Kontrolní písemka LAL 22. 11. 2018 Jméno:

1. Nechť V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, těleso $T = \mathbb{R}$.
   Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme:
   $$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \text{ a } \alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$? Vysvětlete.

2. Jsou vektory $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4$ z $\mathbb{C}^{2,2}$ LN nebo LZ? Vysvětlete.
   $$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je báze $\mathcal{P}_4$ (prostor polynomů stupně maximálně tři s přidáním nulového polynomu) a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ je rovněž báze $\mathcal{P}_4$, přičemž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:
   $$x_1(t) = 1 + t, \quad x_2(t) = 1 - t, \quad x_3(t) = t^2 + t^3, \quad x_4(t) = t^2 - t^3,$$
   $$(y_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, (y_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, (y_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, (y_4)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
   Najděte $(z)_\mathcal{Y}$, je-li $(z)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li
   $$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \right\} \text{ a } Q = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

5. **[bonusový příklad]** Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathcal{P}_4$, a v kladném případě určete $\dim M$ a najděte bázi M.
   $$M = \{ x \in \mathcal{P}_4 | \, (\forall t \in \langle 0, 1 \rangle)(x(t) = x(1-t)) \}.$$