Praktická část zkouškové písemky LALA 28. 1. 2019
Jméno:

1. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ báze $\mathbb{R}^2$.

   Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Je zadáno lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ následující maticí ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Určete $h(BA)$, $d(BA)$.

   (b) Najděte $\ker BA$.

   (c) Nalezněte všechna řešení rovnice $(BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Nechť $\mathcal{Y} = (\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \mathbb{Y}_3, \mathbb{Y}_4)$ je soubor z $\mathbb{R}^{2,2}$,

$$(\mathbb{Y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_4)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Je $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{R}^{2,2}$? Vysvětlete.

   (b) Najděte $(\mathbb{Y})_{\mathcal{X}}$, je-li $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 - 4\mathbb{Y}_3$.

   (c) Najděte $(\mathbb{Z})_{\mathcal{Y}}$, je-li $(\mathbb{Z})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (pokud má taková úloha smysl).

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]_\lambda$, kde $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$. Nalezněte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $\dim P = 2$. Je-li Q podprostor $\mathbb{R}^3$, najděte bázi a dimenzi Q, $P + Q$ a $P \cap Q$ s užitím vypočtené hodnoty α. Není-li Q podprostor $\mathbb{R}^3$, vysvětlete proč ne.

   (a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = x_3 \right\}$,

   (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 = x_3 \right\}$.

4. Jsou LZ vektory

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -1-i \end{pmatrix}$$

   (a) v $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{C}$?

   (b) v $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{R}$?