Zkoušková písemka LALA   26. 1. 2017   Jméno:

Praxe

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definujeme

   $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ a dále známe ${}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat.

   (b) Pro složené zobrazení najděte v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jeho matici ve standardních bázích, jeho hodnost, defekt a jádro.

2. Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^{2,2}$ složená z matic $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, pro které platí:

   (a) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,

   (b) $x_1 + x_2 = 0$,

   (c) $x_1 \neq x_3$,

   (d) $x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \wedge 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

   Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^{2,2}$ (tj. sčítání matic a násobení matice komplexním číslem po prvcích) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$? V pozitivním případě najděte dimenzi a bázi. V negativním případě vysvětlete, proč nejde o vektorový prostor.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$,

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

   Najděte dimenzi a bázi podprostorů Q, $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$ definován jako:

$$\text{(a)} \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \right\},$$

$$\text{(b)} \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \;\wedge\; x_1 + x_3 = 0 \right\}.$$

4. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{P}_4^\#$ a $x \in \mathcal{P}_4$.

$$\varphi_1(x) = x(0) - x(2),\; \varphi_2 = e_2^\# - 2x_3^\#,\; \varphi_3(x) = 2\alpha_0 - 2\alpha_3 + \beta_1 + \beta_3,$$

   kde $(\forall t \in \mathbb{C})(x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3)$ a $(x)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována

$$(\forall t \in \mathbb{C})(x_1(t) = 1 + t,\; x_2(t) = 1 - t,\; x_3(t) = t^2 - t^3,\; x_4(t) = t^2 + t^3).$$

   (a) Pro $j \in \{1, 2, 3\}$ najděte $(\varphi_j)_{\mathcal{X}^\#}$.

   (b) Zjistěte, zda $e_1^\# \in [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]_\lambda$ a zda $x_3^\# \in [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]_\lambda$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady! T značí všude číselné těleso.

1. (a) Definujte matici zobrazení v bázích.
   (b) Vyslovte větu o matici součtu zobrazení v bázích a násobku zobrazení v bázích.
   (c) Vyslovte větu o matici složeného zobrazení v bázích.
   (d) Vyslovte větu o vyjádření obrazu vektoru pomocí matice v bázích, tj. vyskytuje se v ní $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}}$ vyjádřený pomocí matice zobrazení A v nějakých bázích.

2. (a) Definujte lineární zobrazení, lineární operátor a lineární funkcionál.
   (b) Definujte lineární operátor na $\mathbb{R}^2$, kterému říkáme rotace o úhel $\frac{\pi}{3}$, tj. pro každé $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ napište, jak vypadá $A\binom{x_1}{x_2}$. Dokažte, že A je lineární.
   (c) Vyslovte alternativní definice lineárního zobrazení.

3. (a) Definujte lineárně závislé vektory. Zapište definici slovně i formálně matematicky.
   (b) Zapište množinově součet a průnik podmnožin vektorového prostoru.
   (c) Definujte direktní součet podmnožin vektorového prostoru.
   (d) Následující výroky nejsou pravdivé. Zkonstruujte k nim protipříklady. Dále doplňte jeden předpoklad tak, aby se výroky pravdivými staly.
      i. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T a $A : P \to Q$. Potom $A\vec{0}_P = \vec{0}_Q$.
      ii. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in V$, kde V je vektorový prostor nad T. Potom $\vec{x}, \vec{y}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje $\alpha \in T$ tak, že $\vec{y} = \alpha\vec{x}$.
      iii. Nechť $P, Q \subset V$, kde V je vektorový prostor nad T. Potom $P + Q$ je direktní, právě když $P \cap Q = \{\vec{0}\}$.