Praktická část zkouškové písemky LALA   21. 1. 2019
Jméno:

1. Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$ (prostor polynomů stupně maximálně tři s přidáním nulového polynomu), $M = [x_1, x_2, x_3, x_4]_\lambda$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$x_1(t) = 3t, \quad x_2(t) = 1 + t^2, \quad x_3(t) = 1 + t + t^3, \quad x_4(t) = 1 - t + t^2.$$

   (a) Vyberte bázi M z generátorů M.

   (b) Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ lze polynomy x, y doplnit na bázi M (tj. báze bude obsahovat zároveň x i y). Pro taková α tyto dva polynomy na bázi M doplňte.

$$x(t) = 1 + \alpha t + t^2, \quad y(t) = 1 - \alpha t + t^2 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

2. Zjistěte, v kterém případě je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Pokud není, vysvětlete proč. Pokud je, najděte $h(A), d(A), \ker A$. Pro každé $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$(a) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ iy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$,

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda,$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \middle| x_{11} + x_{22} = x_{12} + x_{21} \right\}.$$

   (a) Najděte dimenzi a bázi $P, Q, P+Q$ a $P \cap Q$.

   (b) Najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$.

4. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Je zadán lineární operátor A na $\mathbb{R}^3$ pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ $\quad {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte

   (a) $\ker A, d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),

   (b) všechna řešení rovnice

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$