$.

2. (a) Pro $\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -3$ je $\dim = 4$,

   (b) pro $\alpha = 1$ je $\dim = 1$,

   (c) pro $\alpha = -3$ je $\dim = 3$.

3. Báze pro $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 3$.

4. (a) Báze je např. $(\vec{x}, \vec{x_1}, \vec{x_2})$, resp. $(\vec{x}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$.
   (b) Báze je např. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x_1})$, resp. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x_2})$.

5. $\mathcal{X}$ je báze a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, neboť $\vec{x} = 2 \cdot \vec{x_1} - \vec{x_2} + 3 \cdot \vec{x_3}$.

6. $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

7. $\mathcal{Y}$ je báze a $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. Je vhodné si uvědomit, že u vektorů v T^n platí $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \vec{x}$.
   $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$, $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

9. Ze zadání plyne $(\vec{x}_1)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(\vec{x}_2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(\vec{x}_3)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Příklad je tedy numericky totožný s příkladem 8., a proto výsledek je opět
   $(x - 2y)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$, $(x - 2y)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

10. Báze je např. (x_1, x_4, x_5) nebo (x_2, x_4, x_5) nebo (x_3, x_4, x_5).

11. $\alpha = 8, \beta = 20, \gamma = -13$.

12. Např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

13. Dimenze je rovna třem a báze je např. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

14. $(\mathbb{X})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

15. Báze je jakékoliv kladné číslo různé od jedné a dimenze V je rovna jedné.

16. (a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $\mathcal{W}$ je báze (dimenze $\mathbb{R}^3$ je rovna třem, stačí ověřit LN), (c) $(\vec{y})_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

17. (a) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, (b) doplnit na bázi lze zadané vektory pro $\alpha = 1$ $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

18. (a) $\mathcal{Y}$ je báze (stačí ověřit LN), (b) $(y)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \\ 18 \end{pmatrix}$, (c) $(z)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

19. (a) $\mathcal{Y}$ je báze (stačí ověřit LN), (b) $(\mathbb{Y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$, (c) $(\mathbb{Z})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

20. (a) (x_1, x_2, x_3) je báze M, (b) pro $\alpha \neq 0$, (x, y, x_3) je báze M.

21. (a) V není vektorový prostor, např. $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in V$, ale $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \notin V$,
(b) $V \subset\subset \mathbb{C}^3$, proto V je vektorový prostor, $\dim V = 2$, báze V je např. $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

22. (a) V není vektorový prostor, např. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in V$, ale $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \notin V$,
(b) $V \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, proto V je vektorový prostor, $\dim V = 3$, báze V je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

23. (a) $\mathcal{X}$ není báze, není LN, např. $-\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2 + \mathbb{X}_4 = \mathbb{O}$, (b) $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3)$ je báze,
(c) $\mathbb{Z} \notin [\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3]_\lambda$, (d) $(\mathbb{Z}, \mathbb{U}, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$.

24. (a) (i) nelze doplnit, (ii) $(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ je báze, (b) nelze, jsou LZ, (c) $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))$ je báze $\mathbb{C}^{2,2}$.

25. (a) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{p}_1)$ je báze P, (b) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{p}_1, \vec{e}_3)$ je báze $\mathbb{R}^4$.

26. (a) pro $\alpha \neq 0$ je $\dim M = 3$, báze $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, pro $\alpha = 0$ je $\dim M = 2$, báze $(\vec{x}, \vec{y})$, (b) pro $\alpha = -2$.

27. (a) $P = \mathbb{C}^3$, báze např. standardní, (b) $\mathrm{Re}(\alpha) \neq 1$: báze $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$, $\mathrm{Re}(\alpha) = 1$: báze $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4)$.

28. Je LN a generuje.

29. Např. $(1, i)$, resp. každý soubor dvou nenulových komplexních čísel, kde jedno není reálný násobek druhého.

30. (a) Báze je např. soubor (f, g).
(b) Báze je např. soubor (g).