Kontrolní písemka LAL 18. 12. 2018 Jméno:

1. Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ následujícím způsobem
$$\varphi(\vec{x}) = x_1 + \alpha_2 - x_2 + \alpha_3,$$
kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$ definovaná následovně $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Zjistěte, zda $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$. Vysvětlete. V kladném případě najděte hodnost $h(\varphi)$ a defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

2. Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ následovně:
$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$
Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Vysvětlete.

3. Nechť
$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$
jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ zadané svou maticí v bázi $\mathcal{X}$
${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Určete $h(B), d(B), \ker B$.
   (b) Je B prosté? Je B surjektivní? Vysvětlete.
   (c) Vyšetřete množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definované následovně $(Ax)(t) = x(t-1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, v níž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí
$$x_1(t) = t - t^2, \; x_2(t) = 1 - t + t^2, \; x_3(t) = -1 + t.$$