Praktická část zkouškové písemky LALA 14. 1. 2019
Jméno:

1. Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^{2,2}$ složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, pro které platí:

   (a) $x_{11} - 2x_{22} = 1$,

   (b) $3x_{11} - x_{12} + x_{21} + x_{22} = 0$.

   Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^{2,2}$ (tj. sčítání matic a násobení matice komplexním číslem po prvcích) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$? Vysvětlete a v pozitivním případě najděte dimenzi a bázi V.

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\},\ Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

   Úkoly:

   (a) Najděte bázi $A(\mathbb{C}^4)$ a určete hodnost $h(A)$ a defekt $d(A)$.

   (b) Najděte bázi jádra.

   (c) Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Nechť D je operátor derivování a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ definované pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ jako:

$$(Ax)(t) = x(-2t + 1).$$

   Uvažujte složené zobrazení DA a vyřešte pro ně následující úlohy:

   (a) Vyšetřete jádro, defekt a hodnost DA.

   (b) Najděte všechna řešení $(DA)x = b$, kde $b(t) = -1 + 4t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.